

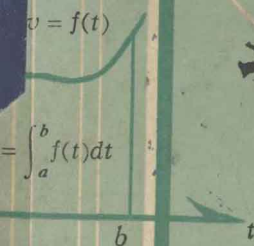


湖南省高师函授试用教材

数学分析

SHU XUE FEN XI

上册


$$v = f(t)$$

$$= \int_a^b f(t) dt$$

b

t

编 者 的 话

遵照英明领袖华主席关于“采取有力措施，培训教师，加速编写新教材，充分利用各种现代化手段，提高教育质量”的指示，我们在省教育厅党委的领导下，编写了“数学分析”函授试用教材，供我省中学数学教师进修学习使用。

由于我们水平有限，加之时间仓促，教材的错误和缺点在所难免，恳切希望广大读者把对教材的意见和发现的问题及时告诉我们，以便在再版时改正。

湖南师范学院数学系

湖南省中小学教学辅导部

一九七八年七月

希 腊 字 母

字 母	中文发音	汉语拼音字母拼音
A α	阿 拉 法	alfa
B β	贝 他	beta
Γ γ	伽 玛	gama
Δ δ	得 尔 他	delta
E ε	唉普西弄	epsilon
Z ζ	绥 他	zheita
H η	唉 他	eta
Θ θ	斯 伊 他	sita
I ι	优 他	yota
K κ	卡 怕	kapa
Λ λ	兰 母 大	lamda
M μ	米 优	miu
N ν	泥 优	niu
Ξ ξ	刻 斯 伊	ksi
O ο	欧迷克弄	orniklon
Π π	派 爱	pai
P ρ	鲁 呵	lo
Σ σ	西 格 玛	sigma
T τ	套	tao

Υ υ

伊普西弄

Ipsilon

Φ φ

夫 爱

fai

Χ χ

气

qi

Ψ ψ

普斯伊

psi

Ω ω

欧米伽

omiga

目 录

第一篇 分析引论

第一章 函 数

§1 函数的概念及其表示法	(1)
1.1 常量与变量及其变动区间	(1)
1.2 函数的定义及其记号	(5)
1.3 对函数定义的几点注意	(7)
1.4 函数的表示法	(11)
§2 函数的四则运算、复合函数、反函数	(17)
2.1 函数的四则运算	(17)
2.2 复合函数	(20)
2.3 反函数	(22)
§3 初等函数	(26)
§4 几种特殊函数类	(27)
总 结	(33)

第二章 极 限

§1 绝对值	(36)
1.1 绝对值的概念	(37)
1.2 绝对值的几个重要性质	(37)
§2 序列的极限	(43)
2.1 序列的概念	(43)
2.2 序列的极限	(45)
2.3 根据定义求序列的极限	(48)
§3 函数的极限	(55)
3.1 函数极限的定义及其几何意义	(55)
3.2 函数的单边极限	(64)
§4 极限概念的统一定义	(65)
4.1 极限概念的一般化	(65)
4.2 收敛变量的凝聚性	(67)
§5 无穷小量及其运算	(71)
5.1 无穷小量	(71)
5.2 有界变量与无界变量	(74)
5.3 无穷小量的运算	(76)

§6	无穷大量及其与无穷小量的关系	(80)
§7	极限运算	(84)
§8	极限存在判别法和两个重要极限	(97)
8.1	极限存在判别法	(97)
8.2	两个重要的极限	(100)
8.3	函数极限与序列极限的关系	(111)
§9	例	(114)
§10	无穷小量的分级	(119)
	总 结	(128)

第三章 连续函数

§1	函数的连续性	(135)
1.1	连续函数概念	(135)
1.2	函数的单边连续与在区间上的连续	(142)
§2	函数的间断点	(143)
§3	连续函数的运算及复合函数的连续性	(148)
3.1	连续函数的运算	(148)

3.2 复合函数的连续性.....	(150)
§4 连续函数的性质.....	(151)
§5 初等函数的连续性.....	(160)
§6 函数的连续性在计算极限时的应用.....	(163)
总 结.....	(167)

第二篇 微 分 学

第四章 导 数

§1 导数的概念.....	(171)
1.1 非等速运动的瞬时速度问题.....	(172)
1.2 曲线的切线斜率.....	(174)
1.3 导数的定义.....	(176)
§2 导数运算法则.....	(189)
2.1 常量的导数.....	(189)
2.2 代数和的导数.....	(190)
2.3 乘积的导数.....	(191)
2.4 商的导数.....	(193)
2.5 反函数的导数.....	(195)
2.6 复合函数的导数.....	(198)

§3	初等函数的导数.....	(206)
§4	高阶导数	(207)
§5	二次曲线的切线.....	(210)
	总 结(附变化率举例).....	(226)

第五章 微 分

§1	微分概念	(234)
1.1	微分的定义.....	(234)
1.2	导数与微分的关系.....	(236)
1.3	微分的几何意义.....	(239)
§2	微分法则	(239)
§3	微分形式的不变性	(241)
§4	微分在近似计算上的应用	(243)
§5	高阶微分	(244)
5.1	高阶微分的定义及其求法.....	(244)
5.2	高阶微分形式不变性的破坏.....	(246)
	总 结.....	(247)

第六章 微分学的基本定理

§1 中值定理	(252)
1.1 罗尔定理	(252)
1.2 拉格朗日定理	(255)
1.3 柯西定理	(258)
§2 洛必达法则	(260)
2.1 不定型 $\frac{0}{0}$	(260)
2.2 不定型 $\frac{\infty}{\infty}$	(265)
2.3 其它不定型 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$	(269)
§3 台劳公式	(275)
3.1 多项式的台劳公式	(276)
3.2 函数的台劳公式	(277)
3.3 近似计算	(284)
总 结	(291)

第七章 微分学在研究函数上的应用

§1 函数的增减性	(295)
-----------------	-------

§2	函数的极值	(303)
2.1	函数的局部极值	(303)
2.2	函数的最大值与最小值	(313)
§3	曲线的凹向与拐点	(321)
§4	曲线的渐近线	(327)
§5	函数的作图	(334)
§6	方程的近似解法	(341)
	总 结	(349)

第三篇 积 分 学

第八章 不定积分

§1	原函数与不定积分的概念	(357)
1.1	原函数的概念	(357)
1.2	不定积分及其几何意义	(360)
1.3	积分法与微分法的关系	(362)

§2 积分法的基本公式与线性法则	(365)
2.1 基本积分表	(365)
2.2 积分法的线性法则	(367)
§3 变量替换积分法	(372)
§4 分部积分法	(385)
总 结	(394)

第九章 几类函数的积分法

§1 有理函数的积分法	(399)
§2 三角函数的积分法	(413)
§3 几种无理函数的积分法	(420)
总 结	(429)

第一篇 分析引论

第一章 函 数

函数是数学分析研究的主要对象，因此开始学习数学分析时，首先对函数概念要有清楚的理解。读者虽然在中学教材中接触过一些有关函数的知识，但是不够详尽、透彻，因而有必要把函数概念详细、深刻地讲一讲。

§ 1 函数的概念及其表示法

1.1 常量与变量及其变动区间

在任何自然科学和技术科学中，我们都会碰到一个基本概念，就是量的概念。例如：长度、面积、体积、重量、温度、力等等都是量。然而一切量都有一个共同的性质，那就是每一个量都可以用同种类的任意量作为测量单位来测量它。例如，以“米”作为长度的测量单位，以“公斤”作为重量的测量单位等。

一个具体的量与它同类的测量单位相比时，其比值将是一个抽象的数，这个抽象的数叫做这个具体量的数值，简称为已给量的值。

数学中所研究的量，乃是从生产实践中抽象出来的量①（数）。但是这种抽象只是暂时的脱离了生产实际。当人们掌握了量的某种规律之后，再将它应用到生产实践当中，就能解决生产实际中的问题。

在我们所研究的自然现象或技术过程中，常常会出现种种不同的量。其中有的量在所研究的过程中保持不变，这种量叫做**常量**；也有的量在这个过程中可以取得不同的值，这种量叫做**变量**。例如，飞机在两站之间飞行的过程中，乘客的数目、全部行李的重量等都是常量；而飞机离两站的距离，离地面的高度以及汽油的储存量等都是变量。再例如，在圆的半径增长的过程中，圆的周长，圆的面积都是变量，而圆的周长与其直径之比却是一个常量（数 π ）。值得注意的是，某一个量是常量还是变量，是对一个确定的过程而言的，它并不是绝对的。例如，半径为 r 的圆，半径保持不变，在沿着一条平面直线滚动的过程中，则圆的面积 πr^2 是一个常量；在当园心固定，半径增大的过程中，则圆的面积就变成一个变量了。还有，在过程中变化很小的量，无碍于问题的研究时也可以看作常量。例如重力加速度 g ，在不同地区本不相同，但因其相差甚微，在一般的物理问题中，我们都把 g 当作常量。

恩格斯说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，……。”

自从变量引入数学中之后，数学就获得了新的生命力，于

①正因为如此，所以在以后的叙述中量与数不加以区别。

是数学就蓬勃发展起来，从而就能更好地为生产服务。

在数学分析中经常用字母：

$$x, y, z, t, \dots$$

表示变量；用字母：

$$a, b, c, d, \dots$$

表示常量。

变量在数轴上用变动点来表示，常量在数轴上用固定点来表示。

下面介绍今后常常要用到的区间概念。

设 a 与 b 是两个实数，且 $a < b$ 。

满足不等式：

$$a < x < b$$

的一切实数值 x 的全体叫做**开区间**，表示为 (a, b) 。数 a 与 b 不属于开区间。在几何图形上，开区间 (a, b) 为介于数轴上 a 与 b 二点之间线段上点的全体，点 a 与 b 不属其中(如图1—1)。



图1—1

我们规定包含已知点 a 的任一开区间称为这一点的**邻域**，有时表为 $a - \delta < x < a + \delta$ ($\delta > 0$)。

满足不等式：

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数值 x 的全体叫做**闭区间**，表示为 $[a, b]$ 。数 a 与 b

属于闭区间。在几何图形上，闭区间 $[a, b]$ 是介于数轴上 a 与 b 二点之间线段上点的全体， a 、 b 二点也属于其中(如图1—2)。



图1—2

满足不等式:

$$a \leq x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做左闭区间，表示为 $[a, b)$ 。左闭区间 $[a, b)$ 包含数 a ，不包含数 b 。在几何图形上，它表示介于 a 与 b 二点之间线段上点的全体，点 a 属于它，点 b 不属于它(如图1—3)。



图1—3

满足不等式:

$$a < x \leq b$$

的一切实数 x 的全体叫做左开区间，表示为 $(a, b]$ 。左开区间 $(a, b]$ 不包含数 a ，而包含数 b 。在几何图形上，它表示介于 a 与 b 二点之间线段上点的全体，点 a 不属于它，点 b 属于它(如图1—4)。



图1—4

此外，我们规定：

实数的全体，用符号 $(-\infty, +\infty)$ 表示。

满足不等式：

$$x < a$$

的实数 x 全体用符号 $(-\infty, a)$ 表示。

满足不等式：

$$b \leq x$$

的实数 x 全体用符号 $[b, +\infty)$ 表示。

类似的可以推得符号 $(-\infty, a]$ 及 $(b, +\infty)$ 的意义。

$$x \leq a \qquad x > b$$

1.2 函数的定义及其记号

客观世界的事物、现象尽管是无穷无尽的，它的形态和种类尽管是多种多样的，但它们之间都是相互联系相互依从的。这是物质世界的普遍规律。这种规律在数学中就表现为量与量之间的相互关系。在某一个具体问题当中，往往不只是有一个量而是有几个量。这些量之间彼此并不是孤立的，而是互相联系互相依从的。我们先看下面的几个例子：

例1. 圆的面积 S 与它的半径 r 有这样的依从关系：

$$S = \pi r^2 \qquad (1)$$

例2. 理想气体的绝对温度 T ，体积 V 与压强 P 之间存在的依从关系是：

$$P = \frac{RT}{V} \qquad (2)$$

这里 R 是常数。