WUTP

高等学校教材

线性代数

主编 冯光庭

Xianxing daishu

WUTP 武汉理工大学出版社

高等学校教材

线性代数

主　编　冯光庭

武汉理工大学出版社
·武汉·

内容简介

本书是根据“高等学校工科数学课程教学指导委员会”制订的《线性代数课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践，充分吸收国内外教学改革成果编写而成的。

全书包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容，每节配有习题，每章配有单元复习题，书末附有习题参考答案。

本书由浅入深、逻辑清晰，注重应用、例题丰富，可读性强、便于自学，可作为高等学校理工科、经管类专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/冯光庭主编．—武汉：武汉理工大学出版社，2011.7
ISBN 978-7-5629-3511-7

Ⅰ.① 线… Ⅱ.① 冯… Ⅲ.① 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 142765 号

项目负责人：徐　扬　　　　责任编辑：彭佳佳
责任校对：邓　兵　　　　装帧设计：牛　力
出版发行：武汉理工大学出版社有限责任公司
社　　址：武汉市洪山区珞狮路 122 号
邮　　编：430070
网　　址：http://www.techbook.com.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：京山德兴印刷有限公司
开　　本：787×960　1/16
印　　张：10.5
字　　数：205 千字
版　　次：2011 年 9 月第 1 版
印　　次：2011 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：24.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请向出版社发行部调换。
本社购书热线电话：027-87394412　87383695　87384729　87397097(传真)

前　言

线性代数是理工类和经管类(专业)高等院校本、专科学生的重要基础课程之一。由于这门课程比较抽象,学生学习有一定难度,而已有的一些线性代数教材都过多地强调了数学的严谨性,使得非数学专业的学生学习起来就更加困难。为了使教材既符合学生的实际情况,又能满足教学要求,我们总结了多年的教学经验,并听取了多所院校骨干教师的意见,精心编写了这本教材。

本教材的编写指导思想和主要特点是:

第一,淡化理论证明,注重合情推理。作为非数学专业的学生,他们学习该课程的主要目的在于理解数学的基本思想,掌握数学的基本方法,并能运用它解决一些实际问题。所以在本教材的编写过程中,我们力求在不失数学严谨性的同时,体现“自然性”、“合理性”(自然地、合理地发现问题,提出问题;自然地、合理地分析问题,解决问题;自然地、合理地深化问题、拓展问题),做到语言通俗易懂、内容循序渐进、推理简捷直观,并对一些较难证明(不易理解或过程复杂)的定理只给出结论而略去了证明过程。

第二,强化基本技能、基本方法的掌握。为了使学生更好地理解和掌握基本方法、形成基本技能,教材中选择了较多的各个层次的例题和习题,在每一小节后面都配置了体现教学基本要求的习题,在每一章后面都配置了一定层次的、并体现更高要求的单元练习题,使学生在掌握重点内容的基础上有所提高。

第三,强调知识背景,展示知识内在联系。在教材的编写过程中,我们尽量用非常具体的问题引出概念,尽力展示知识的发生、发展和应用的过程;在解决问题的过程中又力求使学生知其所以然,了解每一步讨论的目的,了解知识的来龙去脉以及知识间的内在联系;在对知识理解的过程中,注重学生数学知识结构的不断完善和更新,使学生逐步领会代数学的一些重要思想方法,认识本课程的数学本质,从而感受数学文化,提高数学素养。

第四，确保教学基本要求，注重体现使用弹性。本教材不仅考虑到理工、经管类专科专业对线性代数的需要，也兼顾相应的本科专业的特点和需要。教材中注有“*”号的内容可供不同学时要求的专业选用。

参加本教材编写的有湖北第二师范学院的冯光庭、姚志鹏、王莹等老师；湖北第二师范学院数学与数量经济学院的李海雄博士通读了该书；湖北第二师范学院08级数学与应用数学专业的李婉君、郑丽、谢颖、张纺、杨会林、宋昆昆同学分别通读了教材的第1章至第6章，并演算了相应的习题。

本教材在编写过程中参考了众多国内外相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者深表感谢。还有武汉理工大学出版社的领导和编辑对本教材的编辑出版给予了热情的支持和帮助，尤其是徐扬等同志，在本教材的编辑和出版过程中做了很多卓有成效的工作；武汉理工大学数学系的彭斯俊老师、华中师范大学汉口分校的陈盛双老师、湖北第二师范学院数学与数量经济学院的梅汇海老师、谷亭亭老师等提出了许多宝贵意见，我们在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，错误、疏漏之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正，以使本教材在教学实践中不断完善。

编　者

2010年10月于武汉

目　录

1 行 列 式

行列式源于解线性方程组的需要，它是线性代数的一个重要研究对象，它不仅有优美的结构，而且是现代数学中一个十分有用的工具，特别是在一些线性关系的研究中具有重要作用. 本章主要研究行列式的定义、展开定理，行列式的性质和计算.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二阶与三阶行列式

我们首先讨论两种较简单的线性方程组——二元一次与三元一次线性方程组的公式解.

问题 1 探求线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

解的公式.

用加减消元法，在方程组(1.1)式中，以 a_{22} 乘第一式，以 a_{12} 乘第二式，得

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1+a_{22}a_{12}x_2=a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

在(1.2)式中用第一式减去第二式，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则 $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

同理，在(1.1)式中，用 a_{21} 乘第一式，a_{11} 乘第二式，然后相减，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 的情况下，得 $x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

因此方程组(1.1)只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则有解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

这就是线性方程组(1.1)的公式解.但(1.3)式不好记忆,为此我们引入下面的记号,它更能反映方程组(1.1)解的规律.

我们把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 记为如下形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

并把它叫做一个二阶行列式.于是就有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

有了二阶行列式,(1.3)式就可以很有规律地表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.5}$$

我们称(1.5)式为二元线性方程组(1.1)的公式解.可以看出,(1.5)式中位于分母的二阶行列式相同,都是(1.1)中未知量的系数按原来的位置排成的,我们称其为(1.1)的系数行列式.对分子而言,x_1 的表达式中分子正好是以常数项替换系数行列式中 x_1 的系数所得到的二阶行列式,x_2 的表达式中分子正好是以常数项替换系数行列式中 x_2 的系数所得到的二阶行列式.

这样表示以后,解的形式简单规范,便于书写记忆,而且鲜明地给出了二元线性方程组(1.1)的解与其系数和常数项的关系.

例 1 解方程组$\begin{cases}2x_1+3x_2=13\\5x_1-4x_2=-2\end{cases}$.

解 因$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-23, D_{x_1}=\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=-46, D_{x_2}=\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-69.$

所以根据(1.5)式得 $x_1=2, x_2=3$.

问题 2 探求线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{1.6}$$

解的公式.

同前面一样,用加减消元法,先消去 x_3 得:

$$\begin{cases}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})x_2=b_1a_{23}-b_2a_{13}\\(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})x_1+(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})x_2=b_1a_{33}-b_3a_{13}\end{cases}$$

它是只含 x_1 和 x_2 的二元线性方程组，然后再用消元法消去 x_2，就得到：

$$[(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})-(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})]x_1$$
$$=(b_1a_{23}-b_2a_{13})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})-(b_1a_{33}-b_3a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})$$

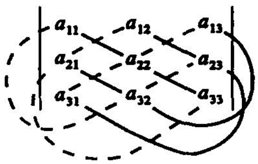
即

$$a_{13}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})x_1$$
$$=a_{13}(b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23})$$

用 D 表示系数，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

称 D 为三阶行列式，其运算规律遵循对角线法则：三条实线看做是平行于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）的连线，三条虚线看做是平行于副对角线（从左下角到右上角这条对角线）的连线．实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号．六项的代数和便是三阶行列式的展开式．



对角线法则

于是当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.6)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

我们称之为三元线性方程组(1.6)的公式解．其中 D_1、D_2、D_3 分别是在系数行列式中用 b_1、b_2、b_3 代替 x_1、x_2、x_3 的相应系数而得到的行列式．即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+3\times3\times3+2\times2\times2-2\times1\times3-3\times2\times1-1\times3\times2$$
$$=18.$$

一般地，将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列（a_{ij} 是位于第 i 行、第 j 列的元素）并在左、右侧各加一竖线，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为一个 n 阶行列式.

那么,如何定义 n 阶行列式的值、如何计算 n 阶行列式呢? 为此,我们先引入排列及其逆序数的概念.

1.1.2 排列及其逆序数

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 阶排列.

由定义 1 即知:2 级排列只有 12 和 21 两种;3 级排列有 123、132、213、231、312、321;45321 是一个 5 级排列. n 阶排列的总数是 $n!$.

定义 2 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么就称它们为一个逆序(或反序). 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

由定义 2 知,求一个排列的逆序数时,只需从前到后进行两个数的比较.

如:12345 的逆序数为 0;43521 的逆序为 8,即 $\tau(43521)=8$.

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列.

如:34521 为奇排列,$12\cdots n$ 为偶排列.

把一个排列中某两个数码的位置互换,而其余的数码不动,就得到一个新的排列,这样一个变换称为一个对换. 如:12453 与 21453.

定理 一次对换改变排列的奇偶性.

证明 当对换的两个数在排列中相邻时,排列(1):

$$\cdots jk\cdots$$

经过 j,k 对换变成(2):

$$\cdots kj\cdots$$

这里"…"表示那些不动的数.

则在(1) 中若 j,k 与其他数构成逆序,在(2) 中仍构成逆序;若不构成逆序,在(2) 中仍不构成逆序.

另一方面,若 j,k 构成逆序,则对换后逆序数就减少一个;若不构成逆序,则对换后就构成逆序,从而逆序数增加一个.

所以经过对换必然改变排列的奇偶性.

当对换的两个数在排列中不相邻时,设排列为(3):

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

经过 j,k 对换，排列(3)变成(4)：

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这样一个对换可以通过一系列相邻数的对换来实现.

从(3)出发把 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，如此进行下去，即把 k 一位一位向左移动，经过 $s+1$ 次对换(3)就变成了(5)：

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots$$

同理，再从(5)出发，把 j 一位一位向右移动，经过 s 次对换(5)就变成了(4). 即 j,k 对换可通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现.

因相邻位置的对换改变排列的奇偶性，且 $2s+1$ 为奇数，故对换改变排列的奇偶性.

推论 (i) 经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列；

(ii) 在所有 n 阶排列中，奇偶排列各半.

1.1.3 n 阶行列式的定义

有了排列及其逆序数的知识，我们再来分析三阶行列式的特点：

第一，它是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的三个元素构成的；

第二，代数和的总项数是 1,2,3 构成的排列总数 $3!=6$；

第三，每一项都带有符号，而且与元素的列指标的逆序数的奇偶性有关(设元素的行指标按自然顺序排列)：当逆序数为奇数时，取负号；当逆序数为偶数时，取正号.

这样，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

将其推广至一般情形，就有下面的 n 阶行列式的定义.

定义 4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(1.8)式都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(1.8)式带有正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(1.8)带有负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示所有 n 阶排列求和.

由定义知：

① n 阶行列式是 $n!$ 个乘积的代数和，所以它是一个数. 特别地：有一行或一列的元素全为 0 时该行列式为 0.

② 每一个乘积的元素是按行指标排成自然顺序，再由列指标所成的排列的奇偶性来决定其符号的.

事实上，还可以将每一个乘积的元素按列指标排成自然顺序，而得到与定义 4 等价的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.10}$$

这里 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 亦表示所有 n 阶排列求和.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 因为展开式中的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. 所以当 $j_1\neq 4$ 时，$a_{1j_1}=0$，故该项为 0.

当 $j_1=4$ 时，同理可得，只有 $j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$，该项才不为 0.

而 $\tau(4321)=6$，即 4321 为偶排列. 因此行列式 $=1\times2\times3\times4=4!=24$.

一般地有：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)} \cdot a_1a_2\cdots a_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_1a_2\cdots a_n.$$

例 4 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 因展开式中的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 而第 n 行中只有 $a_{nn}\neq0$,所以只有 $j_n=n$ 时该项才可能不为 0.

又在第 $n-1$ 行中只有 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 不为 0,所以 $j_{n-1}=n-1$ 或 n;而 $j_n=n$,故 $j_{n-1}=n-1$. 同理可依次得到 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_1=1$.

故由 $\tau(12\cdots n)=0$ 知:该行列式结果为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

即该行列式等于主对角线上元素的乘积.

特别地有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n.$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. (4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. (1) 计算排列 45321 的逆序数;

(2) 在四阶行列式的展开式中,$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 应带什么符号?

3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$

1.2 n 阶行列式的性质与展开

一般情况下，要用定义计算一个 n 阶行列式需要做 $n!\cdot(n-1)$ 次乘法. 当 n 较大时，$n!$ 是一个相当大的数字. 所以，用定义计算行列式是困难的，甚至是不可能的，这就迫使我们要设法寻找其他计算方法，那就是设法将其转化为简单行列式(如已介绍的对角线行列式，三角行列式等)，或进行降阶. 那么，如何进行转化或降阶呢？这即是本节要研究的 n 阶行列式的性质与展开.

1.2.1 n 阶行列式的性质

设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其行列互换后得到的行列式记为 $D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称 D' 为 D 的转置行列式. 由行列式定义中的(1.9)和(1.10)式，即得行列式的性质 1.

性质 1 行列式的行列互换，其值不变.

此即表明行列式的行和列具有同等的地位，即行列式的行所具有的一切性质对列仍然成立.

性质 2
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

即是说,一行的公因子可以提到外面,或者说以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式.

证明 设 $b_{ij}=ka_{ij}$,则由(1.9)式得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}b_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$
$$= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}\cdot a_{ij_i}\cdot a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$
$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

故性质 2 成立.

进一步讨论,如果令 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n)$,则由

$$\begin{aligned}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \\ &\quad \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\end{aligned}$$

得到行列式的性质 3.

性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$