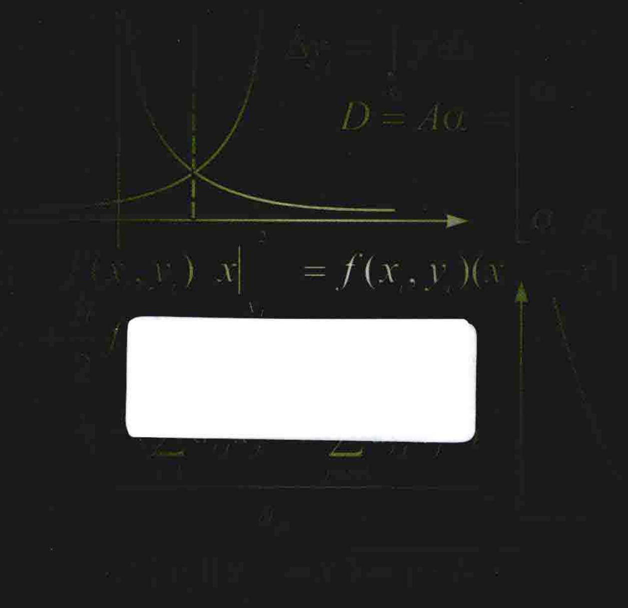
21世纪高职高专规划教材
公 共 基 础 课 程 系 列

主审 李

应用数学（第二册）

YING YONG SHU XUE

主 编 傅建军
副主编 宿 昱



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专教育规划教材
公共基础课程系列

应用数学

（第二册）

Ying Yong Shu Xue

主　编　傅建军
副主编　宿　昱
主　审　李　岩
编　者　文秋丽　王志英

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本册内容主要为实用积分学和工程数学，包括函数的不定积分、定积分及其应用，还包括概率与统计初步、线性规划初步。

本教材从能力为本位，突出应用，增强弹性，适度更新。适合高等职业院校各专业学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学. 第2册/傅建军主编. —上海：上海交通大学出版社，2013

ISBN 978-7-313-09234-2

Ⅰ. 应... Ⅱ. 傅... Ⅲ. 应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第284368号

应 用 数 学

（第二册）

傅建军 **主编**

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路951号 邮政编码200030）

电话：64071208 出版人：韩建民

上海颛辉印刷厂 印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16 印张：15.25 字数：286千字

2013年1月第1版 2013年1月第1次印刷

印数：1～3030

ISBN 978-7-313-09234-2/O 定价：32.00元

告读者：如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话：021-57602918

前　言

为适应现代化科技和经济建设发展对高素质劳动者及中高级专门人才的需求，深化高等职业教育改革，加强数学课程建设，落实高等院校培养高素质技能型人才的需要，更好地贯彻教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》，我们组织编写了供高等职业院校各类专业使用的《应用数学》试用教材.

本套教材共分两册出版，各册内容是：

第一册为第一模块（实用微分学），包括复合函数、初等函数、函数的极限与连续性、函数的导数与微分、导数的应用，全册共4章.

第二册为第二模块（实用积分学），包括函数的不定积分、定积分及其应用. 第三模块（工程数学），包括概率与统计初步、线性规划初步，全册共5章.

本套教材贯彻以素质教育为基础，以能力为本位的指导思想，按照“加强基础，注重能力培养，突出应用，增强弹性，适度更新，兼顾体系”的原则编写. 本套教材具有以下特点：

(1) 根据培养目标的需要和学生实际，精选在现代社会生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证与高中知识的衔接.

(2) 教材采用模块式结构组合编排，便于各类学校根据不同专业、不同要求和学生的实际学习水平灵活选择内容，使教材具有一定的弹性和适用性，较好地体现高等职业教育的特色.

(3) 突出应用，注重应用意识和能力的培养，从实际问题抽象出数学概念再应用相关知识解决简单的实际问题，采取分散与集中相结合的形式编排了有应用价值的例题、练习题和习题册，使应用意识和能力的培养贯穿教学的主要过程.

(4) 内容编排贯彻深入浅出的原则，重视运用数形结合方法，突出图形的直观教学，例题、练习、习题主要用于理解掌握基础知识和基本技能，使教材易教易学.

(5) 教材适度增加了小栏目，知识回顾、知识链接、数学故事等环节，使得教材生动、活泼，便于增加学生学习的灵感.

本套教材的课时分布是：第一册教材约64课时，第二册教材约72课时.

本套教材配有习题册与教材同步发行，教材中各节配有练习题，供学生课上练习使用，各章配有复习题用于复习和巩固本章的知识. 习题册供课上或课外作业使用.

本书在编写过程中得到了教育主管部门、上海交通大学出版社的热情关心与

指导,得到了其他高职院校的大力支持,在此谨表衷心的感谢.

由于编写时间仓促和编写水平有限,对教材中不妥之处,诚恳地希望从事职业教育的教师批评指正.

编　者

2012 年 10 月

目　录

第五章　不定积分

我们已经研究了由已知函数求导数或微分的问题.但是在现代科学技术的运用中,需要研究相反的问题,就是由已知导数或微分求原来的函数.这种由函数的已知导数(或微分)去求原来的函数问题,是积分学的基本问题之一,本章要研究这个问题.

§5-1　不定积分的概念

一、原函数

先看例题:

【例 1】　如果已知物体的运动方程为 $s=f(t)$,则此物体的速度是距离 s 对时间 t 的导数.反过来,如果已知物体运动的速度 v 是时间 t 的函数 $v=f(t)$,求物体的运动方程 $s=f(t)$,使它的导数 $f'(t)$ 等于已知函数 $v(t)$.这就是求导数运算的逆运算问题.

定义　如果函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 定义在同一区间 (a,b) 内,并且处处有 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$,则 $F(x)$ 就叫做 $f(x)$ 的一个原函数.

【例 2】　在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内,已知函数 $f(x)=2x$,由于函数 $F(x)=x^2$ 满足 $F'(x)=(x^2)'=2x$,所以 $F(x)=x^2$ 是 $f(x)=2x$ 的一个原函数.同理,x^2+10,$x^2-\sqrt{5}$ 都是 $2x$ 的原函数.

下面,直接写出一些函数的原函数:

函数	原函数
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\mathbf{x}^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

二、不定积分

由幂函数的导数,可得

$(x^2)' = 2x$;

$(x^2+1)' = 2x$;

$(x^2-\sqrt{5})' = 2x$;

……

$(x^2+c)' = 2x$. 式中 c 为任意常数.

由此可见,$2x$ 的原函数有无穷多个,它们都具有 x^2+c 的形式.

除了 x^2+c 以外,$2x$ 还有没有其他原函数呢?容易想到,x^2+c 就是 $2x$ 的所有的原函数.

定理 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数($a<x<b$),则①$F(x)+C$ 仍是 $f(x)$ 的原函数(C 是任意常数),②$F(x)+C$ 包括了 $f(x)$ 所有的原函数.

证明 ① 因为 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$,所以 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数. ② 设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数,则 $G'(x) = f(x)$,又因为 $F'(x) = f(x)$,所以 $[G(x)-F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0$. 所以 $G(x)-F(x) = C$,即 $G(x) = F(x)+C$(C 为任意常数). 这就是说,$F(x)+C$ 包括了 $f(x)$ 的原有的原函数.

定义 函数 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的不定积分,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

其中,$\int$ 称积分号,x 称积分变量,$f(x)$ 称被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称被积表达式.

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的全体原函数,因而有 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$. 式中 C 是一个任意常数,称为积分常数.

【例 3】 求 $\int \cos x\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\sin x)' = \cos x$,所以 $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

【例 4】 求 $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,所以 $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x. = \arctan x + C$.

通常我们把求不定积分的运算叫做积分法.

从不定积分的概念可以知道,“求不定积分”和“求导数(求微分)”互为逆运算,即有

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$$

反过来，则有

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ 或} \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

这就是说，若先积分后微分，则两者的作用相互抵消；反之，若先微分后积分，则抵消后再加上一个任意常数.

三、不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分为 $F(x)+C$. 对于 C 的每一个确定的值 C_0，就确定 $f(x)$ 的一个原函数，在几何上就确定一条曲线 $y=F(x)+C_0$. 这条曲线叫做函数 $f(x)$ 的一条积分曲线. 因此 C 可以任意取值，所以原函数有无穷多个，积分曲线也就有无穷多条，所有这些积分曲线构成一个曲线族(如图 5-1-1). 由 $(F(x)+C)'=f(x)$. 可知，在积分曲线族上横坐标相同的点处作切线，这些切线是相互平行的.

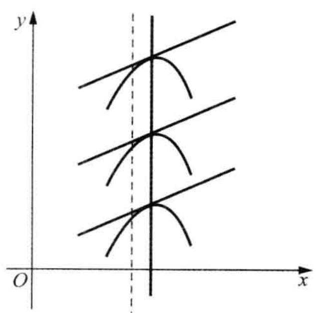


图 5-1-1

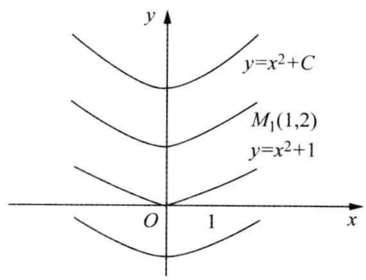


图 5-1-2

四、由初始条件决定积分常数

我们知道，不定积分是被积函数的全部原函数，所以在不定积分的结果中，总含有一个任意常数. 但在实际应用上，常常可以根据给出的条件来决定这个常数，于是就得到满足这个条件的一个原函数，这个给出的条件称为初始条件. 现在举例说明.

【例 5】 设曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的斜率为 $k=2x$，又知曲线经过点 $M_1(1,2)$，求曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y=F(x)$. 依题意，曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的

切线的斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$，

即 $F(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，因为$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$，

所以 $y = x^2 + C$.

对于不同的 C 值，有不同的曲线对应. 因为所求曲线通过点 $M_1(1,2)$，所以

$$2 = 1 + C, C = 1.$$

于是所求曲线为 $$y = x^2 + 1.$$

练习 5-1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int 3\mathrm{d}x$； (2) $\int 3x^2\mathrm{d}x$； (3) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int \sin x\mathrm{d}x$； (5) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int x^4\mathrm{d}x$； (8) $\int \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 已知某曲线上任意一点切线的斜率等于 x，且曲线通过点 $M(0,1)$，求曲线方程.

3. 设物体的运动速度为 $V = \cos t$(米 / 秒)，当 $t = \frac{\pi}{2}$ 秒时，物体所经过的路程 $s = 10$ 米，求物体的运动规律.

§ 5-2 基本积分表和积分法则

一、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算，那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式. 下面把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫做基本积分公式表.

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$($k$ 是常数)；

(2) $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$；

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$；

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$；

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$；

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$；

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$；

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$；

(10) $\int e^x dx = e^x + C$；

(11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

> 对于这个公式作出如下的说明：
> 当 $x>0$ 时，有 $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$；
> 当 $x<0$ 时，因为
> $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$，
> 所以有 $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$.
> 因此，无论 $x>0$ 或 $x<0$
> 有公式 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.
> 为了简便起见，在公式中省略了绝对值记号，而把它书写成
> $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$.

以上 11 个基本积分公式，是求不定积分的基础，必须熟记. 下面举几个应用幂函数的积分公式(2) 的例题.

【例 1】 求 $\int \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

【例 2】 求 $\int x^2\sqrt{x}dx$.

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$.

【例 3】 求 $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

解 $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$.

注意：被积函数是用分式或根式表示的幂函数，应该先化为 x^α 的形式，然后应用幂函数的积分公式来求不定积分.

二、积分的基本运算法则

法则 1 函数的代数和的不定积分等于各个函数的不定积分的代数和. 即

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

证　由于 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\pm\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)\pm g(x)$.

即 $\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)\pm g(x)$ 的原函数,由此可见法则 1 成立.

上述法则对于有限个函数的代数和也是成立的.

用类似的方法,可以证明积分的第二个法则.

法则 2　被积式的常数因子可以提到积分号的前面,即若 $k\neq 0$ 的常数,则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

利用基本积分表以及不定积分的两个运算法则,可以求一些简单函数的不定积分.

【例 4】　求 $\int\sqrt{x}(x^2-6)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}(x^2-6)\mathrm{d}x&=\int(x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int 6x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-6\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-6\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

注意:在各项积分后,每个不定积分的结果都含有任意常数.但是因为任意常数的和仍然是任意常数,所以只要写出一个任意常数就可以了.

【例 5】　求 $\int\frac{x^4-3x^2+2x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-3x^2+2x}{x^2}\mathrm{d}x&=\int\left(x^2-3+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int x^2\mathrm{d}x-3\int\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\frac{1}{3}x^3-3x+2\ln x+C.\end{aligned}$$

【例 6】　求 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\arctan x+\ln x+C.$$

【例 7】 求$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.$$

【例 8】 求$\int\left(\cos x-a^x+\frac{1}{\cos^2x}\right)\mathrm{d}x$.

解 $$\int\left(\cos x-a^x+\frac{1}{\cos^2x}\right)\mathrm{d}x=\sin x-\frac{a^x}{\ln a}+\tan x+C.$$

【例 9】 求$\int\tan^2x\mathrm{d}x$.

> **知识回顾：**
> 三角函数的平方关系
> $\tan^2x+1=\sec^2x$

解 $$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x-x+C.$$

【例 10】 求$\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$.

> **知识回顾：**
> 二倍角公式
> $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$

解 $$\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\sin x-\cos x+C.$$

【例 11】 求$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$.

> **知识回顾：**
> 三角函数的平方关系
> $\sin^2x+\cos^2x=1$

解 $$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x-\cot x+C.$$

【例 12】 设一动点以匀加速度作直线运动，其初速度为 v_0，出发时的位置为

s_0,求动点的运动方程.

解 设加速度为a(常数),即$\frac{dv}{dt}=a$,积分一次,得$v=\int a\,dt=at+C_1$,即 $v=at+C_1$.

> **导数的物理意义:**
> $v=\frac{ds}{dt},a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$.

将 $C_1=v_0$ 代入得 $v=at+v_0$.

又因为 $\frac{ds}{dt}=v=at+v_0$,所以再积分一次,得 $s=\int(at+v_0)dt$.

即 $s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_2$.

因为出发时的位置为 s_0,即当 $t=0$ 时,$s=s_0$,将其代入得 $s_0=0+0+C_2$.

所以 $C_2=s_0$.

将 $C_2=s_0$. 代入,即得所求的运动方程为

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0.$$

练习 5-2

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{1}{x^3}dx$;

(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$;

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$;

(5) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$;

(6) $\int\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}dx$;

(7) $\int 5x^3dx$;

(8) $\int(x^2-3x+2)dx$;

(9) $\int\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$($g$ 为常数);

(10) $\int(x-2)^2dx$;

(11) $\int(x^2+1)^2dx$;

(12) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$;

(13) $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

(14) $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

(15) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$;

(16) $\int\left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$;

(17) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

(18) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;

(19) $\int 3^x e^x \mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} \mathrm{d}x$;

(21) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$;　　(22) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$;

(23) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$;　　(24) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} \mathrm{d}x$.

2. 已知某曲线经过点(1，-5)，并且知道曲线上每一点处切线的斜率 $k = 1 - x$，求曲线的方程.

3. 一物体由静止开始运动，经过 $t(s)$ 后的速度是 $3t^2$(m/s). 问：

(1) 在 3s 后物体离开出发点的距离是多少？

(2) 物体走完 360m 需要多少时间？

4. 一物体的加速度 $a = t^2 + 1\mathrm{m/s^2}$，当 $t = 0$ 时，速度 $v = 1\mathrm{m/s}$，而路程 $s = 0$，试求这个物体的运动方程.

5. 已知某函数的二阶导数 $y'' = \sin x$，又知道当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$y' = 0$，$y = 1$，求此函数.

§5-3　换元积分法

上一节所举的例子都是直接或通过代数、三角变换后利用基本积分公式和积分法则求出不定积分的. 通常把这种求不定积分的方法叫做直接积分法. 但是它所能计算的不定积分是非常有限的，例如 $\int 2\cos 2x \mathrm{d}x$，$\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$ 等，用直接积分法就求不出来了.

本节将介绍换元法.

一、第一换元积分法

先看下面例子：

【例 1】　求 $\int 2\cos 2x \mathrm{d}x$.

解　$\int 2\cos 2x \mathrm{d}x = \int \cos 2x \cdot 2\mathrm{d}x = \int \cos 2x \mathrm{d}(2x)$

$\underline{\underline{u = 2x}} \int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C$.

$\underline{\underline{u = 2x}} \sin 2x + C$.

【例 2】　求 $\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\mathrm{d}(\sin x)$

$$\underline{\underline{u=\sin x}}\int u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C\ \underline{\underline{\text{回代}\,u=\sin x}}\ \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

从上面例子中可以看到,求某些不定积分的关键是设法将被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 凑成 $g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式,即$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$,再进行变量替换 $u=\varphi(x)$,于是$\int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int g(u)\mathrm{d}u$. 对 $g(u)$ 进行积分,得$\int g(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$,用 $u=\varphi(x)$ 将变量 u 换回原来的变量 x,那么所求的不定积分就是$\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C$. 这种求不定积分的方法叫做第一换元积分法.

定积分的第一换元积分法:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\ \underline{\underline{u=\varphi(x)}}\int g(u)\mathrm{d}u = F(u)+C\ \underline{\underline{\text{回代}\,u=\varphi(x)}}\ F[\varphi(x)]+C.$$

【例 3】 求$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

> 积分公式:
> $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

解 令 $u=x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.

$$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^u\mathrm{d}u = e^u + C\ \underline{\underline{u=x^2}}\ e^{x^2}+C.$$

对变量代换掌握之后,就可以不写出中间变量 u.

【例 4】 求$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

> 积分公式:
> $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + C$

解 $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}(1-x^2)$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

【例 5】 求$\int \tan x\mathrm{d}x$.

> 积分公式:
> $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

解 $\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x = -\ln\cos x + C.$$

【例 6】 求$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

> 积分公式:
> $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$