数学 1

全日制十年制学校高中课本·第一册

SHUXUE

SHUXUE

人民教育出版社

目　录

第一章　幂函数　指数函数　对数函数

一　集合与对应

在初中我们已见过一些集合与对应的例子，现在我们来学习集合与对应的一些简单知识.

1.1　集合

看下面的例子:

(1) 1, 2, 3, 4, 5;

(2) 和一个角的两边距离相等的所有的点;

(3) 所有的直角三角形;

(4) $x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2$;

(5) 某农场所有的拖拉机.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些整式和一些拖拉机组成的整体. 象这样，把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个**集合**. 集合里的各个对象叫做集合的**元素**. 例如，(1)是由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，1, 2, 3, 4, 5 都是这个集合的元素.

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的，这就是说，我们可以判断任何对象是不是这个集合的元素. 例如，对于由所有的直角三角形组成的集合，边长分别是 3 cm、4 cm、5 cm

的三角形，是这个集合的元素，边长分别是 4cm、4cm、5cm 的三角形不是这个集合的元素.

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做**列举法**.

例如，由数 1, 2, 3, 4, 5组成的集合，可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如，由整式 x^2, $3x+2$, $5y^3-x$, x^2+y^2 组成的集合，可以表示为

$$\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}.$$

在集合里，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，我们就认为是同一个集合.

例如　　$\{-3, 0, 2, 5\}$和$\{0, 2, -3, 5\}$

就是同一个集合.

一个元素在一个集合里不能重复出现.

应注意，a 和$\{a\}$是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$表示只有一个元素 a 的集合.

把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做**描述法**.

例如:

由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}；

由某农机站所有的拖拉机组成的集合，可以表示为

{某农机站的拖拉机}；

由小于 6 的所有正整数组成的集合，可以表示为

{小于6的正整数};

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合，可以表示为

$$\{x: x-3>2\}^{*};$$

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点组成的集合，可以表示为

$$\{(x,y): y=x^2+1\}.$$

在研究集合时，为了方便起见，常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，表示为 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，表示为 $a\notin A$．例如，设 B 表示集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则

$$5\in B,\quad \frac{3}{2}\notin B.$$

我们常用 N 表示自然数的集合，J 表示整数的集合，R 表示实数的集合．

练　习

(口答)说出下面集合里的元素(1～5)：

1. {与2相差3的数}．
2. {平方等于1的数}．
3. {平方和自己相等的数}．
4. {大于3小于11的偶数}．
5. {一年中恰有30天的月份}．

用适当的方法表示下列集合(6～10)：

6. 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星．

* 有的书上表示为 $\{x|x-3>2\}$．

7. 长江、黄河、珠江、黑龙江.

8. 周长等于 20 厘米的三角形.

9. 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解.

10. 大于 3 的偶数.

把下列集合用另一种方法表示(11～13):

11. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

12. {太阳系的九大行星}.

13. {京广铁路通过的省(市)}.

14. 在__处填上符号 $\in$ 或 $\notin$:

$1\_N,\quad 0\_N,\quad -3\_N,\quad \sqrt{2}\_N.$

$1\_J,\quad 0\_J,\quad -3\_J,\quad \sqrt{2}\_J.$

$1\_R,\quad 0\_R,\quad -3\_R,\quad \sqrt{2}\_R.$

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫做集合 B 的**子集**，表示为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"，或"B 包含 A".

例如 $N\subseteq J$，$N\subseteq R$，$J\subseteq R$.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A，所以

$$A\subseteq A,$$

也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，

那么集合A就叫做集合B的**真子集**，表示为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

例如，自然数集是N的子集，但不是N的真子集；N是R的子集，也是R的真子集.

集合B和集合B的真子集A之间的关系，可以用图 1-1 中B和A的关系来说明，其中A、B两个圆分别表示集合A、B.

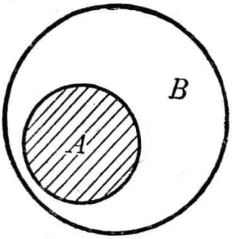


图 1-1

容易知道，对于集合A、B、C，如果$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$. 事实上，设x是A的任意一个元素，因为$A \subseteq B$，所以$x \in B$，又因为$B \subseteq C$，所以$x \in C$，故知$A \subseteq C$.

同样可知，对于集合A、B、C，如果$A \subset B$，$B \subset C$，那么$A \subset C$.

对于两个集合A、B，如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，那么，集合A和集合B就叫做**相等**，表示为

$$A = B.$$

读作“集合A等于集合B”.

例如，A是方程$x^2+3x+2=0$的根的集合，$B=\{-1, -2\}$，则$A=B$.

例 1 写出不等式$x-3>2$的解的集合.

解：不等式$x-3>2$的解的集合是

$$\{x: x-3>2\} = \{x: x>5\}.$$

为了方便起见，我们引进空集这个概念：不含任何元素的集合叫做**空集**，用符号$\varnothing$表示.

例如：$$\{x:\ x+1=x+3\}=\varnothing;$$

$$\{\text{小于零的正整数}\}=\varnothing;$$

$$\{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}=\varnothing.$$

我们规定空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任何集合 A，

$$\varnothing\subseteq A.$$

例2 写出$\{a, b\}$的所有的子集.

解： $\{a, b\}$的所有的子集是：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$和$\{a, b\}$.

2. 交集 看下面两个集合：

$$A=\{3, 5, 6, 8\},\ B=\{5, 7, 8, 10\}.$$

容易看出，集合$\{5, 8\}$是由同时属于A和B的一切元素所组成的，这时，我们就说集合$\{5, 8\}$是集合A与B的交集，表示为

$$\{3, 5, 6, 8\}\cap\{5, 7, 8, 10\}=\{5, 8\}.$$

一般地，由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的**交集**，表示为

$$A\cap B.$$

图 1-2 中的阴影部分，表示集合A与B的交集$A\cap B$.

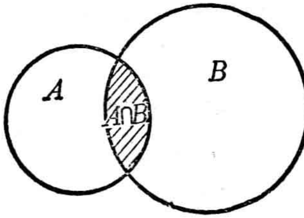


图 1-2

由交集定义容易知道，对于任何集合A，

$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

例3 设$A=\{x:\ x>-2\}$，$B=\{x:\ x<3\}$，求$A\cap B$.

解： $A\cap B=\{x:\ x>-2\}\cap\{x:\ x<3\}=\{x:\ -2<x<3\}$.

例4 设$A=\{(x, y): 4x+y=6\}$，$B=\{(x, y): 3x+2y=7\}$，

求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{(x,y):4x+y=6\}\cap\{(x,y):3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y):\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}$$

$$=\{(1,2)\}.$$

例5 设 $A=\{$等腰三角形$\}$, $B=\{$直角三角形$\}$, 求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$

$=\{$等腰同时有一个直角的三角形$\}$

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

例6 设 $A=\{$有理数$\}$, $B=\{$无理数$\}$, $R=\{$实数$\}$, 求 $A\cap B$, $A\cap R$, $B\cap R$.

解: $A\cap B=\{$有理数$\}\cap\{$无理数$\}=\varnothing$,

$A\cap R=\{$有理数$\}\cap\{$实数$\}=\{$有理数$\}=A$,

$B\cap R=\{$无理数$\}\cap\{$实数$\}=\{$无理数$\}=B$.

练　习

1. 在下面各题中的__处填上适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$):

(1) a__$\{a\}$;　　(2) a__$\{a,b,c\}$;

(3) d__$\{a,b,c\}$;　　(4) $\{a\}$__$\{a,b,c\}$;

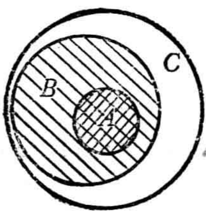
(5) $\{a,b\}$__$\{b,a\}$;

(6) $\{3,5\}$__$\{1,3,5,7\}$;

(7) $\{2,4,6,8\}$__$\{2,8\}$;

(8) $\varnothing$__$\{0,1,2\}$.

2. 图中 A、B、C 表示集合, 说明集合 A、B、C 有什么关系?



(第2题)

3. 写出方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$ 的解的集合。

4. 写出方程组$\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}$的解的集合。

5. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解的集合。

6. 写出$\{a,b,c\}$的所有的子集。

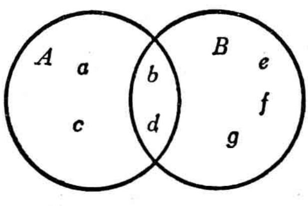
7. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,d,e,f,g\}$.

(1) 求$A\cap B$, $B\cap A$.

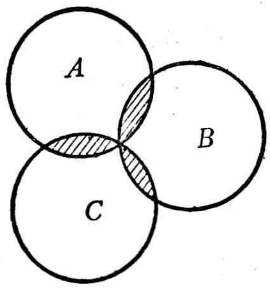
(2) 在__处填上适当的符号($\supset$, $\subset$, $=$):

$A\cap B$__A, $A\cap B$__$B\cap A$,

B__$A\cap B$, $\varnothing$__$B\cap A$.



(第7题)



(第8题)

8. 图中A、B、C表示集合，把各个阴影部分所表示的集合写出来，并用适当的符号表示它们和A,B,C的关系。

9. 设 $A=\{x:x<5\}$, $B=\{x:x\geqslant 0\}$, 求$A\cap B$.

10. 设 $A=\{(x,y):3x+2y=1\}$, $B=\{(x,y):x-y=2\}$, $C=\{(x,y):2x-2y=3\}$, $D=\{(x,y):6x+4y=2\}$，求$A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap D$.

11. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$, $B=\{$钝角三角形$\}$, 求$A\cap B$.

3. 并集 看下面两个集合:

$$A=\{3,5,6,8\},\ B=\{4,5,7,8\}.$$

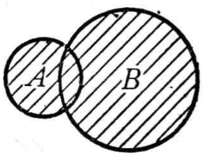
容易看出，$\{3,4,5,6,7,8\}$是属于A或者属于B的一切元素所组成的集合. 这时，我们就说$\{3,4,5,6,7,8\}$是集合A与B的并集,表示为

$$\{3,5,6,8\}\cup\{4,5,7,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}.$$

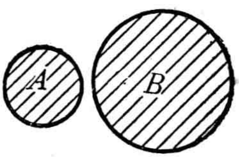
一般地，由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合,叫做集合A与B的**并集**,表示为

$$A\cup B.$$

图 1-3 中的阴影部分,表示集合A与B的并集$A\cup B$.



甲



乙

图 1-3

由并集定义容易知道,对于任何集合A,

$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A.$$

例7 设$A=\{x:-1<x<2\}$,$B=\{x:1<x<3\}$,求$A\cup B$.

解: $A\cup B=\{x:-1<x<2\}\cup\{x:1<x<3\}$

$=\{x:-1<x<3\}$.

例8 写出不等式$x^2+x-6\geqslant0$的解的集合.

解: 不等式$x^2+x-6\geqslant0$的解的集合是

$$\{x:x^2+x-6\geqslant0\}=\{x:x\leqslant-3\}\cup\{x:x\geqslant2\}.$$

例9 设$A=\{$锐角三角形$\}$,$B=\{$钝角三角形$\}$,求$A\cup B$.

解： $A\cup B=\{锐角三角形\}\cup\{钝角三角形\}$
$=\{锐角三角形或钝角三角形\}$
$=\{斜三角形\}$.

例 10 设 $A=\{有理数\}$，$B=\{整数\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解： $A\cup B=\{有理数\}\cup\{整数\}=\{有理数\}$.

$A\cap B=\{有理数\}\cap\{整数\}=\{整数\}$.

4. 补集 在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**，用符号 I 表示. 也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素. 现在我们来学习补集.

已知全集 I，$A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的**补集**，表示为 $\bar{A}$.

图 1-4 中的长方形表示全集 I，圆表示集合 A，阴影部分表示集合 A 的补集 $\bar{A}$.

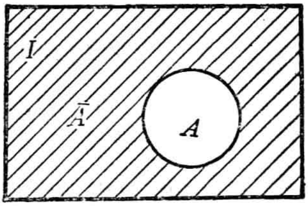


图 1-4

由补集的定义容易知道，对于任何集合 A，

$$A\cup\bar{A}=I,\quad A\cap\bar{A}=\varnothing.$$

例如，如果 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$.

则 $\bar{A}=\{2,4,6\}$.

容易看出 $\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$,
$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$.

例 11 设 $I=R=\{实数\}$，$A=\{x: x^2+3x+2<0\}$，求 $\bar{A}$.

解： $\because\ A=\{x: x^2+3x+2<0\}=\{x: -2<x<-1\}$,

$\therefore\ \bar{A}=\{x: x\leqslant-2\}\cup\{x: x\geqslant-1\}$.

例 12 设 $I=\{$梯形$\}$, $A=\{$等腰梯形$\}$, 求 $\bar{A}$.

解: $\bar{A}=\{$不等腰梯形$\}$.

例 13 设 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{4, 7, 8\}$, 求 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cup\bar{B}$.

解: $\bar{A}=\{1, 2, 6, 7, 8\}$, $\bar{B}=\{1, 2, 3, 5, 6\}$,

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1, 2, 6\}$,

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

练　习

1. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

(1) 求 $A\cup B$, $A\cap B$.

(2) 在__处填上适当的符号($\supset$, $\subset$):

$A\cup B$__A, $A\cup B$__B, $A\cap B$__$A\cup B$.

2. 设 $A=\{x: -2<x<1\}$, $B=\{x: 0\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 $A\cup B$.

3. 设 $A=\{x: x>-2\}$, $B=\{x: x\geqslant 3\}$, 求 $A\cup B$.

4. 写出不等式 $|a+3|>1$ 的解的集合.

5. 写出不等式 $x^2-x-2<0$ 的解的集合.

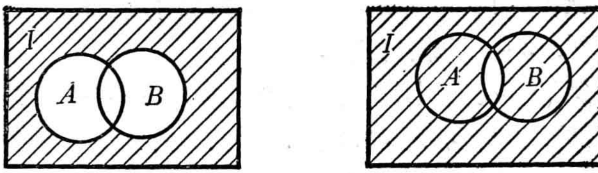
6. 设 $A=\{$直角三角形$\}$, $B=\{$斜三角形$\}$, 求 $A\cup B$.

7. 设 $I=R=\{$实数$\}$, $A=\{$无理数$\}$, 求 $\bar{A}$.

8. 设 $I=\{$四边形$\}$, $A=\{$有一组对边平行的四边形$\}$, 求 $\bar{A}$.

9. 设 $I=\{$小于 9 的正整数$\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, 求 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A\cap B$, $\overline{A\cap B}$.

10. 图中 I 是全集, 把阴影部分用 A、B 表示出来.

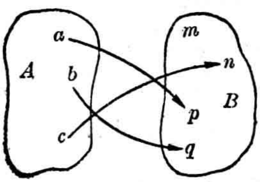


(第 10 题)

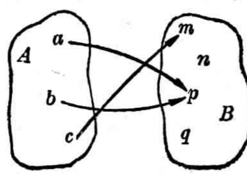
1.3 单值对应 函数

1. 单值对应 在初中我们已学习过对应的概念. 例如, 对于任何一个实数 a, 数轴上都有唯一的点 A 和它对应; 坐标平面内的任何一个点 P, 都有唯一的一对有顺序的实数 (x_1, y_1) 和它对应. 现在我们来进一步学习对应的概念.

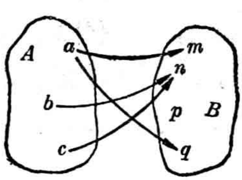
下面是集合 A 和 B 的元素之间的三种对应关系 (图 1-5):



(一)



(二)



(三)

图 1-5

(一)和(二)中的对应关系有这样的特点: 对于集合 A 的任何一个元素, 集合 B 都有唯一的元素和它对应. 这样的对应

关系叫做单值对应.

一般地，设 A 与 B 是两个集合，如果按照某种对应关系，使 A 的任何一个元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系叫做从集合 A 到集合 B 的**单值对应**.

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, A 的元素按对应关系: $x\to 2x+1$ 和 B 的元素相对应. 这是个单值对应.

又如，设 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{0,1,2,3,4\}$, A 的元素按对应关系: $x\to x^2$ 和 B 的元素相对应. 这是个单值对应.

对于（三）中的对应关系来说，由于集合 A 中有一个元素 (a) 和集合 B 中两个元素 (m, q) 相对应，所以它不是单值对应.

单值对应也叫做**映射**. 在单值对应下，A 中的元素 a 所对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的**象**，a 叫做 b 的**原象**. 例如，在上面第一个例子中，$4\in A$, $9\in B$, $4\to 2\times 4+1=9$, 9 叫做 4 的象，4 叫做 9 的原象. A 的元素的象的集合是 $\{3,5,7,9\}$.

2. 函数 我们在初中第六册已经学过正比例函数、一次函数、反比例函数和二次函数. 函数的概念可叙述如下:

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 依赖于 x. 如果对于 x 的每一个确定的值，按照某个对应关系，y 都有唯一的值和它对应，y 就叫做 x 的**函数**，x 叫做**自变量**. x 的取值范围叫做函数的**定义域**. 和 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的**值域**.

在函数的概念中涉及到两个集合，即函数的定义域和值域，以及这两个集合的元素之间的对应关系. 在我们这里，函数的定义域和值域都是由一些实数组成的集合，对应关系是从定义域到值域的单值对应.

例如，一次函数 $y=3x+2$. 函数的定义域是 R，值域是 R，对应关系 $x\to 3x+2$ 是从 R 到 R 的单值对应.

又如，二次函数 $y=2x^2+2$. 函数的定义域是 R，值域是 $\{y: y\geqslant 2\}$，对应关系 $x\to 2x^2+2$ 是从 R 到 $\{y: y\geqslant 2\}$ 的单值对应.

我们常用下面的符号表示 y 是 x 的函数:

$$y=f(x).$$

x 在定义域中取一个确定的值 a 时，$f(a)$ 就表示对应的函数值.

例如，二次函数 $f(x)=x^2+2x-1$，在 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 时的函数值是 $f(0)=-1$, $f(1)=2$, $f(2)=7$.

在同时研究两个或多个函数时，就要用不同的符号表示不同的函数，除 $f(x)$ 外还常用 $F(x)$, $G(x)$, $g(x)$ 等符号.

在研究函数的性质时常常要用到区间的概念.

设 a, b 是两个实数，而且 $a<b$. 我们把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a, b]$；满足 $a<x<b$ 的实数 x 的全体的集合叫做**开区间**，表示为 (a, b)；满足 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体的集合，表示为 $[a, b)$；满足 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的全体的集合，表示为 $(a, b]$.

全体实数的集合 R，表示为 $(-\infty, +\infty)$，“∞”读作无穷大，“$-\infty$”读做负无穷大，“$+\infty$”读做正无穷大. 满足 $x\geqslant a$, $x>a$, $x\leqslant b$, $x<b$ 的实数 x 全体的集合，分别表示为 $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

一次函数的图象是一条直线，二次函数的图象是一条平滑的曲线，反比例函数的图象是两条平滑的曲线，函数的图象也

可以是一些点或几条线段等.

例 1 某种茶杯，每个 0.5 元，买 x 个茶杯的钱数(元)是

$$f(x)=0.5x.\quad x\in\{0,1,2,3,\cdots\cdots\}.$$

这个函数的图象是一些点(图 1-6).

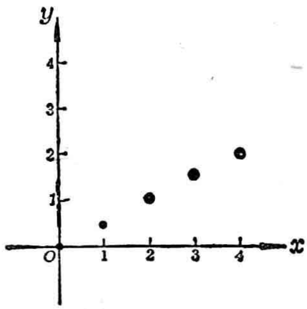


图 1-6

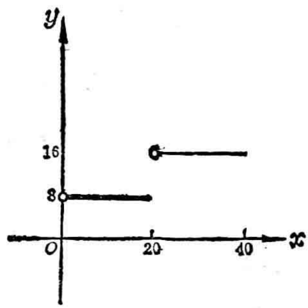


图 1-7

例 2 寄信时，信重不超过 20 克付邮资 8 分，超过 20 克而不超过 40 克付邮资 1 角 6 分. 信重 $x(0<x\leqslant 40)$ 克的邮资(分)是

$$f(x)=\begin{cases}8, & x\in(0,20],\\ 16, & x\in(20,40].\end{cases}$$

这个函数的图象是两条线段(图 1-7).

当我们所研究的函数 $y=f(x)$ 是用一个式子表示时，如果不加说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合.

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域.

解: $\because$ $x-2=0$ 时，$x=2$,

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{x:\ x\in R, x\neq 2\}$.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{3x+2}$ 的定义域.