青年自学丛书

数学1—4册习题解答

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

下　册

内蒙古人民出版社

第六章　数列极限、排列组合、应用数学初步

习 题 一（第三册第 735 页）

1. （1） $a_5=-64, a_8=512$　　（2） $a_5=\frac{1}{27}, a_8=\frac{1}{729}.$

（3） $a_5=\frac{\sqrt{3}}{9},\quad a_8=\frac{1}{27},$

（4） $a_5=-7+5\sqrt{2},\ a_8=-99+70\sqrt{2}.$

2. （1） $\because\quad a_2=a_1q=18,\quad a_4=a_1q^3=8,$

$\therefore\quad \frac{a_1q^3}{a_1q}=\frac{8}{18},\ q^2=\frac{4}{9},\ q=\pm\frac{2}{3}.$

$\therefore\quad a_1\cdot\frac{2}{3}=18,\ a_1=27.$

或　$a_1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=18,\ a_1=-27.$

$\therefore\quad a_1=27,\quad q=\frac{2}{3}$　或　$a_1=-27,\ q=-\frac{2}{3}$

因此，$a_3=a_1q^2=27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=12,$

或　　$a_3=(-27)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-12,$

$\therefore\quad a_3=12, q=\frac{2}{3}$　或　$a_3=-12, q=-\frac{2}{3}.$

（2） $\because\quad a_5=a_1q^4=4, a_7=a_1q^6=6,$

$\therefore \quad \dfrac{a_1q^6}{a_1q^4}=\dfrac{6}{4}, \quad q^2=\dfrac{3}{2}, q=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}},$

$\therefore \quad a_1\cdot q^4=a_1\cdot\dfrac{9}{4}=4 \quad a_1=\dfrac{16}{9}.$

$\therefore \quad a_{10}=\dfrac{16}{9}\cdot\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^9=\pm\dfrac{9\sqrt{6}}{2}.$

(3) $a_5=a_1q^4=a_1\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{81}{8}$

$\therefore \quad a_1=2.$

(4) $a_4=(-2.5)q^3=-\dfrac{1}{50}, \quad q=\dfrac{1}{5}.$

3. (1) ±32, (2) $\pm\dfrac{15}{4}$, (3) $\pm\sqrt{7}$, (4) $\pm\dfrac{2-x}{1-x}$.

4. (1) 15, (2) $31\dfrac{1}{2}$ 或 $19\dfrac{1}{2}$.

5. (1) $S_8=\dfrac{a_1(q^8-1)}{q-1}=\dfrac{a_1[(-2)^8-1]}{-2-1}=\dfrac{a_1(256-1)}{-3}=\dfrac{85}{2}.$

$\therefore \quad a_1=-\dfrac{1}{2}, \quad a_8=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(-2)^7=64.$

(2) $S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{a_1\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{31}{8}$

$\therefore \quad a_1=2, \quad a_5=\dfrac{1}{8}.$

6. (1) $a_n=a_1q^{n-1}=(-5)\cdot q^{n-1}=\dfrac{1}{25}, \quad \therefore q^{n-1}=-\dfrac{1}{125}$

$S_n=\dfrac{-5(1-q^n)}{1-q}=-\dfrac{104}{25}$

把 $q^{n-1}=-\frac{1}{125}$代入上式，得 $q=-\frac{1}{5}$.

$\therefore\quad \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{3},\quad \therefore\quad n=4.$

(2) $\frac{19}{3}=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]}{1-\frac{2}{3}}=\frac{a_1-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}},\ \therefore\quad a_1=3.$

$\therefore\quad \frac{4}{3}=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 得 $n=3.$

7. 设四年后平均亩产量为 x 斤，

那么，$x=620\cdot(1+16\%)^4$

$\lg x=\lg 620+4\lg 1.16=2.7924+4\times 0.0645$

$=3.0504.$

$\therefore\quad x\approx 1123$(斤).

答：四年后平均亩产 1123 斤

8. 设三年后逼粮 x 斗，

那么：$x=15(1+120\%)^3$

$\lg x=\lg 15+3\lg 2.2=1.1761+3\times 0.3424=2.2033$

$\therefore x\approx 159.7$(斗)

答：三年后逼粮 159.7 斗

9. 设 x 月后超过 107 台，那么

$$\frac{20\left[\left(1+\frac{20}{100}\right)^{x}-1\right]}{\left(1+\frac{20}{100}\right)-1}>107.\quad \therefore\quad x>3.$$

答：三月后(即第四月起)，总产超过 107 台

10. 设三个数为 $a-d, a, a+d$.

那么$\begin{cases} a-d+a+a+d=21 \\ (a-d+1)(a+d+15)=(a+5)^2 \end{cases}$

解之,得 $a=7$, $d_1=2, d_2=-16$.

因此,原来的三个数为5,7,9或23,7,−9.

11. 证明:

∵ a, b, c 是等比数列的第 p, q, r 项,

设首项为 A,公比为 Q,

那么$\begin{cases} AQ^{p-1}=a, \\ AQ^{q-1}=b, \\ AQ^{r-1}=c. \end{cases}$

∴ $a^{q-r}\cdot b^{r-p}\cdot c^{p-q}$

$=(AQ^{p-1})^{q-r}\cdot(AQ^{q-1})^{r-p}\cdot(AQ^{r-1})^{p-q}$

$=A^{q-r+r-p+p-q}\cdot Q^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$A^0\cdot Q^0=1$.

12. 证明:

∵ a, b, c 成等差数列,

∴ $2b=a+c$,

∵ x, y 分别为 a, b 和 b, c 的等比中项,

∴ $x^2=ab$, $y^2=bc$,

∴$2b^2=(a+c)b=ab+bc=x^2+y^2$,

∴ x^2, b^2, y^2 成等差数列.

13. 证明

∵ A, B, C 成等差数列,∴ $2B=A+C$.

∵ $A+B+C=180^\circ$, ∴ $2B=A+C=180^\circ-B$,

∴ $B=60^\circ$

又∵ a, b, c 成等比数列, ∴$b^2=ac$.

由正弦定理，得：$(2R\sin B)^2=(2R\sin A)(2R\sin C)$，

即 $\sin^2 B=\sin A\cdot\sin C$

$\therefore\ \frac{3}{4}=-\frac{1}{2}[\cos(A+C)-\cos(A-C)]$

$=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}-\cos(A-C)\right].$

$\therefore\ \cos(A-C)=1$，即 $A-C=0$，

$\therefore\ A=C$，　$\therefore A=C=B=60°$.

$\therefore\ a=b=c$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}a^2\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

14. 证明：

(1) $\because$ $\lg\sin A$，$\lg\sin B$，$\lg\sin C$ 成等差数列，

$\therefore\ 2\lg\sin B=\lg\sin A+\lg\sin C$

即 $\sin^2 B=\sin A\cdot\sin C$.

$\therefore\ \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\sin^2 A}{\sin A\cdot\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$.

(2) $\because$ 方程有等根.

$\therefore\ 4c^2-4ac=0$，即 $c(c-a)=0$，$\therefore c=a$

$\therefore\ \sin C=\sin A$

又 $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{a}{c}=1$，$\therefore\ \sin^2 A=\sin^2 B$.

$\therefore\ \sin A=\sin B$，（舍去 $\sin A=-\sin B$）

$\therefore\ \sin A=\sin B=\sin C$.

练　习（第三册第 743 页）

1. (1) $N=25$，(2) $N=250$，

2. (1) $N=8$, (2) $N=73$.

3. 证明.

任给 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{n+4}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$,

只要 $\frac{9n-3}{13}>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可,也就是 $n>\frac{13}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}$,

取 $\frac{13}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}$ 的整数部分为 N,

∴ 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\frac{n+4}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ 成立,

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{3n-1}=\frac{1}{3}$.

4. 证明:

任给 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{2n}{n+2}-2\right|<\varepsilon$,

只要 $n>\frac{4}{\varepsilon}-2$ 即可,

取 $N=\left(\frac{4}{\varepsilon}-2\right)$的整数部分,

∴ 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\frac{2n}{n+2}-2\right|<\varepsilon$ 成立.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}=2$.

5. 证明:

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|3-3|<\varepsilon$ 成立,

只要取 $N=1, 2, 3, \cdots$,即可,

当 $n>N$ 时,即从任一项起,都有

$|3-3|<\varepsilon$ 成立, ∴ 数列$\{3\}$的极限是 3.

练　习（第三册第756页）

1. 证明:

$\because \quad a_n=2+\frac{n-2}{n},$

$\therefore \quad a_{n+1}-a_n=2+\frac{n+1-2}{n+1}-\left(2+\frac{n-2}{n}\right)$

$=\frac{2}{n(n+1)}>0,$

$\therefore$ 数列$\left\{2+\frac{n-2}{n}\right\}$单调递增.

又 $|a_n|=\left|2+\frac{n-2}{n}\right|\leqslant 3,$

$\therefore$ 数列有界, $\therefore$ 数列$\left\{2+\frac{n-2}{n}\right\}$有极限.

求出极限:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{n-2}{n}\right)=2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}=2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)$

$=2+1=3.$

2. 证明

$\because \quad a_n=-\frac{2^{n+1}+1}{2^n}$

$\therefore \quad a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{2^{n+2}+1}{2^{n+1}}\right)-\left(-\frac{2^{n+1}+1}{2^n}\right)$

$=\frac{1}{2^{n+1}}>0.$

$\therefore$ 数列单调递增.

$\because \quad |a_n|=\left|-\frac{2^{n+1}+1}{2^n}\right|=\left|2+\frac{1}{2^n}\right|<3.$ $\therefore$数列有界.

既然数列递增而有界，因此，它有一个极限.

计算：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2-\frac{1}{2^n}\right)=-2$. （证明略）

3. (1) 6, (2) $\frac{10}{3}$,

4. (1) 2, (2) $\frac{1}{2}$, (3) -1, (4) 1.

5. (1) 0, (2) 0, (3) 1, (4) 1.

(5) 6, (6) 8, (7) 0.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2}=1.$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}.$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+6+\cdots+(2n+2)}{2+3+\cdots+(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+6n}{n^2+3n}=2.$

6. (1) 0, (2) -5,

(3) $\lim\limits_{x\to1}x^2\ln x=1^2\cdot\ln1=1\cdot0=0$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{0+1}-\sqrt{4-0}}{\sqrt{0+1}+\sqrt{4-0}}=-\frac{1}{3}.$

(5) 1, (6) -1 (7) -1, (8) ∞,

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(10) $$\lim_{x\to\infty}\lg\frac{100+x^2}{1+100x^2}=\lg\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{100}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+100}=\lg\frac{1}{100}=-2.$$

习 题 二(第三册第 765 页)

1. (1) $\because\ a_1=2,\ |q|=\frac{1}{4}<1.\ \therefore\ S=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$,

(2) $\because\ a_1=-1\quad |q|=\frac{1}{3}<1,\ \therefore\ S=\frac{-1}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$.

(3) $S=\frac{10}{3}$, (4) $S=-\frac{5}{6}$,

2. 证明:

$$1.\dot{9}=1.999\cdots=1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=1+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=2.$$

3. (1) $0.\dot{3}\dot{5}=0.353535\cdots=\frac{35}{100}+\frac{35}{10000}+\frac{35}{1000000}+\cdots$

$$=\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}.$$

(2) $0.2\dot{6}=0.2666\cdots=0.2+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots$

$$=0.2+\frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{15}.$$

(3) $1\frac{11}{45}$, (4) $6\frac{26}{33}$, (5) $\frac{203}{999}$, (6) $-2\frac{32}{99}$.

4. ∵ 原正三角形面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，第一个小三角形面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$，第二个小三角形面积为：$\frac{9\sqrt{3}}{64}$，…，因此，所有三角形的面积为：

$$S=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3\sqrt{3}\,(cm^2)$$

所有小三角形面积为：

$$S_1=3\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}(cm^2).$$

5. 如原文图，$OB=\sqrt{5^2-3^2}=4$，设$\angle AOB=\alpha$，则$\angle ABC=\angle BCD=\cdots=\alpha$.

∴ $AB=3, BC=3\cos\alpha, CD=3\cos^2\alpha, \cdots\cdots$,

∵ 在$\triangle ABO$中，$\cos\alpha\frac{4}{5}$，∴ $S=\frac{3}{1-\frac{4}{5}}=15(cm)$.

答：所有这些线段的和为 15cm.

6. $\sqrt[4]{\sin\theta\sqrt[4]{\sin\theta\sqrt[4]{\sin\theta\cdots}}}=\sin^{\frac{1}{4}}\theta\cdot\sin^{\frac{1}{16}}\theta\cdot\sin^{\frac{1}{64}}\theta\cdots$

$$=(\sin\theta)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots}\qquad=(\sin\theta)^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{\sin\theta}$$

7. 由 $\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x-1}\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{3x-1}{1-x}\geqslant 0\\[2mm] x\neq 1,\end{cases}$ 得：$3x-1=0$. 即 $x=\dfrac{1}{3}$

∴ $y=1$,

因此，所求数列的和为：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

8. ∵ A, B, C 成等差数列，

∴ $2B=A+C=180^\circ-B$, ∴ $B=60^\circ$.

∴ $A=60^\circ-\theta$, $C=60^\circ+\theta$.

又 ∵ $\dfrac{1}{\sin 2A}, \dfrac{1}{\sin 2B}, \dfrac{1}{\sin 2C}$ 成等差数列，

∴ $\dfrac{2}{\sin 2B}=\dfrac{1}{\sin 2A}+\dfrac{1}{\sin 2C}$

∴ $\dfrac{2}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sin 2A+\sin 2C}{\sin 2A\cdot\sin 2C}$

$$=\frac{2\sin(A+C)\cos(A-C)}{-\frac{1}{2}[\cos(2A+2C)-\cos(2A-2C)]}$$

∴ $2\cos(2A-2C)-3\cos(A-C)+1=0$

即 $2\cos 4\theta-3\cos 2\theta+1=0$,

$$\cos^2 2\theta-\frac{3}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{4}=0,$$

$\therefore\quad \cos 2\theta=1, \cos 2\theta=-\frac{1}{4}.$

由 $\cos 2\theta=1$，得 $\operatorname{tg}\theta=0$. 不合题意，应舍去，

由 $\cos 2\theta=-\frac{1}{4}$，得 $\cos^2\theta=\frac{3}{8}$， $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}$

$$=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$\therefore\quad \log_{0.6}\operatorname{tg}\theta=\log_{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{5}{3}}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\quad \cos^2\theta+\cos^2\theta\log_{0.6}\operatorname{tg}\theta+\cos^2\theta\cdot\log_{0.6}^2\operatorname{tg}\theta+\cdots$

$$+\cos^2\theta\cdot\log_{0.6}^{n-1}\operatorname{tg}\theta+\cdots$$

$$=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

练　习（第三册第782页）

1. （1）3600，（2）792，（3）126，（4）$\frac{7}{24}$

2. （1）证明：左边 $=3!+4\times3\times2+5\times4\times3+6\times5\times4$

$=210=$ 右边.

（2）证明：

$$\text{右边}=A_m^n+nA_m^{n-1}=\frac{m!}{(m-n)!}+\frac{n\cdot m!}{(m-n+1)!}$$

$$=\frac{(m-n+1)m!+n\cdot m!}{(m-n+1)!}=\frac{m!(m+1)}{(m-n+1)!}$$

$$=\frac{(m+1)!}{(m-n+1)!}=A_{m+1}^n=\text{左边}.$$

3. （1）$A_4^1+A_4^2+A_4^3+P_4=64.$

（2）$2A_3^2=12.$

（3）$2P_3=12,\quad A_4^3+P_4-1=4\times3\times2+4\times3\times2-1=47$

答：可组成 64 个自然数，12 个三位奇数，12 个能被 3 整除的三位数，47 个大于 123 的数.

4. （1）$A_5^4-A_4^3=5\times4\times3\times2-4\times3\times2=96.$

（2）$3P_4-2P_3=60.$

答：可组成 96 个四位数，60 个五位偶数.

5. $A_{12}^2=12\times11=132.$

答：共通信 132 封.

6. $P_5=5\times4\times3\times2=120,\ P_5-P_4=96,\ P_4=4!=24.$

答：五个同学站成一排共有 120 种站法，

某同学不能站在中间有 96 种站法.

某两个同学必须挨在一起有 24 种站法.

7. 第一条金鱼的放法有 3 种，第二条金鱼的放法也有 3 种，其余每条金鱼都有 3 种放法，

$\therefore\quad 3^4=81$

答：共有 81 种放法.

8. $P_{环8}=7!=5040,\ P_3\cdot P_{环6}=6\times5!=720$

答：8 人围成一圈有 5040 种坐法，

其中 3 人挨坐有 720 种坐法，

习 题 三（第三册第 789 页）

1. （1）$C_{50}^{48}=C_{50}^2=\dfrac{50\times49}{2!}=1225.$

（2）$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=32.$

2. (1)证明: 右式$=\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{(m-2)!}{(n-2)!(m-2-n+2)!}$

$$=\frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}=\text{左式}.$$

(2) 证明: 右式$=C_m^{n+2}+C_m^{n+1}+C_m^{n+1}+C_m^n$

$$=C_{m+1}^{n+2}+C_{m+1}^{n+1}=C_{m+2}^{n+2}=\text{左式}.$$

3. 由 $C_{2n+1}^4=35\cdot C_n^3$,

得 $\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{4\cdot 3\cdot 2}$

$=35\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}$

$\therefore$ $n=\frac{23}{4}$ (舍去), $n=3$. $\therefore P_n=P_3=6$.

4. 由 $C_m^n:C_m^{n+1}:C_m^{n+2}=3:3:2$,

得 $\frac{m!}{n!(m-n)!}:\frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!}$

$:\frac{m!}{(n+2)!(m-n-2)!}=3:3:2$

$\therefore$ $\begin{cases}\frac{n+1}{m-n}=1,\\ \frac{n+2}{m-n-1}=\frac{3}{2}.\end{cases}$ 解之, 得: $\begin{cases}m=9,\\ n=4.\end{cases}$

5. $C_{12}^2=\frac{12\times 11}{2}=66$, $A_{12}^2=12\times 11=132$

答: 有 66 种不同的票价, 132 种不同的车票.

6. (1) $C_{10}^7=C_{10}^3=120$

(2) $C_2^2\cdot C_3^2\cdot C_5^3=30$.

(3) 恰好一匹白马, 一匹青马: $C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_5^5=6$,

恰好一匹白马,二匹青马: $C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^4 = 30.$

恰好一匹白马,三匹青马: $C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^3 = 20$

恰好二匹白马,一匹青马: $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4 = 15$

恰好二匹白马,二匹青马: $C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 = 30$

恰好二匹白马,三匹青马: $C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2 = 10$

$\therefore \quad 6+30+20+15+30+10=111.$

答: 出工 7 匹, 有 120 种选法, 出工 7 匹, 其中必须用白马 2 匹, 青马 2 匹, 枣红马 3 匹共有 30 种选法, 出工 7 匹, 其中至少有 1 匹白马, 1 匹青马, 共有 111 种选法.

7. $C_{1000}^3 = 16167000, \quad C_1^1 \cdot C_{999}^2 = 498501.$

答: 从 1000 件产品中任取 3 件的方法有 16167000 种, 某一件产品恰好被抽取出来的方法有 498501 种.

8. 设最初参加的人数为 x,

则 $C_{x-2}^2 + 6 = 84$. 即: $\dfrac{(x-2)(x-3)}{2!} + 6 = 84.$

得 $x^2 - 5x - 150 = 0$, $\therefore x_1 = -10$, (舍去), $x_2 = 15$,

答最初参加 15 人.

9. $C_{24}^4 \cdot A_6^4 = 10626 \times 360 = 3825360$

答: 共有 3825360 种坐法.

10. (1) $C_6^2 \cdot C_5^2 = 150$

(2) 证明:

$$r = C_{m+2}^2 \cdot C_{m+2}^2 - 1 = \left[\frac{(m+2)(m+1)}{2} + 1\right]$$

$$\cdot \left[\frac{(m+2)(m+1)}{2} - 1\right]$$

$$=\frac{1}{4}(m^2+3m+4)(m^2+3m)$$

$$=\frac{1}{4}m(m+3)(m^2+3m+4)$$

练　习 （第三册第798页）

1. 证明

当　$n=1$ 时，左边 $=1=$ 右边，原式成立.

设　$n=K$ 时，原式也成立：

$$1+3+5+\cdots+(2K-1)=K^2$$

当　$n=K+1$ 时：

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

等式仍成立，∴　原式对任何自然数都成立.

2. 证明：

当　$n=1$ 时，左边 $=1=$ 右边，原式成立.

设　$n=K$ 时，原式也成立：

$$1+2+3+\cdots+K=\frac{K(K+1)}{2}$$

当　$n=K+1$ 时，

$$1+2+3+\cdots+K+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)$$

$$=\frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

等式仍成立，∴原式对任何自然数都成立，

3. 证明：

当　$n=1$ 时，左边 $=1^3=1$，　右边 $=\left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2=1$.