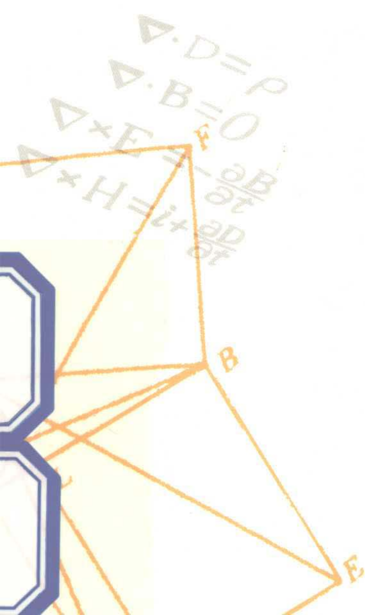
小阅读
RANDOM 001

THE LANGUAGE OF MATHEMATICS

数学的语言

化无形为可见



[美] 齐斯·德福林 著

洪万生 洪赞天 苏意雯 英家铭 译

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

THE LANGUAGE

OF

MATHEMATICS

数学的语言

化无形为可见

[美] 齐斯·德福林 著

洪万生 洪赞天 苏意雯 英家铭 译

广西师范大学出版社

·桂林·

图书在版编目(CIP)数据

数学的语言:化无形为可见/(美)德福林 著;洪万生等译.—桂林:广西师范大学出版社,2013.1
ISBN 978-7-5495-2561-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①德… ②洪… Ⅲ.①数学-普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第211045号

出 品 人:刘广汉
责任编辑:刘冬雪
装帧设计:赵 瑾

广西师范大学出版社出版发行
(广西桂林市中华路22号 邮政编码:541001
网址:http://www.bbtpress.com)
出版人:何林夏
全国新华书店经销
销售热线:021-31260822-882/883
山东临沂新华印刷物流集团印刷
(山东临沂高新技术产业开发区新华路 邮政编码:276017)
开本:690mm×960mm 1/16
印张:23.75 字数:250千字
2013年1月第1版 2013年1月第1次印刷
定价:39.00元

前　言

本书试图阐释数学的本质,内容兼顾历史发展与它目前的广度。它不是一本教导读者“如何”(how to)去做数学的著作,而是一本“有关”(about)数学知识活动的论述,它将数学形容成人类文化一个丰富而生动的成分。它意在面向一般读者,而且不预设任何数学知识或能力。

本书源自较早的一本收入弗利曼科学美国人图书馆(W. H. Freeman's Scientific American Library)丛书的著作,名为“数学:模式的科学”(*Mathematics: The Science of Patterns*)(后称弗利曼版)。那本书是为了一般称为“有科学素养”(scientifically literate)的受众而写,后来也被证明是该丛书中最成功的一本。我在与该计划的主编考伯(Jonathan Cobb)交换意见时,兴起了为更广大受众写一本“副产品”(spin-off)的念头。这本新书将不会如同那一套丛书一样,拥有光鲜亮丽的插图以及一大堆全彩的照片。它的目标毋宁说是按照更大读者群可以接受的一种形式,述说本质上相同的一个故事:数学是有关模式(pattern)的鉴别与研究的故事。(正如它的前一本一样,本书也将显示对数学家而言,究竟什么可算是“模式”。)在此,请注意,我并非

只是谈论壁纸“图案”（pattern）或衬衫上的“图样”（pattern）——尽管那些图案或图样中的许多东西，最后都会符合有趣的数学性质。

除了彻底重写文本的大部分材料以适合更标准的“科普书籍”形式之外，我也利用这一形式改变之便利，增加了额外的两章：其中之一是有关机会（chance）的模式，另一个则是有关（物理）宇宙的模式。我原本打算将这两个单元纳入弗利曼版中，不过，因该丛书形式限制了篇幅，而无法如愿。

费尔南多·古维亚（Fernando Gouvea）、多瑞丝·夏兹施耐德（Doris Schattschneider）以及肯尼斯·米勒（Kenneth Millett）提供了弗利曼版原稿的全部或部分评论，而且，他们颇有帮助的忠告，无疑将见诸这本新书之中。隆·欧罗文（Ron Olowin）对第八章提供了有益的反馈。而这一章连同第七章，则是本书全新的材料。苏珊·莫兰（Susan Moran）是弗利曼版非常尽职的文字编辑，诺玛·罗彻（Norma Roche）则是这本新书的文字编辑。

在历史上，几乎所有的数学家领袖都是男性，而这也反映在本书中，女性角色近乎完全缺席。我希望那些日子永远消逝。为了反映今日的现实环境，本书同时交互使用“他”与“她”作为通用的第三人称代名词。

目 录

序曲　何谓数学

一切都不只是数字

何谓数学？随机向人们提问，你可能获得的答案是，“数学是有关数字的 1
一种学问”。如果继续追问他们所谓的学问是哪一种，你或许可以诱导他们提出譬如“那是一种有关数字的科学”之描述。不过，这大概是你可以得到的最多的信息。而这一种有关数学的描述，在大约两千五百年前，就已经不再正确了。

在这样一个巨大的误导之下，你所随机抽样的人们无法体会数学研究是一种兴旺且无所不在的活动，或是接受数学经常相当程度地贯穿我们日常生活与社会大部分活动的看法。这毫不令人意外。

事实上，“何谓数学”这个问题的答案，在人类历史过程中，已经数度更易了。

到公元前 500 年左右为止，数学的确是有关数字（number）的一种学问。这是古埃及和古巴比伦时期的数学。在这些文明中，数学所包括的，几乎都以

算术(arithmetic)为主。它大部分属功利取向,而且充满了“食谱”的特色(譬如,“对一个数字这样做、那样做,你将会得到答案”)。

从大约公元前500年到公元300年的这一时期,是希腊数学的时代。古希腊的数学家主要关心几何学(geometry)。诚然,他们按几何方式,将数字视
2 为线段长之度量,而当他们发现有数字缺乏对应的线段长时,有关数字的研究就停顿下来了。对于希腊人而言,由于他们强调几何学,所以,数学不只研究数字,而且也是有关形状(shape)的学问。

事实上,幸亏有希腊人现身,数学才进入研究领域,而不再只是度量、计算和会计等技巧的大杂烩。希腊人对于数学不只存功利取向,他们视数学为一种知性探索,其中包含了美学与宗教成分。泰勒斯(Thales)引进了如下想法:数学上精确陈述的断言(assertion),都可以被一个形式的论证(formal argument)逻辑地证明出来。这一创新标志着定理(theorem)——数学的基石——的诞生。对希腊人而言,这一进程在欧几里得(Euclid)《几何原本》(*The Elements*)出版时攀上了巅峰。这一部西方数学经典,在历史上因流传度仅次于《圣经》而闻名于世。

运动中的数学

一直到17世纪中叶,英国的牛顿(Isaac Newton)和德国的莱布尼茨(Gottfried Leibniz)各自独立发明微积分之前,数学的整体本质未曾有过根本的变革,或者说几乎没有任何显著的进展。实质来说,微积分是研究运动(motion)和变化(change)的一门学问。在此之前的数学大都局限于计算、度量和形状描述的静态议题上。现在,引进了处理运动和变化的技巧之后,数学家终于可以研究行星的运行、地球的落体运动、机械装置的运作、液体的流动、气体的扩散、如电力和磁力等物理力、飞行、动植物的生长、流行病的传染、利润的波动等。在牛顿和莱布尼茨之后,数学变成了研究数字、形状、运动、变化以及空间(space)的一门学问。

大部分涉及微积分的初始问题都导向物理的研究;事实上,该时期很多伟

大的数学家也被视为物理学家。不过,从大约18世纪中叶之后,当数学家着手了解微积分为人类带来的巨大力量背后是什么时,他们对于数学本身的兴趣与日俱增,而不再只是关注数学应用而已。因此,当今日一大部分纯数学被发展的时候,古希腊形式证明的传统卷土重来掌握了优势。到19世纪末,数学已经成为有关数字、形状、运动、变化、空间以及研究数学的工具的一门学问。

发生在20世纪的数学活动之爆发相当戏剧化。在1900那一年,世界上 3
所有的数学知识可以全部装入大约八十部书籍之中。而在今日,数学将必须有十万部书籍才能容纳。这种非比寻常的成长,不只源自一个世纪以来数学的增进,也因为许多新的分支已纷纷涌现。在1900年,数学可以被视为包括了大约十二个主题:算术、几何、微积分等。至于今日,六十到七十之间的不同范畴,将是一个合理的数字。某些主题,譬如代数和拓扑学(topology),已经细分为不同的子领域;至于其他主题,譬如复杂理论(complexity theory)或动态系统理论(dynamical systems theory),则是全新的研究领域。

模式的科学

基于数学活动如此迅速成长这一事实,对于"何谓数学"这个问题,一时之间唯一的简单答案,好像就是有一点愚昧地说:"那是数学家赖以维生的凭借。"一种特定的研究之所以被归类为数学,并不是基于什么被研究,反倒是基于它如何被研究,也就是说,基于被使用的方法论。在最近大约三十年间,一个为大部分数学家所同意的有关数学的定义,才终于出现了:数学是研究模式的科学(science of patterns)。数学家的所作所为,就是去检视抽象的模式——数值模式、形状的模式、运动的模式、行为的模式、全国人口的投票模式、重复机会事件(repeating chance events)的模式等。这些模式可以是真实存在或想象的、视觉性或心智性的、静态或动态的、定性或定量的、纯粹功利或有点超乎娱乐趣味的。它们可以源自我们周遭的世界、源自空间和时间的深度,或者源自人类心灵的内部运作。不同种类的模式当然引出不同的数学分支,

譬如说：

- 算术与数论研究数字与计算模式。
- 几何学研究形状模式。
- 微积分允许我们处理运动模式。
- 逻辑学研究推论模式。
- 概率论处理机会模式。
- 拓扑学研究邻近(closeness)与位置(position)模式。

4 本书将运用八个主题，涵盖计算模式、推论与沟通模式、运动与变化模式、形状模式、对称与规则模式、位置模式、机会模式，以及宇宙的基本模式，以传递现代定义的数学的一些信息。虽然略去了数学的一些主要领域，它仍为当代数学为何提供了一个不错的全面解答。每一个主题的处理，尽管只是在纯描述的层次，却一点也不肤浅。

现代数学有一个甚至对不经意的观察者而言都属显然的趋向，那就是抽象记号的使用：代数表现式、形式复杂的公式，以及几何图形。数学家对抽象记号的依赖，恰好反映了他所研究的模式的抽象本质。

实在(reality)的不同面向需要对应不同的描述(description)形式。譬如，研究土地的地势或是对某人描述在一个陌生的小镇如何找路的最恰当方法，就是画一张地图，相比之下，文字内容就远不及此。依此类推，在蓝图中，以线条图示是标示一栋建筑物的构图的最恰当的方法。至于记谱法(musical notation)，则或许是实际演奏这支曲子之外，传递音乐的最恰当方法。

就各种抽象的、“形式的”模式与抽象的结构而言，描述与分析的最恰当手段就是数学，利用数学记号、概念与程序。比方说，代数中的象征性记号(symbolic notation)，就是描述加法与乘法这种一般运算性质的最佳手段。以加法的交换律为例，它可以写成如下文字：

当两个数相加时，它们的顺序并不重要。

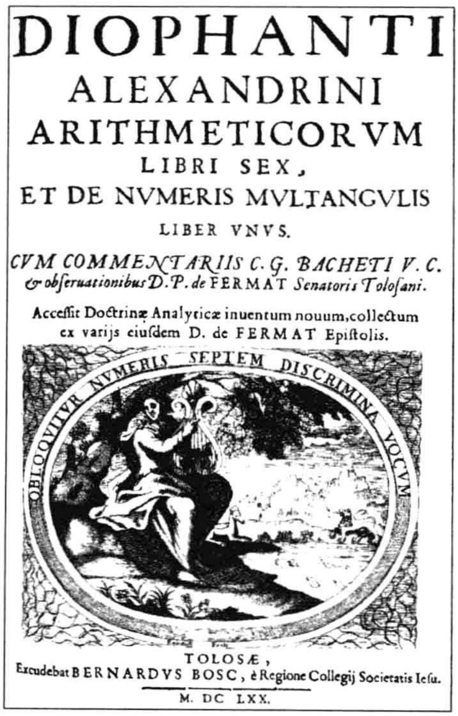
不过，它通常写成如下的符号形式：

$$m + n = n + m。$$

这样就呈现了多数数学模式的复杂性与抽象程度，要是我们使用象征性记号以外的东西来描述，那将令人却步地繁琐。因此，数学的发展已经涉及抽象记号稳定增加的运用了。

进步之符号

在数学史上，可辨识的代数记号初次有系统地使用，似乎是从丢番图（Diophantus）开始的。他在大约公元250年住在亚历山大城（Alexandria）。他 5
的论著《数论》（*Arithmetic*）（见图0.1）——仅存原先十三卷中的六卷——通常被视为第一本"代数教科书"。丢番图使用特殊的符号去代表一个方程式中的未知数，及未知数之乘幂；同时，他也运用了表示减与相等的符号。


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

图0.1：丢番图《数论》17世纪拉丁文译本的书名页。

图 0.2：正如数学，音乐也有一种抽象的记号，用以呈现抽象结构。

在今日，数学书籍总是到处充塞着符号；但是，数学记号并不等于数学，其情况就如同记谱法并不等于音乐一样（见图 0.2）。乐谱的一页呈现一段音乐；当乐谱上的音符被唱出来或者被乐器演奏时，你才可以得到音乐本身。也就是说，在它的表演中，音乐变得有了生命，并且成为我们经验的一部分。对于数学来说也是一样，书页上的符号只不过是数学的一种表现（representation）。要是让一位有素养的表演者（譬如，受过数学训练的某人）来读的话，印刷页上的符号就拥有生命——正如同抽象的交响曲一样，数学在读者的心灵之中存活与呼吸。

6 数学与音乐有这么多的相似性，两者都有各自抽象的记号，并且都为各自的抽象法则所支配，所以如果说很多（或许大多数）数学家也拥有音乐天分，那是一点也不令人惊讶的。

事实上，对于大部分已绵延两千五百年之久的西方文明来说，从古希腊人开始，数学与音乐就被视为一体之两面：两者都被认为是对宇宙秩序提供洞见的学科。只有在 17 世纪科学方法兴起之后，这二者才开始分道扬镳。

不过，尽管它们的密切联系有悠久的历史，数学与音乐却直到最近才被发现有一个非常显著的差异。虽然只有少数受过很好音乐训练的人可以读懂乐

谱，并且在心灵之中听到这段音乐，不过，如果同一段音乐由一位有素养的音乐家来演奏，那么，任何人只要拥有聆听的感官能力，也将能够欣赏。无须专业训练，任何人都将有能力经验与享受音乐表演。

然而，对于数学的大部分历史而言，欣赏数学的唯一方法，就是去“视读”(sight-read)其中的符号。尽管数学的结构与类型一点一滴反映了人类心灵的结构并与之产生共鸣，好比音乐的结构与模式一样，人类却并未发展出一双耳朵的数学等价物体。数学只能利用“心灵的眼睛”(eyes of the mind)而得到 7
“观看”。这种情况就好比某人即便缺乏听觉能力，但只要能够“视读”记谱法，他仍将可以欣赏音乐的模式与调谐的乐音。

不过，由于近年来电子计算机与视频技术的发展，在某种程度上，数学变得更容易让普通人(the untrained)亲近。在训练有素的使用者手上，计算机可以用来“操弄”(perform)数学，而且其结果也可以展示成为屏幕上所有人都可见得到的形式。虽然目前只有一小部分数学容许这样的视觉“操弄”，然而，我们已经有能力多少传递一点数学的美与调谐给门外汉，而这些当然是数学家研究数学时，所“看到”以及所经验到的。

当看到即发现到

有时候，计算机图形学(computer graphics)对于数学家、对于让门外汉一瞥数学的内在世界一事而言，可以发挥极大的功用。例如说，复数动力系统(complex dynamical systems)起源于20世纪20年代法国数学家皮埃尔·法图(Pierre Fatou)与加斯顿·朱利亚(Gaston Julia)的研究，但是，一直要到20世纪70年代晚期和20世纪80年代早期，计算器图形学快速发展，伯努瓦·曼德勃罗(Benoit Mandelbrot)及其他数学家才得以看到法图和朱利亚曾经研究过的结构。因缘于这个研究所的这些极美丽的图形，已经变成一种本身具有意义的艺术形式。为了纪念这个领域的两位开拓者，某些这类结构现在就称为朱利亚集合(Julia sets)(见图0.3)。

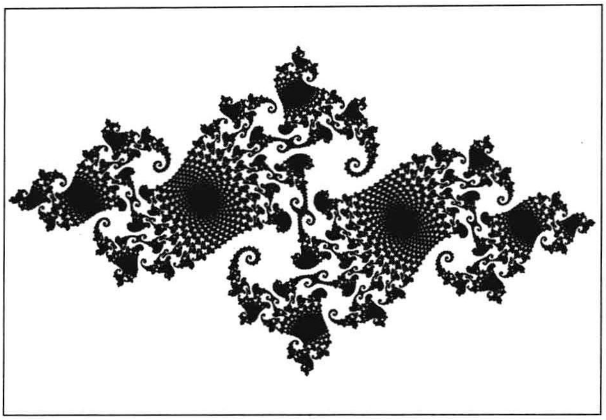


图 0.3：朱利亚集合。

8 由计算机图形学的利用导致的另一个深刻的数学发现的例子，出现在1983年。当时，数学家戴维·霍夫曼（David Hoffman）和威廉·密克斯三世（William Meeks Ⅲ）发现了一个全新的最小曲面。一个最小曲面是一种无限的肥皂薄膜的数学等价物。真实的（肥）皂（薄）膜沿着一个框架展开，总是形成一个占有尽可能小的面积的曲面。数学家所考虑的，是延展到无限的皂膜抽象模拟。这样的曲面已经被研究了两百多年，不过，直到霍夫曼与密克斯发现这个全新的曲面之前，只有三个这样的曲面为人所知。今日，由于计算机视觉技术的成熟，数学家已经发现了许多这样的曲面。有关最小曲面的性质，较多是由比较传统的数学技巧如代数与微积分所确立。然而，正如霍夫曼与密克斯所证明的，计算机图形学可以为数学家提供一种寻求那些传统技巧正确组合所需的直观经验。

缺乏代数符号，数学的大部分将不可能存在。这个议题当然相当深刻，因为它与人类的认知能力息息相关。抽象概念的认识与表现它们的适当语言之发展，真的是一体两面。

用以代表抽象对象（entity）的符号，像是字母、文字或图像一类，其使用的确是亦步亦趋地跟随着对象之为对象本身（entity as an entity）的认识。譬如说，用以表示数字（number）七的数码（numeral）“7”，需要以数字七被视为一个

对象为前提；同理，用以表示一个任意整数的字母 m 需要以整数的概念(concept)被认识到为前提。有了符号，思考与操弄概念成为可能。

由于数学程序的(procedural)、计算的(computational)面向受到重视，以致数学的上述这种语言的(linguistic)面向经常被忽略，特别是在我们的现代文化之中。的确，我们经常听到有人抱怨说，若非全都是抽象记号，数学将会简单多了。这十分像是在说，要是运用更简单的语言书写，莎士比亚的著作阅读起来就容易得多了。

令人感伤的是，数学的抽象层次以及因之而来，应付那种抽象记号的必然需求，表示了数学许多部分，或许是大部分，将永远对非数学家隐藏。而且，甚至于比较容易亲近的部分——在许多书籍(本书即其中之一)中被描述的部分——可能只是被模糊地浏览，至于它们的内在美，则被锁在视线之外。尽管如此，这不该让我们这些看来好像被赋予能力去欣赏那种内在美的人，不试着
向他人传播我们所体验到的某些意义——简单、精确与纯粹，以及赋予数学模 9
式美学价值的那份优雅。

隐藏在符号中的美

在出版于1940年的《一个数学家的辩白》(*A Mathematician's Apology*)中，杰出的英国数学家哈代(G. H. Hardy)描述说：

> 数学家的模式，就好比画家的或诗人的一样，必须是美的；理念就像色彩或文字一样，必须按和谐的方式安排在一起。美是第一个试炼；在这个世界上，丑陋的数学没有永远的栖身之所……我们可能很难定义数学的美，然而，它就像其他种类的美之真实一样——我们或许无法完全知晓所谓一篇美的诗是什么意思，但是，当我们得读一篇时，那并不会妨碍我们认识它。

哈代所指涉的美，在很多例子中，都是一种高度抽象的内在美，抽象形式与逻

辑结构的一种美，一种只可以被那些受过充分数学训练的人所观察与欣赏的美。根据英国著名数学家兼哲学家罗素（Bertrand Russell）的看法，它是一种“冷冽与朴实无华的”美。在出版于1918年的《神秘主义与逻辑》（*Mysticism and Logic*）中，罗素写道：

> 如果对数学加以正确考察，我们会发现，它所包括的不只是真理，还有至高无上的美——一种冷冽与朴实无华的美，就像雕刻的美一样，不必诉诸我们较弱本性的任一部分，无须绘画与音乐的奢华装饰，却还是具有庄严的纯粹，以及只有伟大的艺术才能表现的一种冷酷的完美。

数学这种模式的科学，是看待世界——包括我们所居住的物理的、生物的与社会学的世界，以及我们的心灵与思维所属的内在世界——的一种方式。数学的最大成功无疑已经表现在物理领域，其中，这个学科已经正确地被指涉为同时是（自然）科学的皇后与仆人。不过，作为完全的人类的创造，数学的研究最终将成为人文本身（humanity itself）的研究。这是因为没有任何一个构成数学基层的对象存在于物理世界之中，像数字、点、线与面、曲面、几何图形、函数等，都是些只存在于人类集体心灵（humanity's collective mind）之中的纯粹抽象物。数学证明的确定性以及数学真理的恒久本性，都是数学家在人类心灵与物理世界中所掌握的模式之深层、根本状态的反映。

10 在有关诸天（heavens）的研究支配着科学思想的时代，伽利略（Galileo）曾说过：

> 自然这部大书只能被那些通晓其中叙述语言的人所阅读。这种语言正是数学。

一个类似的论调令人注目地出现在非常晚近的时代中。当有关原子内部运作的研究占据了一整个世代许多科学家的心灵时，剑桥物理学家约翰·波尔金

霍恩(John Polkinhorne)在1986年写下：

> 数学是打开物理宇宙之锁的那一把抽象钥匙。

在今日这一被信息、沟通和计算所支配的时代，数学正在寻找新的锁来开启。我们生命的任何面向已经很少不受数学影响，唯程度多寡不一而已，因为抽象的模式正是思想、沟通、社会乃至于生命本身的本质。

让不可见变成可见

我们已经利用“数学是模式的科学”这一口号来回答“何谓数学?”这一疑问。有关数学，还有另一个根本的问题，能以一个吸引人的短语来回答：“数学作什么用?”我的意思是说，当你应用数学来研究某些现象时，数学真正带给你的是什么？这一问题的答案是，“数学让不可见变成可见”(Mathematics makes the invisible visible)。

接下来，请允许我举一些例子，以便说明我这个答案的意义。

要是没有数学，你将无从理解，是什么东西让一架巨型喷气式飞机浮在空气中。正如我们都知道的，大型金属物体如果没有东西支撑，根本无法停留在空中。但是，当你注视一架喷气式客机飞过你的头顶时，你看不到任何支撑物。是数学让我们“看到”令飞机飘浮高处的是什么。在本例中，让你“看到”那些不可见的支撑物的，是一个在18世纪早期被数学家丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)发现的方程式。

当我正在讨论飞行主题时，是什么原因促使飞行器以外的物体一被我们松开便坠地？你回答：“是重力。”然而这只不过是给它一个名字，这无助于我们理解它。它仍然是不可见的。我们也可以称它是一种“魔术”。为了理解重力，你必须“看到”它。那正是牛顿在17世纪利用他的运动和力学方程式所做的事。牛顿的数学帮助我们“看到”那些让地球绕着太阳旋转，以及造成苹果从树上坠地的不可见之力。