APPLIED PROBABILITY AND STATISTICS

A pplied probability and statistics

应用概率统计学习指导及习题解析

胡玉梅　宋占杰　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

应用概率统计
学习指导及习题解析

胡玉梅　宋占杰　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是天津大学传统教材《应用概率统计》配套使用的学习参考书. 共分 9 章编写，包括该教材的全部习题解析，同时为便于教学，还参考了全国硕士研究生入学统一考试大纲精神，在每章开始部分都给出了教学要求与该章的重点和难点内容，书末配有教学课件，以便学生自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计学习指导及习题解析/胡玉梅，宋占杰编. —天津：天津大学出版社，2012. 8

ISBN 978-7-5618-4456-4

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①胡…②宋… Ⅲ. ①概率统计 - 教学参考资料 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 201392 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647
网　　址 publish. tju. edu. cn
印　　刷 昌黎县思锐印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm × 239mm
印　　张 10. 25
字　　数 213 千
版　　次 2012 年 9 月第 1 版
印　　次 2012 年 9 月第 1 次
印　　数 1 - 2 000
定　　价 23. 00 元

前　言

为了深化应用概率统计教学内容和课程体系改革，顺应“卓越工程师培养计划”的要求，在天津大学本科教学综合改革立项项目的支持下，结合天津大学概率统计二十余年教学改革的成功经验，由宋占杰教授和胡飞副教授对传统教材进行了大幅度修订，编写了《应用概率统计（第四版）》教材. 本书是与之相配套的习题解析，同时本书亦可作为一本概率统计的习题解析独立使用，以帮助读者解除“做题难”的困扰. 因为概率统计和高等数学思维方式有区别，历年来有很多学生反映：高等数学课堂上听懂了，课后习题就有思路做. 但概率统计课堂上听懂了，课后习题常常感到无从下手. 这是由确定性数学和随机数学的思维方式决定的，随机数学的技巧性强，并相对独立，使学生学习产生了困惑，很有必要给出一些难题的解答.

本书习题由胡玉梅编写，宋占杰对书中内容进行了总结修正，并负责统稿.

本书的出版得到了天津大学本科教学综合改革立项的支持，得到了天津大学教务处和数学系领导的热忱帮助，在此一并致以衷心的感谢.

由于作者水平有限，疏漏和不当之处恳请同行与读者指正.

联系邮箱：

zhanjiesong@ tju. edu. cn

huyumei@ tju. edu. cn

zhaosm999@ sohu. com

编者

2012 年 5 月于天津大学

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

知识要点概述

一、样本空间与随机事件

1. 随机试验

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的一门数学分支，属于随机数学范围. 概率论中的一个基本概念是随机试验，它是指其结果不能事先准确地预言且在相同条件下可以重复进行的试验.

2. 样本空间

设 E 为一随机试验，则试验 E 的所有可能的“基本结果”（指试验的最简单的、不可或不必再细分的结果）构成的集合称为 E 的样本空间或基本空间，记为 Ω. 样本空间的每个元素（即 E 的每个基本结果）称为样本点，常用 ω 表示.

3. 随机事件

设 E 为随机试验，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 中的随机事件，简称事件，记为 $A,B,C,\cdots$ 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

4. 必然事件与不可能事件

在随机试验中，每次试验必然发生的事件称为必然事件，每次试验都不发生的事件称为不可能事件. 必然事件用 Ω 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示.

5. 事件的关系与事件的运算

（1）包含：若事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

（2）相等：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

（3）并：表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，也称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$.

（4）积：表示事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，也称为事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB.

（5）差：表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

（6）互不相容：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容事件，或称互斥事件.

(7)逆:若事件 A 与 B 满足:$A\cup B=\Omega$,且 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件,亦称事件 A 与事件 B 互为对立事件. A 的对立事件记为 $\bar{A}$,则 $\bar{A}=\Omega-A=B$.

事件运算顺序约定为先进行逆运算,再进行交运算,最后进行并或差运算. 如果恰当运用各种括号就能通过简单事件表示复杂的事件.

常用的事件运算规律:

交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$;

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

对偶律(De Morgan 公式)　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}, \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

分配律和对偶律都可以推广到有限个事件情形,也可以推广到可列无穷多个事件的情形.

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i;$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

虽然教材定义了事件的三种运算"并"、"交"、"逆",其实在本质上只需要两种运算:"并与逆"或"交与逆"即可. 这可由事件运算性质和对偶律推算出来. 例如,$A\cup B=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}, A\cap B=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$. 至于差运算可以表示为

$$A-B=A\cap\bar{B}\text{ 或 }A-B=\overline{\bar{A}\cup B}.$$

另外,记住一些事件之间关系的常用结论,也有助于分析事件和进行概率计算. 下面给出常用的关系式:

(1)$A\subset B$,当且仅当 $\bar{A}\supset\bar{B}$;

(2)$\varnothing\subset A\subset\Omega$;

(3)$A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\Omega=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,$
　$A-\varnothing=A,\quad A-\Omega=\varnothing$;

(4)$AB\subset A\subset A\cup B,\quad A-B\subset A\subset A\cup B$;

(5)$A\cap\bar{A}=\varnothing,\quad A\cup\bar{A}=\Omega,\quad \bar{A}=\Omega-A$;

(6)$(A-B)\cup A=A,\quad (A\cup B)\cap A=A$;

(7)$(A-B)\cap AB=\varnothing,\quad A=(A-B)\cup(AB),\quad A-B=A-AB$;

(8)$(A-B)\cap B=\varnothing,\quad A\cup B=(A-B)\cup B=A\cup(B-A)$.

借助文氏图容易理解并记住上述各式.

二、概率的定义及性质

1. 定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,A 是 E 中任意一事件,$P(A)$是 A 的实函数,且满

足

(1)$P(A)\geqslant 0$　(非负性);

(2)$P(\Omega)=1$　(规范性);

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\quad(\text{可列可加性}),$$

称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

2. 性质

(1)不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

(2)概率具有有限可加性,即若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3)设 A 为任一事件,则有

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

(4)设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A).$$

(5)对任意事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

一般地,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n);$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

三、古典概型

1. 定义

若随机试验 E 的样本空间 Ω 中只含有限个样本点,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,且每个样本点出现的可能性(概率)相同,则称 E 为古典型随机试验,简称古典概型.

2. 概率计算公式

设 A 是古典型随机试验 E 中的任意事件,则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}.$$

四、几何概型

1. 定义

向某一可度量的区域 G 内任投一点，如果所投的点落在 G 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则称这一随机试验为几何概型试验，简称几何概型.

上述“度量”是指线段长度、可求积平面区域的面积或可求积空间区域的体积. 几何概型试验的样本点可用 G 内的点表示，因此样本空间就是 $\Omega=G$.

2. 概率计算公式

设 A 是几何概型试验中的任意事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

五、条件概率

1. 定义

设 A,B 为两事件，且 $P(B)>0$，则在事件 B 已发生条件下，事件 A 发生的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

2. 乘法公式

设 A,B 为两事件，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A),\quad P(A)>0;$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0.$$

一般地有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

由条件概率的定义，易得

$$P(AB|C)=P(A|C)P(B|AC),\quad P(AC)>0,$$

称上式为条件概率的乘法公式.

3. 全概率公式

设 E 是随机试验，若 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 E 中的事件，且满足条件：

(1) $P(A_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n$;

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

在全概率公式中满足条件(2)的一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为样本空间 Ω 的一个分割（或称为样本空间 Ω 的一个划分，或称为一个完备事件组）.

4. 逆概率公式

设 E 是随机试验，若 $B, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 E 中的事件，且满足：

(1) $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$；

(2) 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$；

(3) $P(B)>0$，则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

六、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

若事件 A, B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A, B 是相互独立的.

定理 1　若事件 A, B 相互独立，且 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(A)$.

定理 2　若事件 A, B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立.

注意　当 $P(A)>0, P(B)>0$ 时，若事件 A, B 相互独立，则 A, B 必相容；若事件 A, B 互不相容，则 A, B 必不相互独立.

2. 三个事件的独立性

对于事件 A, B, C，若满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A, B, C 是相互独立的.

3. n 个事件的独立性

对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若对所有的可能组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$，有（共计 2^n-1-n 个等式）

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j), \quad P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k), \cdots,$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的.

定理 3　若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则把其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成对立事件，所得的诸事件仍然是相互独立的.

习题解析

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时掷3颗骰子,记录3颗骰子点数之和;

(2) 生产产品直到有10件正品为止,记录生产产品总件数;

(3) 把a,b两个球随机地放到3个盒子中去;

(4) 一个口袋中有5只外形完全相同的球,编号分别为1,2,3,4,5,从中同时取3只球.

解:(1)$\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$;

(2)$\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$;

(3)记$a_i=\{$将a球置于第i个盒子中去$\}$,$b_j=\{$将b球置于第j个盒子中$\}$,其中,$i,j=1,2,3$. 则

$$\Omega=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3\}.$$

(4)记ⓘ$=\{$取出的3个球中包含i号球$\}$,则

Ω={①②③,①②④,①②⑤,①③④,①③⑤,①④⑤,②③④,②③⑤,②④⑤,③④⑤}.

2. 设$\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,$C=\{5,6,7\}$,求下列事件:(1) $\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$;(2) $\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$.

解:(1)$\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$;

(2)$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}=\bar{A}\cup(B\cap C)=\{1,5,6,7,8,9,10\}$.

3. 设A,B,C是3个事件,且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=P(CB)=0$,$P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求$A,B,C$至少有一个发生的概率.

解:因为$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,所以$P(ABC)=0$.

由加法公式:
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

4. 在房间里有10个人,分别佩戴着从1号到10号的纪念章,任意选3人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小的号码为5的概率;

(2) 求最大的号码为5的概率.

解:随机试验为从10个人中任取3个,故Ω中共有C_{10}^3个样本点.

(1)设$A=\{3$个人中最小的号码为$5\}$,即标号为5的人必在此次所取的3个之

中，而另外 2 个人的标号都比 5 大，只能从 6，7，8，9，10 的 5 个中任取 2 个，故 A 中样本点个数为 C_5^2，于是

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

(2) 设 $B=\{3$ 个人中最大的标号为 $5\}$，即标号为 5 的人必在此次所取的 3 个人之中，而另外 2 个人的标号都比 5 小，只能是从 1，2，3，4 的 4 个人中任取的 2 个，故 B 的样本点个数为 C_4^2，于是

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

5. 将 Probability 这 11 个字母分别写在 11 张卡片上，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

解：设 $A=\{7$ 张卡片排列为 ability$\}$. 则 $P(A)=\dfrac{4}{A_{11}^7}=\dfrac{4}{1\,663\,200}=2.41\times10^{-6}$.

6. 在 1 500 个产品中有 400 个次品，1 100 个正品，任意取 200 个. 求：

(1) 恰有 90 个次品的概率；

(2) 至少有 2 个次品的概率.

解：随机试验为从 1 500 个产品中任意抽取 200 个，故 Ω 中共有 $C_{1\,500}^{200}$ 个样本点.

(1) 设 $A=\{$恰有 90 个次品$\}$，即"从 400 个次品中抽取 90 个"，而"从正品中抽取 110 个"故 A 共含有 $C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}$ 个样本点，故

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

(2) 设 $A_k=\{$恰有 k 个次品$\}$，则

$$P(A_k)=\frac{C_{400}^{k}C_{1\,100}^{200-k}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

设 $B=\{$至少有 2 个次品$\}$，可表示为 $B=\bigcup\limits_{k=2}^{200}A_k$，或 $B=\Omega-A_0-A_1$，故

$$P(B)=P\left(\bigcup_{k=2}^{200}A_k\right)=\sum_{k=2}^{200}\frac{C_{200}^{k}C_{1\,100}^{200-k}}{C_{1\,500}^{200}},$$

或　$$P(B)=P(\Omega-A_0-A_1)=1-\frac{C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

7. 设有 n 个房间，分给 n 个不同的人，每人都以 $\dfrac{1}{n}$ 的概率进入每一间房间，而且每间房里的人数无限制. 试求"不出现空房"的概率及"恰恰出现一间空房"的概率.

解：设 $A=\{$不出现空房$\}$：$\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}$；

设 $B=\{$恰出现一间空房$\}$：$\dfrac{C_n^1C_n^2(n-1)!}{n^n}$.

8. 一个人要开他的房间的门，他共有 n 把钥匙，其中仅有一把是能开门的，若他随意地选取钥匙去开门，问在第 r 次才开成功的概率是多少？若他逐个地取钥匙（用后不放回）来试开，这个试开的手续可能需要 $1,2,\cdots,n$ 次，试证明这 n 个结果的每一个概率均为 $\frac{1}{n}$.

解：在第 r 次开成功的概率：$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-r}$.

逐个地取钥匙（用后不放回）试开，此问题相当于将 n 个分别编号为 $1,2,\cdots,n$ 的球置于编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个盒子中时，编号为 r 的球恰置于编号为 r 的盒子中，故 $P=\frac{1}{n}$.

9. 从 5 双不同鞋子中任意取 4 只，4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率是多少？

解：随机试验为从 10 只鞋子中任取 4 只，故 Ω 共有 C_{10}^4 个样本点.

设 $A=\{$至少有 2 只配成一双$\}$，

$A_1=\{$恰有 2 只配成一双$\}$，$A_2=\{$恰有 4 只配成一双$\}$，

$A=A_1\cup A_2$，且 $A_1A_2=\varnothing$，于是

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2).$$

A_2 共有 C_5^2 个样本点，A_1 共有 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$ 个样本点，

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_5^2+C_5^1(C_8^2-C_4^1)}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

10. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中，问杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率各为多少？

解：Ω 共有 4^3 个样本点.

记 $A=\{$杯子中球的最大个数为 1$\}$ 共有 $4\times3\times2$ 个样本点；

$B=\{$杯子中球的最大个数为 2$\}$；

$C=\{$杯子中球的最大个数为 3$\}$ 共有 4 个样本点.

显然 A,B,C 互不相容，$A\cup B\cup C=\Omega$.

$$P(A)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8},P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16},P(B)=1-P(A)-P(C)=\frac{9}{16}.$$

11. 从一副扑克牌（共 52 张）中一张一张地取牌，求在第 r 次取牌时第一次取出 A 牌的概率和第二次取出 A 牌的概率.

解：随机试验为从 52 张牌中依次取出 r 张排成一列，故 Ω 中共有 A_{52}^r 个样本点.

设 $A=\{$第 r 次取牌时首次取到 A$\}$，即前 $r-1$ 次取牌是从除去 4 个 A 的 48 张牌中取的. 而第 r 次取的 A 是从 4 个 A 中任取的一张. 故 A 中样本点的个数为 $A_{48}^{r-1}C_4^1$.

于是　$$P(A)=\frac{A_{48}^{r-1}C_4^1}{A_{52}^r}.$$

设 $B=\{$第 r 次取牌时第二次取得 A$\}$，即前 $r-1$ 次取牌中有 $r-2$ 次是从除 4 个 A 的 48 张牌中取的，而在前 $r-1$ 次取牌中总有一次是从 4 个 A 中取的，第 r 次是从剩下的 3 个 A 中取的，故 B 中个数有 $A_{48}^{r-2}C_{r-1}^{1}C_4^1C_3^1$，于是

$$P(B)=\frac{A_{48}^{r-2}C_{r-1}^{1}C_4^1C_3^1}{A_{52}^{r}}.$$

12. 一盒子中有 4 只次品晶体管，6 只正品晶体管，随机地逐个抽取测试，直到 4 只次品管子都找到为止，求第 4 只次品管子在第 5 次测试发现和在第 10 次测试发现的概率.

解：随机试验为把已经编号的 10 只晶体管任取 5 只排成一列，Ω 中共有 A_{10}^5 个样本点.

设 $A=\{$第 4 只次品晶体管在第 5 次测试中发现$\}$，即 3 只次品晶体管在前 4 次测试中发现，而第 5 次测试中是次品.

于是 A 共有 $4C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1$ 个样本点，则

$$P(A)=\frac{4C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{2}{105}.$$

随机试验为把已经编号的 10 只晶体管全取出排成一列，故 Ω 中共有 A_{10}^{10} 个样本点.

设 $B=\{$第 4 只次品晶体管在第 10 次测试中发现$\}$，即在“前 9 次中发现 3 只次品和 6 只正品”，共有 C_9^3 种情况，每一种情况都有 $C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1$ 种可能，故

$$P(B)=\frac{C_9^3\times6!\ \times4!}{10!}=\frac{2}{5}.$$

13. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶. 在搬运中所有标签都脱落，交货人随意将这些标签重新贴上. 问一个订货 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，按所定的颜色如数得到订货的概率是多少？

解：按所定的颜色如数得到订货的概率：$\dfrac{A_{10}^4A_4^3A_3^2A_8^8}{A_{17}^{17}}=\dfrac{1}{24\ 310}$.

14. 4 名女同学和 3 名男同学决定用抽签的方法分配 4 张电影票，问分到电影票的是 2 名女同学和 2 名男同学的概率是多少？

解：4 女 3 男中随机选出 4 个，Ω 中共有 C_7^4 个样本点.

设 $A=\{$选出的 4 个人中分别为 2 女 2 男$\}$，A 中有 $C_4^2C_3^2$ 个样本点. 故

$$P(A)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}.$$

15. 10 个人中有一对夫妇，他们随意地坐在一张圆桌周围，问这对夫妇正好坐在一起的概率是多少？

解：这是一个环形排列的问题，随机试验为 10 个人围成一圈，故 Ω 中共有 9! 个

样本点.

设$A=\{$一对夫妇坐在相邻的位置$\}$.可以把夫妇二人视为一组,与其他8人共9个元素做环形排列共8!种可能,夫妇二人交换位置有两种可能,故A共有$2\cdot 8!$个样本点,则

$$P(A)=\frac{2\times 8!}{9!}=\frac{2}{9}.$$

16. 在整数0~9中任取4个数,能构成一个4位偶数的概率是多少?

解:Ω中共有A_{10}^4个样本点.设$A=\{$构成4位偶数$\}$,可先从0,2,4,6,8中任取一个作为个位数,再从余下的9个数中取3个作为前3位数,这共有$C_5^1A_9^3$种可能,但要去掉0作为千位数的情形.即个位数从2,4,6,8中任取1个,而0是千位数,其余两位从剩下8个数中任选2个的情形,共$C_4^1A_8^2$种可能,故A共有$C_5^1A_9^3-C_4^1A_8^2$个样本点.

$$P(A)=(C_5^1A_9^3-C_4^1A_8^2)/A_{10}^4.$$

17. 某公共汽车线路共有15个停车站,从始发站开车时共有10名乘客,假设这10名乘客在各站下车的概率相同(始发站除外),试求下列事件的概率:

(1) $A=\{$10人各在不同站下车$\}$;

(2) $B=\{$10人在同一站下车$\}$;

(3) $C=\{$10人都在第3站下车$\}$;

(4) $D=\{$10人中恰有3人在终点站下车$\}$.

解:Ω共14^{10}个样本点.

(1)设$A=\{$10人各在不同站下车$\}$,$P(A)=\dfrac{A_{14}^{10}}{14^{10}}$;

(2)设$B=\{$10人在同一站下车$\}$,$P(B)=\dfrac{C_{14}^1}{14^{10}}$;

(3)设$C=\{$10人都在第3站下车$\}$,$P(C)=\dfrac{1}{14^{10}}$;

(4)设$D=\{$10人恰有3个在终点站下车$\}$,$P(D)=\dfrac{C_{10}^3\cdot 13^7}{14^{10}}$.

18. 甲、乙是位于某省的两个城市,考察这两个城市六月份下雨的情况,以A,B分别表示甲、乙两城市出现雨天这一事件,根据以往的气象记录知$P(A)=P(B)=0.4$,$P(AB)=0.28$,求$P(A|B)$,$P(B|A)$及$P(A\cup B)$.

解:$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.28}{0.4}=0.7$;

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.28}{0.4}=0.7;$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.4-0.28=0.52.$$

19. 为了寻找一本专著,一个学生决定到3个图书馆去试一试.每一图书馆有这

本书的概率为 50%，如果有这本书，则已借出的概率为 50%，若已知各图书馆藏书是相互独立的，求这个学生能借到这本书的概率.

解：设 $A=\{$这个学生能借到这本书$\}$；

$A_1=\{$这个学生能在第 1 个图书馆借到这本书$\}$，$P(A_1)=50\%\times50\%=\dfrac{1}{4}$；

$A_2=\{$这个学生可在第 2 个图书馆借到这本书$\}$；

$A_3=\{$这个学生可在第 3 个图书馆借到这本书$\}$，则因为 A_1,A_2,A_3 独立，故

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=\frac{1}{16},$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{64}.$$

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3,P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{64},\end{aligned}$$

即
$$P(A)=\frac{37}{64}.$$

20. 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取 2 次，每次随机地取 1 只，作不放回抽样，求下列事件的概率：

(1) 2 只都是正品；

(2) 2 只都是次品；

(3) 1 只是正品，1 只是次品；

(4) 第二次取出的是次品.

解：随机试验为从 10 只晶体管中任取 2 只，Ω 共 C_{10}^2 个样本点.

(1) $A=\{$2 只都是正品$\}$，共 C_8^2 个样本点，$P(A)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$；

(2) $B=\{$2 只都是次品$\}$，共 C_2^2 个样本点，$P(B)=\dfrac{C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$；

(3) $C=\{$1 只是正品，1 只是次品$\}$，共 $C_8^1C_2^1$ 个样本点，$P(C)=\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$；

(4) $D=\{$第二次取出的是次品$\}$，共$\dfrac{C_2^1C_9^1}{2}$个样本点，$P(D)=\dfrac{C_2^1C_9^1/2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{5}$.

21. 袋中有 9 个白球及 1 个红球，10 个人依次从袋中各取 1 球，取后不放回，问第 $k(k=1,2,3,\cdots,10)$ 个人取得红球的概率是多少？又若袋中原有 8 个白球，2 个红球，10 个人依次从袋中各取 1 球，取后不放回，问这种情况下第 k 个人取得红球的概