Gaodeng Shuxue
Tongbu Fuxi

高等理工科院校高等数学教材同步复习及考研复习用书

高等数学同步复习

南京理工大学紫金学院高等数学编写组 编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

高等数学教材同步复习及考研复习用书

高等数学同步复习

高等数学编写组　编

（南京理工大学紫金学院）

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参照了教育部制定的硕士研究生入学考试“数学考试大纲”而编写的一本现行高等数学教材同步复习指导书。本书共分十二章，每章内容由三部分组成，第一部分是“内容提要”，列出主要概念、公式，对基本概念的要素、基本性质的特征、基本方法的要点给予了较深入和详细的总结归纳；第二部分是“重点分析”，对本章的重要内容和主要定理、公式作详细解读与译疑解难；第三部分是“例题及例题解析”，本书中所选例题，类型繁多，覆盖面广，具有较强的代表性，有利于学生对书中提出的概念和方法进行练习，以期开拓学生的思路，加深对基本概念的理解和方法的掌握。在例题详解之前，增加了分析部分，指导读者如何解题，做到举一反三，触类旁通，以提高读者的分析能力和掌握解题技巧。每章末配备了一套自测题及答案，在书中的相应部位配有期中和期末试题及答案，以帮助读者检查知识点掌握情况，有利于提高应试成绩。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程的同步复习参考书，也可作为准备考研的高年级同学的起步复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步复习/《高等教学》编写组编．—徐州：中国矿业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5646-1602-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 198189 号

书　　名 高等数学同步复习
编　　者 高等数学编写组
责任编辑 潘俊成
责任校对 张海平
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 淮安淮海印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 16.5　**字数** 412 千字
版次印次 2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元

前　言

高等数学是工科院校的重要基础理论课，也是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力和空间想像力的重要课程。数学是一门系统、严谨、抽象的学科，内容多，教学进度快，致使不少刚进入大学的大学生感到学习困难。学生能否较全面、较深入地掌握它的基本内容和基本方法，将直接影响到其他后续课程的学习。正在学习高等数学课程的读者，往往希望有一本满意的、与现行《高等数学》教材同步的复习指导书，帮助深刻领会高等数学的基本概念，掌握高等数学解题的基本方法，以提高分析问题和解决问题的能力。报考硕士研究生的考生，也盼望有一本较系统、全面、综合性强的理想复习资料，帮助他们巩固所学的高等数学知识，进一步提高解题的能力与技巧，强化应试技能。本书正是基于读者这两方面的希望和要求而编写的。马克思说过："科学是没有平坦大道的，只有那些不畏在崎岖小路上攀登的人，才能达到光辉的顶点。"

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"修定而成的，并参照了教育部制订的硕士研究生入学考试《数学考试大纲》。本书共分 12 章，每章内容由三部分组成，第一部分是"内容提要"，列出主要概念、公式。对基本概念的要素、基本性质的特征、基本方法的要点给予了较深入和详细的总结归纳。第二部分是"重点分析"，对本章的重要内容和主要定理、公式作详细解读与译疑解难。第三部分是"例题及例题解析"，本书所选例题，类型繁多，覆盖面广，具有较强的代表性，有利于学生对书中提出的概念和方法进行练习，以开拓学生的思路，加深对基本概念的理解和方法的掌握。在例题详解之前，增加了分析部分，指导读者如何解题，做到举一反三，触类旁通，以提高读者的分析能力和掌握解题技巧，提升应试水平。每章末配备了一套自测题及答案，在书中的相应部位配有期中和期末试题及答案，以帮助读者检查知识点掌握情况，有利于提高应试成绩。

本书第一章由朱顺荣，汤乐编写；第二章由宋俊玲编写；第三章由宋俊玲，朱莉编写；第四、六章由钱雄平编写；第五章由刘德钦，刘倩编写；第七、八章由张弦编写；第九、十章由杨建新编写；第十一、十二章由吴新民编写。全书第一至第六章，由刘德钦统纂订稿。第七至第十二章由朱顺荣统纂订稿。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程的同步复习参考书，也可作为准备考研的高年级同学的起步复习参考书。

本书编写得到了南京理工大学紫金学院领导的支持和帮助，紫金学院基础系的同行们为本书的出版做了不少工作，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，加上时间仓促，因而书中错误、疏漏之处在所难免，恳请读者批评、指正。

编　者
2012 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

一、内容提要

1. 函数的概念

(1) 函数的定义：设非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f.

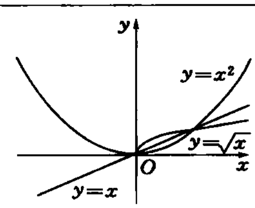
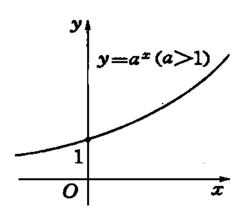
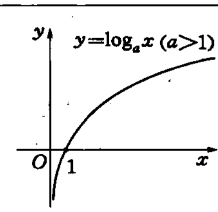
(2) 反函数：设 $W=\left\{y\,\middle|\,y=f(x),x\in D\right\}$，若对每个 $y\in W$，都有 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$，则 x 是 y 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，x 表示自变量，y 表示因变量，因此又可记为 $y=f^{-1}(x)$.

2. 函数的几种特性

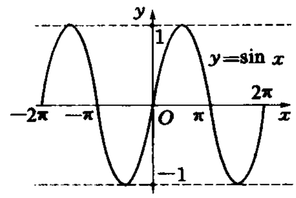
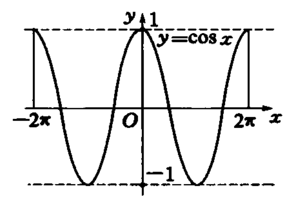
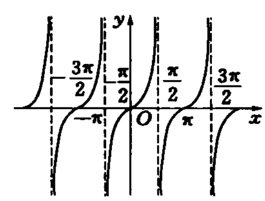
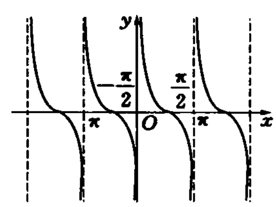
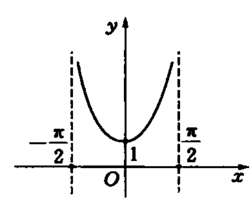
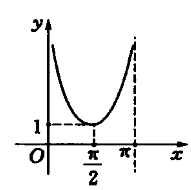
奇偶性，单调性，有界性，周期性.

3. 基本初等函数和初等函数(表 1-1)

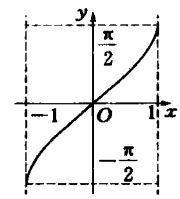
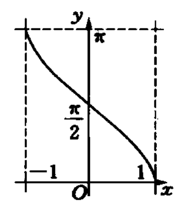
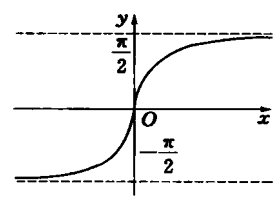
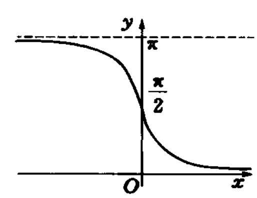
表 1-1　　基本初等函数和初等函数

名称		表达式(定义域)	性　质	说　明	图　　形
基本初等函数	幂函数	$y=x^{\mu}$(μ 为实常数) 当 $\mu=\frac{1}{2}$，$x\in[0,+\infty)$ 当 $\mu=2$，$x\in(-\infty,+\infty)$	当 $\mu>0$ 时，单调递增； 当 $\mu<0$ 时，单调递减	幂函数的定义域，取决于指数 μ；但不论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义	
	指数函数	$y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)定义域为：$(-\infty,+\infty)$	若 $a>1$，单调递增； 若 $0<a<1$ 时，单调递减； 图形在 x 轴上方	值域 $(0,+\infty)$ 即 $a^x>0$	
	对数函数	$y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$) 定义域为：$(0,+\infty)$	若 $a>1$ 时，单调递增； 若 $0<a<1$ 时，单调递减； 图形在 y 轴右方	$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数； 以 e 为底的对数记为 $y=\ln x$	

续表 1-1

名称		表达式(定义域)	性质	说明	图形
基本初等函数	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$ 定义域为:$(-\infty,+\infty)$	奇函数,周期函数 $T=2\pi$,有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	值域为$[-1,1]$	
		余弦函数 $y=\cos x$ 定义域为:$(-\infty,+\infty)$	偶函数,周期函数 $T=2\pi$,有界函数 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	值域为$[-1,1]$	
		正切函数 $y=\tan x$ 定义域为:$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)	奇函数,周期函数 $T=\pi$,它总是单调递增		
		余切函数 $y=\cot x$ 定义域为:$x\neq k\pi$,($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)	奇函数,周期函数 $T=\pi$,它总是单调递减		
		正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 定义域为:$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)	偶函数,周期函数 $T=2\pi$; 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上无界	$\lvert\sec x\rvert\geqslant 1$ 故图形在 $y=\pm1$ 的外面	
		余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 定义域为:$x\neq k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)	奇函数,周期函数 $T=2\pi$; 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上无界	$\lvert\csc x\rvert\geqslant 1$ 故图形在 $y=\pm1$ 的外面	

续表 1-1

名称		表达式(定义域)	性　质	说　明	图　形
基本初等函数	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域为:$[-1,1]$	奇函数,单调递增	值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
		反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域为:$[-1,1]$	非奇非偶,单调递减	值域为$[0,\pi]$	
		反正切函数 $y=\arctan x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	奇函数,有界 $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$ 单调增函数	值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	非奇非偶,有界函数 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$ 单调递减	值域为$(0,\pi)$	
初等函数		凡是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数,称为初等函数			

二、重点分析

(1) 理解函数概念的两个基本要素:定义域和对应规则.只有当两个函数的定义域与对应规则都完全相同时,才能认为它们是同一个函数.

函数的对应规则可以有不同的表达方式:

① 如果函数的对应规则是解析表达式 $y=f(x)$,则称函数为显函数.

② 如果函数的对应规则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定,则称 y 为 x 的隐函数.

③ 如果函数的对应规则由几个解析表达式分段组合表示,如:

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

则称 $f(x)$ 为分段函数.

④ 如果 x 与 y 之间的对应关系通过第三个变量 t 而联系起来，如：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases} (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

则称这种关系为参数方程表示的函数.

⑤ 如果 x 与 y 之间的对应关系通过中间变量 u 联系起来，即 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 D 上可确定函数 $y=f[g(x)]$，称这种函数关系为复合函数，记为 $y=f[g(x)]$.

(2) 判断函数单调性的实用法则要在学完导数这一章后给出，目前不给予过多的研究.

三、例题及例题解析

【例 1-1】 下列各组函数中，表示同一个函数的有(　　)

(A) $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(B) $y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $y_2=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$；

(C) $y_1=\sqrt{x(x+1)}$ 与 $y_2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$；

(D) $y_1=3x^2+2x-1$ 与 $y_2=3t^2+2t-1$.

分析 所给问题为选择题，判断的依据是函数定义的两个基本要素：定义域和对应法则。若两个函数的定义域和对应法则都相同，则它们表示同一个函数，否则它们表示不同的函数.

解 对于(A)，$y_1=\cos x$，$y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$，它们的对应法则不相同，所以不是同一个函数.

对于(B)，y_1 和 y_2 的定义域同为 $\left\{x\,\middle|\,x<1,x\neq 0\right\}$.

在定义域内，$y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}=y_2$，故 y_1 和 y_2 定义域和对应法则都相同，因而是同一个函数.

对于(C)，y_1 的定义域 $x(x+1)\geqslant 0$，由此解得 y_1 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$；$y_2$ 的定义域是 $x\geqslant 0,x+1\geqslant 0$，由此可解得 y_2 的定义域为 $[0,+\infty)$，由此，y_1 和 y_2 定义域不同，因此它们不是同一个函数.

对于(D)，y_1 与 y_2 自变量的符号虽不相同，但其定义域及对应法则都相同，因此表示同一个函数.

综上所述，应选择(B)、(D).

【例 1-2】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析 只要由题中关系式求得 $\varphi(x)$ 表达式即可.

解 $f(x)=e^{x^2}\Rightarrow f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$

$\because f(\varphi(x))=1-x\quad \therefore e^{\varphi^2(x)}=1-x,\quad \varphi^2(x)=\ln(1-x)$

由 $\varphi(x)\geqslant 0$ 可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 0$ 或为 $(-\infty,0]$.

【例 1-3】 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $y=f(\sin x)$；　　　　(2) $y=f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

分析　在求复合函数的定义域时，可先将复合函数由外至内分解为简单函数，然后由外至内确定各简单函数的定义范围，直至最里面一层. $f(x)$的定义域是$[0,1]$，这就意味着$f[g(x)]$中$g(x)$的值域在$[0,1]$上，即要求$0\leqslant g(x)\leqslant 1$.

解　(1) $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以$2\pi k\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，因此$f(\sin x)$的定义域是$[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k$是整数.

(2) 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$可得$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[-a,1-a]\cap[a,1+a]$，为使此集合非空，只须$a\leqslant 1-a$即$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，此时定义域为$[a,1-a]$. 而在$a>\frac{1}{2}$时，定义域为空集.

【例 1-4】　设$f(e^{x-1})=3x-2$，求$f(x)$.

分析　此类问题有两种基本解法.

解法 1　(变量代换法)设$u=e^{x-1}$，则$x=\ln u+1$.

$$f(u)=3(\ln u+1)-2=3\ln u+1\ (u>0)$$

所以：

$$f(x)=3\ln x+1\ (x>0).$$

解法 2　(凑元法)$f(e^{x-1})=3x-2=3(x-1)+1=3\ln e^{x-1}+1$

由此知：

$$f(x)=3\ln x+1\ (x>0).$$

【例 1-5】　设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\0, & |x|>1\end{cases}$，求$f\{f[f(x)]\}$.

分析　对于分段函数的复合关系，应紧紧抓住自变量与中间变量的取值范围，这是保证运算正确的关键.

解　当$|x|\leqslant 1$时，$f(f(x))=f(1)=1$；当$|x|>1$时，$f(f(x))=f(0)=1$，于是$f(f(x))=1, x\in(-\infty,+\infty)$，从而$f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$.

【例 1-6】　设$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\12x-16, & x>2\end{cases}$，求$f^{-1}(x)$.

分析　求解反函数的一般步骤是：反解x(若分段函数，先分段，后合并)→互换x,y→指明反函数定义域(原函数的值域).

解　当$-\infty<x<-1$时，$y=f(x)=1-2x^2$，反解得$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}$，$-\infty<y<-1$.

当$-1\leqslant x\leqslant 2$时，$y=f(x)=x^3$，反解得$x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$. 当　$2<x<+\infty$时，$y=f(x)=12x-16$，反解得$x=\frac{y+16}{12}$，$8<y<+\infty$，由此，反函数为：

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & -\infty<x<-1\\\sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\\frac{x+16}{12}, & 8<x<+\infty\end{cases}$$

【例 1-7】 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 可以看成由哪些基本初等函数复合而成？并求其定义域.

分析 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础，而由里到外，逐级分解是解决问题的关键，要分清复合函数的成分或结构.

解 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$ 复合而成. $\ln\sqrt{x}\geqslant 0$ 则要 $\sqrt{x}\geqslant 1$ 即 $x\geqslant 1$，故 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 定义域为 $D=[1,+\infty)$.

第二节 极 限

一、内容提要

1. 极限的定义(以下 x_0 为有限值，A 为确定常数)

极限的概念是高等数学中最重要的概念之一，许多新概念的引入，许多重要定理的证明都要用到它.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 左、右极限

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

以上两个结论可分别用来证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，还可以用来证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

3. 数列极限的性质

(1) 极限的唯一性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

(2) 有界性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 必有界. 即存在 $M>0$，使对一切 n，都有 $|x_n|\leqslant M$.

(3) 保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A>0$(或 <0)，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$(或 <0).

(4) 子数列的收敛性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其任意子数列亦必收敛，且与 $\{x_n\}$ 有相同的极限.

数列的有界性和子数列的收敛性是数列 $\{x_n\}$ 收敛的必要条件.

4. 函数极限的性质

(1) 极限的唯一性：若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在，则极限必唯一.

(2) 局部有界性：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在，则在 x_0 的某一去心邻域内(或当 $|x|>M$ 时)，

$f(x)$有界.此时称当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时 $f(x)$为有界变量.

(3) 局部保号性:若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$,且 $A>0$,则在 x_0 的某一去心邻域(或当 $|x|>M$ 时),$f(x)>0$.

若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$.

若当 $|x|>M$ 时 $f(x)\geqslant 0$,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$.

5. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

6. 极限存在的准则

(1) 夹逼准则

对于数列:若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,从某项 n_0 起满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且:

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} z_n=A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A.$$

对于函数:若当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>M$)时,有:

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$$

则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A.$$

(2) 单调有界准则

单调增加且有上界数列必有极限;单调减少且有下界的数列必有极限.

7. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ \text{或}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

其变形分别为:

若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

则

$$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

二、重点分析

(1) 要理解极限定义中的“$\varepsilon-\delta$”表示法的内涵.

定义中的 ε 的任意给定性是重要的,它具有任意性与给定性(固定性)双重含义. ε 是度量 x_n(或 $f(x)$)与 A 接近程度的量. 定义中的 δ 反映了 x 充分接近 x_0 的程度,它也是依赖于 ε 的.

一般说来,ε 变小时,δ 也变小;对于一个固定的 ε 来说,合乎定义要求的正数 δ 也不是唯一的.

“$\varepsilon-\delta$”定义中 ε 可换成$\frac{1}{2}\varepsilon,3\varepsilon,\sqrt{\varepsilon}$等,它们仍表示“任意小”;$\delta$ 也可换成$\frac{1}{2}\delta,3\delta,\sqrt{\delta}$等,其实,我们可以不关心这种 δ 的大小,也不一定去找适合要求的最小 δ,重要的是它的存在性. $0<|x-x_0|<\delta$ 也可换成 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$;$|f(x)-A|<\varepsilon$ 也可换成 $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$,这些更换无关大局,不影响 $\varepsilon-\delta$ 极限定义的本质.

(2) 重点掌握极限与左、右极限的关系. 对于包含绝对值及分段函数在分段点的极限,都必须通过左、右极限来考虑. 注意分段点处极限存在性与函数在分段点是否有定义无关.

(3) 理解且掌握极限的性质. 还要注意到若 $f(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在,则 $A\geqslant 0$.

(4) 掌握极限存在的准则. 另外还应注意到在单调有界准则中,“单调有界”的条件是充分的,而并非必要. 如数列:$x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$,$n=1,2,\cdots$,显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0$,但对于任何正整数 k,都有$\frac{1}{2k-1}<\frac{3}{2k}$,$\frac{1}{2k+1}<\frac{3}{2k}$,即 $x_{2k-1}<x_{2k}$, $x_{2k+1}<x_{2k}$,由此数列 $\{x_n\}$ 并不单调.

三、例题及例题解析

【例 1-8】 下列命题中正确的有(　　)

(A) 当 n 越大时,$|x_n-A|$ 越小,则数列 $\{x_n\}$ 必以 A 为极限;

(B) $\forall\varepsilon>0$,数列 $\{x_n\}$ 中仅有有限多项不满足 $|x_n-A|<\varepsilon$,则数列 $\{x_n\}$ 必定以 A 为极限;

(C) $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,数列 $\{x_n\}$ 中总有无限多项满足 $|x_n-A|<\varepsilon$,则数列 $\{x_n\}$ 必定以 A 为极限.

分析 对此类题判定正误,紧紧扣住数列极限定义.

解 命题(A),仅要求 $|x_n-A|$ 越来越小是不够的.

如 $x_n=-\frac{1}{2n}$,$A=1$,显然,随着 n 增大,$|x_n-A|=\left|-\frac{1}{2n}-1\right|=\frac{1}{2n}+1$ 越来越小,而 $\left\{-\frac{1}{2n}\right\}$ 以零为极限,而不是以 $A=1$ 为极限. 因此(A)不正确.

对命题(B),$\forall\varepsilon>0$,由于 $\{x_n\}$ 中仅有有限多项不满足 $|x_n-A|<\varepsilon$,可设这些项的下标最大为 N,当 $n>N$ 后就可以保证 $|x_n-A|<\varepsilon$,对照数列极限定义,因此命题(B)正确.

对命题(C),取 $x_n=(-1)^n$,$A=1$,$\forall\varepsilon>0$,$|x_n-A|=|(-1)^n-1|$ 中总有无限多项可以小于 ε,但显然 $\{x_n\}$ 发散,因此(C)不正确.

【例 1-9】 下列命题中正确的是(　　)

(A) 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛,则数列$\{x_n+y_n\}$必收敛;

(B) 若数列$\{x_n+y_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$也收敛;

(C) 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散,则数列$\{x_n+y_n\}$必发散;

(D) 若数列$\{x_n+y_n\}$发散,则数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$也都发散.

分析　此类题通常举反例加以判定.

解　由极限运算法则可知(A)正确.

对(B)和(C),考虑$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$,$\{y_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$,则$\{x_n+y_n\}=\{0\}$是收敛数列,但$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都不收敛.故(B)和(C)都不正确.

命题(D)也不正确,因为$\{x_n\}$收敛而$\{y_n\}$发散也可导致$\{x_n+y_n\}$发散.

【例 1-10】 若在自变量的一定趋向下,$f(x)$,$g(x)$的极限中至少有一个不存在,那么$f(x)+g(x)$及$f(x)\cdot g(x)$的极限是否存在?

分析　采取方法与上例类似.

解　(1) 若$f(x)$的极限存在,$g(x)$的极限不存在,则$f(x)+g(x)$的极限一定不存在.证明是容易的,假设$f(x)+g(x)$的极限存在,则由极限运则法则知:$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$的极限必存在,与已知矛值.

(2) 若$f(x)$的极限存在,$g(x)$的极限不存在,则$f(x)\cdot g(x)$的极限可能存在,也可能不存在.

如当$x\to 0$时,$f(x)=x$的极限存在,$g(x)=\dfrac{1}{x}$的极限不存在,而$f(x)\cdot g(x)=1$的极限存在;又如$x\to 0$时,$f(x)=x$的极限存在,$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$的极限不存在,而$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{1}{x}$的极限不存在.

【例 1-11】 设$a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})$,$(n=1,2,\cdots)$

(1) 证明:数列$\{x_n\}$单调下降且有下界.

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　利用单调有界准则证明极限存在,主要针对递推数列,必须验证数列两个方面的性质:单调性和有界性.一般解题的难点在于判断单调性,数学归纳法是一种简洁而有效的方法,或者通过前后两项相减或相除.

解　(1) 因为$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$,即$x_n\geqslant\sqrt{a}$,$(n\geqslant 2)$.

即$\{x_n\}$有下界.下面通过比较前后两项证明$\{x_n\}$单调下降:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0\ (n\geqslant 2),$$

或者
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leqslant 1\ (n\geqslant 2),$$

因此$\{x_n\}$单调下降.

由(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,在$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$两边令$n\to\infty$取极限,则有