普通高等院校素质教育与能力培养规划教材

上海市级特色专业建设项目成果之一

总主编　李占国

线性代数及应用

主　编　刘三明

副主编　李　瑞

南京大学出版社

普通高等院校素质教育与能力培养规划教材
上海市级特色专业建设项目成果之一

总主编　李占国

线性代数及应用

主　编　刘三明
副主编　李　瑞

南京大学出版社

内容简介

本书是上海市特色专业建设项目专业建设教改成果之一，是结合我们多年教学实践、改革的经验编写而成.

本书的主要内容有：矩阵；行列式；线性方程组；向量空间；特征值和特征向量，矩阵的对角化；二次型及应用问题.

本教材以矩阵为主线，突出矩阵的运算、化简矩阵的秩和特征值的计算，突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型，强化线性代数知识的应用；本教材将数学、应用和计算机相结合；本教材对于抽象的理论，总是从具体问题入手，再将其推广到一般情形，而略去了许多繁琐、冗长的理论推导，便于学生理解和接受.

本书适合作为大学本科非数学类专业线性代数课程的教材，或教学参考书，也可作为需要线性代数知识的科技工作者、工程技术人员、大专院校师生及其他读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用 / 刘三明主编. -- 南京 : 南京大学出版社，2012.8

普通高等院校素质教育与能力培养规划教材

ISBN 978-7-305-10386-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 183053 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　　编　210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　普通高等院校素质教育与能力培养规划教材
书　　名　线性代数及应用
总 主 编　李占国
主　　编　刘三明
副 主 编　李　瑞
责任编辑　王抗战　耿士祥　　　　编辑热线　025-83686722

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　宜兴市盛世文化印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张 16.25　字数 291 千
版　　次　2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-305-10386-5
定　　价　39.00 元

发行热线　025-83594756　83686452
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com(市场部)

总　序

教育，关系着每一个人的生存与发展，是民族振兴的基石，是创新进步的源泉。为了收获未来，学习是目的，教育是手段。

在以知识竞争和创新驱动发展为主要特征的后工业社会的国际经济社会环境下，在我国全面建设小康社会和创新型国家并从人力资源大国向人力资源强国迈进之迹，人民群众对精神文化需求更加迫切，对教育质量的要求更高，教育诉求更趋多元和多样。对个人的期望以“专业融合与复合交叉、团队工作与人际关系、自我管理与个人承担、创新设计与甘冒风险、头脑风暴与谈判辩论、沟通说服与人际网络、道德诱惑与操守难关、在职按需与终身学习”为主要特征。面对我国本科高等教育的“大众化”甚至“普及化，为了每一个学生的终身发展，让学生更具创新精神和实践能力，扩大通用化，延迟专门化，成为本科高等教育的主流意识和社会共识。培养具有学习能力、研发能力、创新思维、团队精神、交流沟通、道德素养为基本素质的并需要动脑、设计、自主、决策的“知识性工人”，成为本科高等教育的目标。强化基础课程教学、优化通识教育、增强学生人文精神和科学素养、加强实践教学环节、促进教学科研结合、增加创新实践活动，成为新的人才培养模式。

基于以上背景，我们对人才培养方案进行了修订，制定了体现“科学精神、人文素养、复合型、应用型、国际化、兼顾就业、行业特点、专门人才”等关键词的财务管理专业人才培养方案。在培养目标（以培养学生的学习能力并强化其综合素质为目的）、优化课程体系（以调动全校资源为手段并注重跨学科专业课程整合）、课程建设（以重点实务并强化案例教学为主要内容）、革新授课方式（以理论与实践的有机结合并最大限度地接近实际运用为要求）等方面，进行了探索与实践并取得了丰硕的研究成果。由此，我们在 2009 年成功申报了上海市级特色专业——财务管理（集团公司金融服务）和上海市级教学团队——集团公司财务管理。

为固化研究成果，我们组织有关院系的教授、专家和工程技术人员编写了这

套“应用型本科管理类专业系列特色教材”。主要包括:为加强人文素养教育和交流沟通能力培养的《大学人文教育导读》、《人际交往与成功》,为加强专业学习对企业管理的针对性和有效性,结合生产工艺流程进行技术经济活动分析能力培养的《应用机械基础知识》、《应用电工电子基础知识》、《制造工程与管理》,针对专业课程学习和实际应用的《线性代数及应用》等十多本理论与实务结合的教材。为加强专业实践能力培养和跨文化交流还将编写配合理论课程教学的系列中文实验教材和英文实验教材。

本系列特色教材分别适用于高等院校管理类专业、经济类专业、外语类专业本科生为加强通识教育和复合应用能力培养的需要,部分教材亦可满足工科类专业学生为加强人文素养教育之需。

作为上海市级特色专业和教学团队负责人及本系列教材的总主编,首先,要感谢我的团队成员及他们的部门领导和家人,是他们孜孜不倦的潜心研究、淡泊名利的无私奉献及大力支持和帮助,才有如此成果;其次,要感谢每本书的作者,他们在教学科研工作繁忙的情况下,对编写大纲和体例反复讨论和修改,并吸收了国内外相关学科专业同行专家的最新研究成果,力争反映本学科专业的前沿知识,以达到满意的效果;最后,要特别感谢南京大学出版社的领导和编辑,提供了一个展示我校特色专业建设成果的机会和平台。

尽管我们做出了很大的努力,但由于水平所限,仍感到书中存在疏漏及不尽如人意之处,对教学内容如何以实务为重点并实现理论与实践的有机结合有待深入探讨,恳请广大读者提出批评意见和建议,以促进我们不断改进和提高质量。

李占国

2011 年 10 月

前　　言

《线性代数》是高等院校理工科以及经济管理类学生的必修基础课.由于它覆盖面广、应用广泛,对于学生的数学素质的培养有较大影响而受到越来越广泛的重视,线性代数内容一直是全国硕士研究生入学数学考试的基本内容之一(近年分值比例还在增高).

线性代数的主要内容就是研究多元的一次方程组与一次函数组. 既然线性代数研究的是最简单的方程和函数,算法又比微积分少得多,按道理应当容易学,但事实并非如此. 对线性代数课程,一个接一个从天而降的抽象定义,使初学者难以理解. 比如:行列式为什么要这么定义? 矩阵为什么要这么相乘? 线性相关、线性无关、最大线性无关组是什么意思,有什么用处? 这些问题都让学生迷惑不解,普遍感到内容抽象、计算复杂,加上非数学专业的线性代数课程的学时数偏少,学习这门课程就更加吃力,而学习后又不知道如何应用.

针对上述情况,如何实施这样一门抽象但又具有相当应用性的课程教学显得尤为重要,而教材的精心设计将有利于该课程在学时短的客观条件下教师的教学和学生的学习.

本教材的编写,借鉴和吸收了国内外同类型优秀教材的长处,结合编者多年的教学经验,在内容组织上,依据教育部数学课程委员会对线性代数课程提出的基本要求,并结合我校"技术立校、应用为本"的办学指导方针,按照创新人才培养模式的理念,本着加强基础,注重应用的原则编写而成. 覆盖了矩阵、行列式、向量的线性相关性、线性方程组、特征值和特征向量、二次型等内容. 考虑到很多非数学类专业的线性代数课程课时比较少,我们将推理和证明写得比较简略,尽量通过具体例子来体现普遍规律. 有些结论和算法的证明和推理难度较大,我们就将它们写成附录,仅供教师或一部分感兴趣的学生参考,不作为课程学习内容,学生知道结论、会算会用就行了,暂时不必知其所以然.

本书的主要特点如下:

1. 以经济中著名的"投入产出"模型的引入与建立为切入点,导出矩阵这一现代数学中的重要概念,并且以矩阵为主线,统领整个教材.

2. 用递归的方法定义了 n 阶行列式,这比用逆序方法定义行列式更便于学生理解和掌握.

3. 引入概念时都强调其实际背景:不是从定义出发而从问题出发引入概念,引导学生在

尝试解决这些问题的过程中将所要讲授的知识重新“发明”出来.

4. 将启发式、互动式引进教材,给学生营造一个互动式读书的氛围与环境. 譬如,书中通过边栏用“考考你”提出问题,激发学生去思考,帮助学生领会所学内容的实质,使学生不仅知道是什么,还应理解为什么.

5. 该书十分重视基本概念和基本理论的学习与理解. 对概念和定理中容易发生理解错误的地方,通过边栏用“特别提示”的方式画龙点睛地“点”出来. 另外,该书在相关部分通过边栏用“历史点滴”的方式配以相关的历史背景,这有助于学生从数学概念的来龙去脉中加深对数学概念的理解,增强学习数学的兴趣.

6. 各章都有使用软件工具MATLAB的习题. 线性代数的算法只对行数和列数很少的矩阵才能用手算实现,四阶及四阶以上的系统用手解是不现实的,仅求解四阶系统就要作几十次乘法和加法. 而在实际工作中,经常需要处理几十、几百甚至更多行和列的矩阵,难以用手工实现算法,必须求助于计算机及其软件. MATLAB软件工具的引入,任何高阶问题都可能在几分钟内解出,可以省去大量的繁琐计算,使得理论联系实际得以实现.

7. 每一章最后一节都引入了线性代数的应用实例,并配有相应的练习,目的是让同学们了解线性代数在实际中的应用,提高学习兴趣,培养同学们应用线性代数知识解决实际问题的能力.

本教材由刘三明教授主编,上海金融学院李瑞老师任副主编. 第1章、第2章、第4章由刘三明、程松林编写,第3章由李瑞、靳鲲鹏编写,第5章由鞠银、欧阳庚旭编写,第6章由赵国栋编写. 全书由刘三明统稿,由大连理工大学博士生导师冯恩民教授主审.

上海电机学院数学系的领导及教师朱泰英教授、戚民驹老师、王美珍老师、武文佳老师认真地阅读了本书的书稿,提出了许多宝贵的修改意见,为本书增色添彩. 笔者向他们致以最真诚的谢意!

在本书的编写出版过过程中,上海市特色专业——财务管理负责人李占国教授、上海电机学院数学系的领导及全体教师给予了很多帮助和支持,在此表示衷心的感谢!

感谢上海电机学院的领导为笔者创造了一个良好的环境,使笔者全神贯注地投入到边教书、边总结之中,从而完成了本书.

如果你能告知本书中的错误,哪怕是很小的错误,我们都会十分感谢. 欢迎为本书的改进提出建议,哪怕是细微的改进. 请随时和我们联系.

祝你教学愉快!

编　者

2012. 5

目　　录

第一章　矩　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象. 它是研究社会及自然现象中各种线性问题的重要数学工具. 矩阵是数量关系的一种表现形式,它将一个有序数表作为一个整体研究,使问题变得简洁明了. 矩阵有着广泛的应用,是研究线性方程组和线性变换的有力工具,也是研究离散问题的基本手段.

在本章中,我们首先引入矩阵的概念,然后讨论在实际中常用到的关于矩阵的运算、求逆、秩及分块法的有关知识,为解一般的线性方程组及其他应用作准备.

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的概念

矩阵作为一种常用的数学工具,能够简洁地贮存信息,通过矩阵运算,可以方便地处理信息,下面通过实际例子引入矩阵的概念.

例 1　某超市公司的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个部门都销售甲、乙、丙、丁四种小包装食品,其某一天的销售量(单位:包)可由下表表示:

表 1.1

部门 \ 食品	食品甲	食品乙	食品丙	食品丁
Ⅰ	80	58	75	78
Ⅱ	98	70	85	84
Ⅲ	90	75	90	90
Ⅳ	88	70	82	80

如果我们每一天都做这样的统计,就没必要像上表那样繁琐,只要

把表中的 4×4 个数排成一个数表

$$\begin{bmatrix} 80 & 58 & 75 & 78 \\ 98 & 70 & 85 & 84 \\ 90 & 75 & 90 & 90 \\ 88 & 70 & 82 & 80 \end{bmatrix}$$

这个数表具体描述了这家超市公司的四个部门一天销售各种食品的销售量.

实际上,在我们生命活动中的许多方面,都可以用数表来表达一些量以及量与量之间的关系.这类数表,我们统称为矩阵.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 (**row**) n 列 (**column**) 的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

历史点滴:

"矩阵"的英文(matrix)来自拉丁文的"母亲"(mater).

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵(**matrix**).为表示它是一个整体,总是加一个括弧,并用大写黑体字母表示它,记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素(**element/entry**),a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素.一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \text{或} \boldsymbol{A}=(a_{ij}).$$

历史点滴:

"矩阵"一词由英国数学家西尔维斯特(J. Sylvester(1814—1897))约于 1850 年首先使用. 1855 年英国数学家 A. Cayley (1821—1895)创立矩阵的记号(括弧),并于 1885 年发表了《矩阵论的研究报告》.在该文中他定义了矩阵的基本运算,并获得矩阵的"零化定理".

元素是实数的矩阵称为实矩阵(**real matrix**),元素是复数的矩阵称为复矩阵(**complex matrix**).

例 2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$,

问 a_{22} 和 b_{23} 分别是多少?

解 $a_{22}=\pi$, $b_{23}=4$.

本书中的矩阵都指实矩阵(除非有特殊说明).通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$表示矩阵.为了更清楚地表明矩阵的行、列数,有时也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 当 $m=n$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 n 阶方阵(**square matrix**),n 称为 $\boldsymbol{A}$ 的阶数.

一个数可以看成一个一阶方阵.

如果两个矩阵具有相同的行数与相同的列数,则称这两个矩阵为同型矩阵(**same-sized matrix**).

定义 2 如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且对应元素均相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2-x & 3\\ 2 & 6 & 5z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 6 & z-8\end{pmatrix},$$

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x,y,z.

解 因为 $2-x=x,2=y,5z=z-8$,所以 $x=1,y=2,z=-2$.

二、矩阵概念的应用

矩阵的应用十分广泛,许多实际问题都可以化为矩阵来研究.

矩阵的应用:

图论学——邻接矩阵/关联矩阵

气象学——转移(概率)矩阵

几何学——几何变换/曲面分类

计算数学——(线性方程组/特征值与特征向量)迭代法/最小二乘法

经济学——投入产出分析/污染与工业发展

密码学——Hill 密码的加解密理论

生物学——Leslie 模型与矩阵的特征分析

运筹学——线性规划

例 4 投入产出模型

投入产出模型是研究经济体系(部门经济、地区经济或企业经济等)各部门之间的投入与产出的相互依存关系的一种数学模型.

把国民经济分为若干个部门,任何一个部门都起着生产和消费的双重作用,而产品的分配包括留用与提供给其他部门的中间产品及供消费和贮备的最终产品,其总和为该部门的总产品的数量.

设有四个部门(如 1. 农业;2. 能源;3. 重工业;4. 轻工业)参与生产与消耗,表 1.2 就是一个简化的投入产出表的结构.

其中数 $x_{ij}(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4)$表示第 i 部门分配给第 j 部门的产品的数量,或第 j 部门消耗第 i 部门产品的数量(称为部门间的流量,即中间产品的数量);Y_i 为第 i 部门的最终产品的数量; X_i 为第 i 部门产品的总产量.

表 1.2

部门间流量(中间产品) 产出 / 投入		消耗部门				最终产品	总产品
		1	2	3	4		
生产部门	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	Y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	Y_2	X_2
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	Y_3	X_3
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	Y_4	X_4

表中的 4×4 个数 $x_{ij}(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4)$可以构成一个矩阵

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \tag{2}$$

整个投入产出表从横行看,反映了各部门产品的分配使用情况,用公式表示即

$$\text{总产品} = \text{中间产品} + \text{最终产品}$$

或

$$X_i = \sum_{j=1}^{4} x_{ij} + Y_i, i=1,2,3,4.$$

它也可以写成下面方程组的形式

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + Y_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + Y_2 \\ X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + Y_3 \\ X_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + Y_4 \end{cases} \tag{3}$$

考虑消耗系数(生产单位产品 j 所消耗的产品 i 的数量)a_{ij} 的类似问题可以得到下面的分配平衡方程组:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + Y_1 = X_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + Y_2 = X_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 + Y_3 = X_3 \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 + Y_4 = X_4 \end{cases} \tag{4}$$

或

$$\begin{cases} (a_{11}-1)X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = -Y_1 \\ a_{21}X_1 + (a_{22}-1)X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 = -Y_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + (a_{33}-1)X_3 + a_{34}X_4 = -Y_3 \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + (a_{44}-1)X_4 = -Y_4 \end{cases} \tag{4'}$$

在许多实际问题中,我们经常遇到下述一般的线性(即一次)方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{5}$$

其系数可以构成一个 m 行 n 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称为线性方程组(5)的系数矩阵，而称

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{7}$$

为线性方程组(5)的增广矩阵.

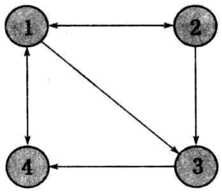
例 5 线性变换的表示

在工程技术与数学上有时要把一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 用另一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经过乘数与加减运算得到的线性式子来表示，这种关系式数学上称为从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换：

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{8}$$

其中 a_{ij} 为常数，$i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$. 这个线性变换的系数 a_{ij} 也构成了(6)式那样一个矩阵，称该矩阵为线性变换所对应的矩阵.

思考题：四个城市间的单向航线如下图所示，



历史点滴：

列昂惕夫(Wassily Leontief)：哈佛大学教授，1949 年用计算机计算出了由美国统计局的 25 万条经济数据所组成的 42 个未知数的 42 个方程的方程组，他打开了研究经济数学模型的新时代的大门. 这些模型通常都是线性的，也就是说，它们是用线性方程组来描述的，被称为列昂惕夫投入产出模型. 列昂惕夫因此获得了 1973 年的诺贝尔经济学奖.

若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线}\\ 0 & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线}\end{cases}$$

你能用矩阵描述这四个城市的航线情况吗?

三、几种特殊矩阵

1. **对角阵(diagonal matrix)** 主对角线以外的元素全为零的矩阵,即形如

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

的矩阵称为 n 阶对角矩阵,记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

注: 方阵中从左上角到右下角的直线称为**主对角线(leading/main/principal diagonal line)**.

2. **数量矩阵(scalar matrix)** 形如

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}_{n\times n}$$

的对角矩阵,称为 n 阶数量矩阵.

3. **单位矩阵(identity matrix)** 形如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

的数量矩阵,称为 n 阶单位矩阵,记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$.

4. **行矩阵(row matrix)与列矩阵(column matrix)** 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为行矩阵或行向量(**row vector**),行矩阵即 $1\times n$ 矩阵.

只有一列的矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵或列向量(**column vector**),列矩阵即 $n\times 1$ 矩阵.

5. **上三角矩阵**(**upper triangular matrix**) 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为上三角矩阵.

6. **下三角矩阵**(**lower triangular matrix**) 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为下三角矩阵.

7. **零矩阵**(**zero matrix**) 所有元素均为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

如：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

均是零矩阵. 有时，加下标指明其阶数. 例如，上述零矩阵分别可以记为:$\boldsymbol{O}_2$,$\boldsymbol{O}_{2\times 3}$,$\boldsymbol{O}_3$.

考考你:

零矩阵总是相等的吗?

第二节 矩阵的运算

一、矩阵的线性运算

1. **矩阵的加法**(**addition of matrices**)

定义 1 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$，矩阵 A 与 B 的

特别提示：

只有两个矩阵是同型矩阵时，才能进行矩阵的加法运算. 两个同型矩阵的和，即为两个矩阵对应位置元素相加得到的矩阵.

和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$

称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

由此规定矩阵的**减法(subtraction)**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

矩阵的加法满足下列运算规律($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(交换律)；

证 设 $$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \\ &=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} \\ &=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$