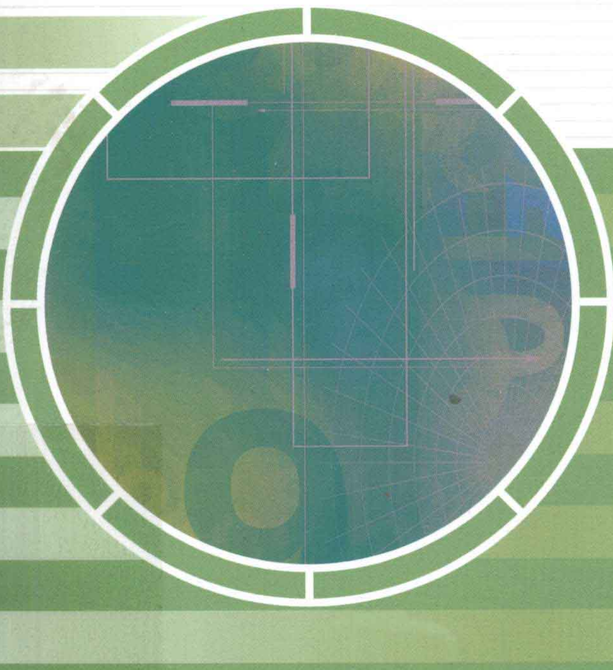
微积分教程（下）

主　编　金义明　李剑秋
副主编　丁嘉华　卢俊峰



浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分教程(下)

主　编　金义明　李剑秋
副主编　丁嘉华　卢俊峰

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程. 下 / 金义明，李剑秋主编. — 杭州：浙江工商大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-81140-455-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①金… ②李… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 276686 号

微积分教程(下)

金义明 李剑秋 主编

责任编辑	郦 晶
封面设计	刘 韵
责任印制	汪 俊
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012) (E-mail:zjgsupress@163.com) (网址:http://www.zjgsupress.com) 电话:0571-88904980,88831806(传真)
排 版	杭州朝曦图文设计有限公司
印 刷	杭州杭新印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	12.75
字 数	262 千
版 印 次	2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-81140-455-5
定 价	29.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88804227

前　言

微积分的建立是人类智慧最伟大的创造之一，一部微积分发展史，是人类一步一步顽强地认识客观事物的历史，是人类理性思维的结晶。它给出一整套的科学方法，开创了科学的新纪元，并因此加强与加深了数学的作用。恩格斯说："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。"目前，微积分的理论与方法不仅广泛地应用于自然科学、工程技术领域，并已渗透到社会、经济各个领域，并日益显示出其重要性。学习和掌握微积分的基础知识，不仅是对理工类学生的要求，也是对经济管理类、人文科学等各类学生的基本要求和必备素质。

但是，囿于文科类学生的知识结构，微积分教与学的双方都存在较大困难。为了编写一本适合经济管理类本科学生学习微积分的教材，本书在以下几个方面做了努力：

(1) 注意与中学数学的衔接，增加或强化了中学数学教材中删去的微积分所必备的知识点，如反三角函数、和差化积与积化和差公式等；

(2) 尽量从实际出发，注重概念与定理的直观描述和实际背景，注重知识的生动性和趣味性，克服学生在数学认知上的心理障碍，逻辑推理做到删繁就简，够用就行，对学生感到疑惑或容易犯错误的知识点，则讲深、讲透；

(3) 例题丰富多样，讲解浅显易懂，多联系实际，培养学生用数学的能力，从而不断提高学生学习数学的主动性和积极性；

(4) 加强微积分各章节内容在经济管理中的应用，增强学生将数学应用到解决经济管理方面问题的意识和能力；

(5) 习题精心挑选，覆盖面广，难易程度呈阶梯型分布，循序渐进。

本书是按照教育部对经济、管理类大学本科微积分考试大纲，结合编者多年来在经济管理类专业微积分课程的教学实践、教学改革中所积累的经验，充分考虑到独立学院学生的特点，并参考研究生入学考试数学考试大纲，编写而成。

本书编写的宗旨是：坚持"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，以"掌握概念，强

化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标。

本书可作为高等学校经济管理各专业及相关专业的微积分教材。全书分上下两册，共分十章，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程和差分方程。第一、二、三章由金义明编写，第四、九、十章由李剑秋编写，第五、六章由卢俊峰编写，第七、八章由丁嘉华编写，最后由金义明总纂定稿。以上编写人员均为浙江工商大学杭州商学院教师。本教材由金义明制作了配套的PPT电子教案。

讲授本教材约需130课时。

由于编者的水平有限，书中肯定存在疏漏和不足，敬请广大师生和读者不吝指正。

编　者

2011年5月于浙江工商大学

目　录

第六章　定积分

定积分是积分学中的基本问题，它起源于求图形的面积和体积等实际问题. 直到 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨才在前人大量研究工作的基础上提出了定积分的概念，并建立了微积分基本定理，即牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式，这个公式揭示了定积分与原函数、不定积分之间的内在关系，使得我们在第五章中所学的不定积分有实质性的意义. 本章将从几何学、物理学、经济学问题出发引入定积分的概念，然后讨论它的性质、计算方法以及定积分在几何学与经济学中的应用.

6.1　定积分的概念及性质

6.1.1　定积分概念

6.1.1.1　引例

(1) 曲边梯形的面积

在初等数学中，我们学过求矩形、三角形等以直线为边的平面图形的面积，而在实际应用中，往往需要求以曲线为边的图形（曲边形）的面积.

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续. 在直角坐标系下，由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形称为曲边梯形（见图 6－1－1）.

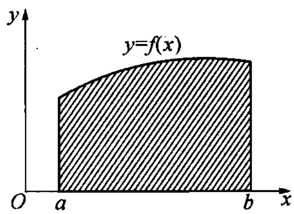


图 6－1－1

由于曲边形总可以分解为若干个曲边梯形，因此，曲边形的面积问题就可以归结为求曲边梯形的面积.

如何求曲边梯形的面积呢？如果 $y=f(x)$ 恒等于常数，则这个曲边梯形实际上是矩形，我们知道，矩形的面积＝底×高，而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是变化的，故它的面积不能直接按照矩形的面积公式来计算. 但是，由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，在很小一段区间上它的变化很小，近似于不变，因此若把区间 $[a,b]$ 划分为许多个小区间，在每个小区间上用某一点处的高来近似代替同一个小区间上各点处的窄曲边梯形的

高，从而以相应的窄矩形面积来近似窄曲边梯形的面积. 所有窄矩形面积之和就是所求曲边梯形面积的近似值. 区间分割越细，近似程度就越高，将区间$[a,b]$无限细分，这时得到的所有窄矩形面积之和的极限定义为所求曲边梯形的面积. 这一定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法，具体步骤如下.

① **分割** 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a,b]$等分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

这些小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，过每个分点 x_i 作垂直于 x 轴的直线，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形(见图6-1-2). 用 A 表示所求曲边梯形的面积，ΔA_i 表示第 i 个窄曲边梯形的面积，则由面积的可加性知

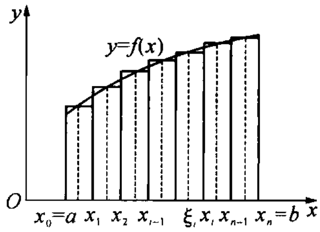


图 6-1-2

$$A=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i.$$

② **近似** 在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$内任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$ 为高作窄矩形，用窄矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_i)\dfrac{b-a}{n}$ 作为窄曲边梯形的面积 ΔA_i 的近似值，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

③ **求和** 把 n 个窄矩形面积相加就是曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

④ **取极限** 当等分数 n 无限增大而小区间长度$\dfrac{b-a}{n}\to 0$时，取上述和式的极限，便得到曲边梯形面积的精确值，即

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

(2) 变速直线运动的路程

设某物体做变速直线运动，已知 $v=v(t)$ 是时间间隔$[T_1,T_2]$上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，计算物体在这段时间内所经过的路程 s.

我们知道，如果物体做匀速直线运动，则有下列公式

路程 = 速度 × 时间.

由于变速直线运动在$[T_1,T_2]$这段时间内速度是变化的，因此物体在$[T_1,T_2]$内经过的路程不能用上述公式计算. 然而，由于 $v(t)$ 是连续变化的，在很短一段时间内，其速度的

变化很小，可以近似把物体看成是做匀速直线运动. 因此，若把时间间隔划分为许多个小时间段，在每个小时间段内，以匀速运动代替变速运动，就可计算出每个小时间段内路程的近似值；再对各小时间段内路程的近似值求和，则得到整个路程的近似值；最后利用求极限的方法得到所求变速直线运动的路程的精确值. 具体步骤如下：

① **分割** 用分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

将时间间隔$[T_1, T_2]$等分成 n 个小时间段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n].$$

各小时间段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \dfrac{T_2 - T_1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，相应地，在各小段时间内物体所经过的路程依次为：$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_i, \cdots, \Delta s_n$.

② **近似** 在每个小时间段$[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 内任取一点 $\tau_i (t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i)$，以时刻 τ_i 的速度 $v(\tau_i)$ 近似代替$[t_{i-1}, t_i]$上各时刻的速度，得到$[t_{i-1}, t_i]$内物体所经过的路程 Δs_i 的近似值，即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

③ **求和** 将这样得到的 n 个小时间段上路程的近似值之和作为所求变速直线运动路程 s 的近似值，即

$$s \approx \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \frac{b-a}{n}.$$

④ **取极限** 当 $n \to 0$ 时，取上述和式的极限，便得到变速直线运动路程 s 的精确值

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \frac{b-a}{n}.$$

(3) 收益问题

这里我们考虑经济学中的收益问题. 设某商品的价格 P 是销售量 x 的函数 $P = P(x)$，x 为连续变量，求销售量从 a 变到 b 时的收益 R.

类似于前面两个例子的做法，首先，用点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将$[a, b]$等分成 n 个销售量段，

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

在每个销售量段$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i，只要等分得足够细，该段上商品的价格可近似为 $P(\xi_i)$，同时收益可近似为 $P(\xi_i)\Delta x_i = P(\xi_i) \dfrac{b-a}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因此，在销售量段$[a, b]$上的收益 R 可近似地看做 n 段的收益之和，即

$$R \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i) \frac{b-a}{n}.$$

显然，$[a,b]$ 划分越细，近似程度越高. 当等分数 $n\to\infty$ 时，上述和式的极限即为收益 R 的精确值，即

$$R=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i)\,\frac{b-a}{n}.$$

6.1.1.2 定积分定义

从前面三个引例我们看到，无论是求曲边梯形的面积问题和变速直线运动的路程问题，还是求经济学中的收益问题，实际背景完全不同，但是解决的方法是相同的，都可以通过“分割、近似、求和、取极限”转化为形如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的和式的极限问题. 这种解决问题的方法可广泛应用于各个领域，许多量的计算都归结为这种类型的和式的极限计算. 因此，我们将这种具有相同结构的和式的极限抽象为一个一般的数学概念 —— 定积分.

定义 6.1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

来等分区间 $[a,b]$，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 在每一小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并作和式

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

若当 $n\to\infty$ 时，和式极限存在，且此极限不依赖于 ξ_i 的选择，则称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n},$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为积分表达式，$[a,b]$ 称为积分区间，a 和 b 分别称为积分下限和积分上限.

关于定积分的定义，我们要做以下两点说明：

(1) 定积分是和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限，即是一个确定的常数，它只与被积函数 $f(x)$ 以及积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么符号表示无关，即把积分变量 x 改写成其他字母，例如 t 或 u，定积分的值保持不变，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 从定义我们可以给出以下的推断：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上

必定有界. 这是因为，若 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界，则这个函数至少会在其中某个小区间$[x_{i-1},x_i]$上无界. 因此，可在该小区间上选取一点 ξ_i，使得 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于预先给定的数，随之可使和数 σ 也如此，从而和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 就不可能有有限的极限. 由此可见，可积函数一定是有界的，而无界函数一定不可积.

对于定积分，还有一个重要问题：函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足什么条件，$f(x)$ 在$[a,b]$上一定可积?关于这个问题，我们给出定积分存在的充分条件而不加以证明.

定理 6.1　如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

定理 6.2　如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界，且只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

按照定积分的定义，我们前面所举的三个例子可以简洁地表述如下.

(1) 由连续曲线 $y=f(x)[f(x)\geqslant 0]$，直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 就是函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 物体以速度 $v=v(t)$ 做变速直线运动，在时刻 $t=T_1$ 到时刻 $t=T_2$ 通过的路程 s 等于函数 $v(t)$ 在时间间隔$[T_1,T_2]$上的定积分，即

$$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 价格为 $P=P(x)$(x 为销售量)的商品，销售量从 $x=a$ 变到 $x=b$ 所得的收益 R 等于 $P(x)$ 在$[a,b]$上的定积分，即

$$R=\int_a^b P(x)\mathrm{d}x.$$

下面我们讨论定积分的几何意义. 若在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积；若在$[a,b]$上 $f(x)\leqslant 0$，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴下方，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值；若在$[a,b]$上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时，函数 $f(x)$ 图形的某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴的下方(见图 6-1-3). 我们将所围的面积按上述规律赋予正、负号，则在一般情形下，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及直线 $x=a$，$x=b$ 之间各部分面积的代数和. 在图 6-1-3 中，

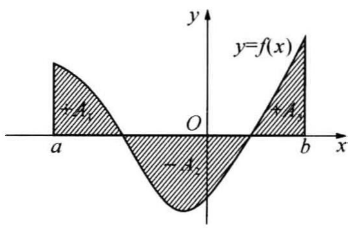


图 6-1-3

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$

例 1 利用定积分的几何意义计算：

(1) $\int_a^b k\,\mathrm{d}x \quad (k > 0)$ (2) $\int_a^b 2x\mathrm{d}x \quad (0 < a < b)$

解 (1) 待求的定积分$\int_a^b k\,\mathrm{d}x$是矩形 $ABCD$ 的面积(见图 6-1-4)，即

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a).$$

(2) 待求的定积分$\int_a^b 2x\mathrm{d}x$是梯形 $ABCD$ 的面积(见图 6-1-5)，即

$$\int_a^b 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2b+2a)(b-a) = b^2 - a^2.$$

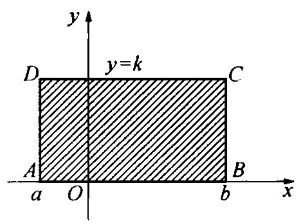


图 6-1-4

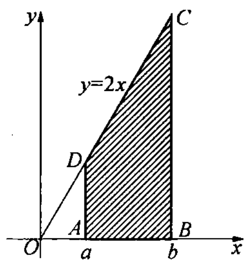


图 6-1-5

例 2 利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 因为被积函数 $f(x) = x^2$ 在积分区间$[0,1]$上连续，而连续函数是可积的，所以积分与 ξ_i 的取法无关，因此，为了便于计算，不妨把区间$[0,1]$分成 n 等份，分点为 $x_i = \frac{i}{n}$，每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度为 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$，取 $\xi_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，于是得和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

当 $n \to \infty$ 时，取上式的极限，按定积分的定义，即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sigma = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

6.1.2 定积分性质

为了进一步讨论定积分的理论与计算，我们要介绍定积分的一些基本性质. 对于定

积分作两点补充规定：

(1) 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

根据上述规定，交换定积分的上下限，其绝对值保持不变而符号相反. 在后续的讨论中，如不特别指出，对定积分的上下限的大小均不加限制，并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 1 被积函数中的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ 是常数}).$$

证
$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right]$$
$$=k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 两个函数的和或差的定积分等于它们定积分的和或差，即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证
$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\frac{b-a}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\pm\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

利用性质 1 和性质 2，易得

$$\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 k_1 和 k_2 为常数. 上式表明，定积分关于被积函数具有线性性质，也就是说，函数的线性组合的定积分等于定积分的线性组合. 这个法则可推广到有限多个函数的代数和的情形.

性质 3(区间可加性)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 先假设 $a<c<b$. 将 c 取作区间 $[a,b]$ 的一个分点，则 $[a,b]$ 可划分为两个小区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$. 由定积分的定义知，在 $[a,b]$ 上的和式等于 $[a,c]$ 上的和式加上 $[c,b]$ 上的和式，即

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\frac{c-a}{n}+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\frac{b-c}{n},$$

当 $n \to \infty$ 时，上式两端取极限，即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $a<b<c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同理可证 $c<a<b$ 的情形. 因此，不论 a,b,c 的相对位置如何，所证等式总成立.

性质 4 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.$$

显然，定积分 $\int_a^b \mathrm{d}x$ 在几何上表示以 $[a,b]$ 为底，$f(x)=1$ 为高的矩形的面积. 这个性质的证明由读者自行完成.

性质 5(保号性质) 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0 \quad (a<b).$$

证 因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $f(\xi_i)\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 又由于 $\frac{b-a}{n}>0$，因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\geqslant 0,$$

令 $n\to\infty$，便得所证不等式.

推论 1 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

证 因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质 5 知，

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

再利用性质 2，得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

证　因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以由推论 1 及性质 1 可得

$$-\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

性质 6(估值定理)　设 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证　因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，所以由推论 1 得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x.$$

再由性质 1 及性质 4，即得所证不等式.

当 $f(x) \geqslant 0$ 时，性质 6 的几何意义是：由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积介于以 $[a,b]$ 为底，分别以 $f(x)$ 的最小值 m 与最大值 M 为高的矩形面积之间(见图 6-1-6).

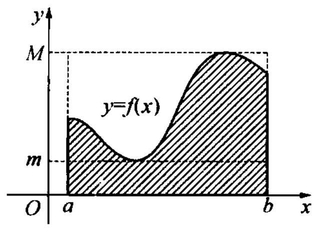


图 6-1-6

性质 7(定积分中值定理)　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

上式称为**积分中值公式**.

证　因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则由闭区间上连续函数的最大值和最小值定理知，

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

其中 M，m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 又由性质 6 知

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

再用 $b-a$ 去除不等式两边，得

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M,$$

上式表明 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 之间. 由连续函数

的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi).$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，这个定理的几何意义为：在区间$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使得以区间$[a,b]$为底，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积（如图 6-1-7 所示）.

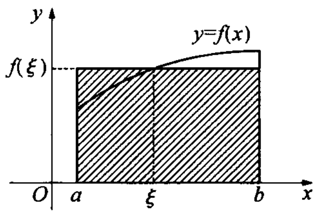


图 6-1-7

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的平均值，它是有限个数的平均值概念的拓展. 例如，如果已知某地某日的气温曲线 $T=f(t)$，其中 t 为时间，则 $\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t$ 表示该地该日的平均气温.

例 3 比较定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$ 的大小.

解 因为在区间$[0,1]$上 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$，由推论 1 知，

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x.$$

例 4 估计定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

解 令 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，因为 $f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上的最大值为 $M=f(1)=\mathrm{e}$，最小值为 $m=f(0)=1$，根据定积分的估值定理得

$$1\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}.$$

例 5 证明不等式

$$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2}.$$

证 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=0$，得 $x=0$. 而

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\quad f(0)=1,\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

比较知 $f(x)$ 在$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$上的最大值为 1，最小值为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

由估值定理得