數學新義

（第一集）

林大芽著

一九五一年八月

前　言

這是第一輯，係研究工作的開始，作者試用擴充法，遞進法，叠進法另造數學概念，而原有定理定義也跟着改變了。閱者如肯細心閱覽，不難窺見其途徑與欣賞的方法，如蒙指正，尤爲歡迎。

林大芽一九五一年八月一日

目　錄：

一、數學欣賞

若論到數學的品質問題，古今來原無確定的標準，起初好名的人，都作比賽式的成敗論人，近世則漸趨向于論証的技術方面，殊不知數學和藝術的欣賞方式相同，也可以分為氣骨力神四個條件來估計它的價值。

數學的作品，要有偉大的氣魄，宏遠的眼光，要在新的概念裏，新的方法裏，表現出活力來，以為創造它的基礎，和發見的途徑，由是它們才呈現蓬蓬勃勃的氣。

有人說，「數學便是邏輯」，因它不論在証題上，命題上，處處都是以邏輯為主幹的，所以邏輯便是數學的骨。

為了一個定理的誕生，而其他無能的定理也跟着淘汰了，為了一個概念的誕生，而許多混淆的概念，也隨着廓清了，為了一個方法的誕生，而其他煩瑣幼稚的方法也不得不廢掉了。這個定理，概念，和方法，才充分表現出數學內在的力。

數學還要表現思想的形態，自然的規律，事物發展的法則，以及哲學的思潮，如聞其聲，如見其形，這樣，數學才算為神品。這方面便是數學的神。

茲在數史上，舉幾個例子，使在欣賞上更為深刻。

計數的方法，頗受語言的限制，亞里斯多德看清了這一點，便首倡文字表數的理論，這是在數學的發展達到障礙時候，替數學增一個氣，由是代數幾何都由此導出。

當求解思潮達到最高峯的時候，便碰到了無法求解的難題，但在這當代數命運快要寂滅的時候，Galois 的新思想，不但有力指出迷途，而且開了新路徑，也算替代數學增了一個氣，增延了代數的壽命。

笛卞兒的座標概念，實具有扭轉幾何命運的氣魄，這個繼往開來的功績，替幾何增了一個氣。

Dedekind 和 Cantor 的分析概念，實具草創分析學的大功，這是替數學增一個氣。實有莫定一支數學的氣魄。

所以氣是發明發見的途徑，也就是數學的活命的泉源。兹撇開氣的問題，再舉出骨的例子：

古人作數，沒有論証的方法，不論幾何的圖形，或算數，都是用實証的方法，因此，數學活動的範圍，甚為狹窄。一切命題都是處在半生不熟的狀態中，而其不會成熟的原因，即缺少了骨。

迨後，歐几立得抓住了幾個特徵，應用演繹論証，始把幾何從支離零亂的局面中建立起來，這個幾何的骨自產生以後，由是隨着其表現的力，深足使代數學也跟着它走，由是便起了換骨作用，使代數也從草脉中建立起來。

但以演繹法為骨的數學，雖把數學建立起來，可惜只許在註定的區域內打圈子，决不能作無限的廣延，要找到新的原理原則，萬萬辦不到，因此，數學歸納法，才大顯身手，開闢新途徑，創造新原理，另立新的骨格，這樣，數學發展的命運才不至於窮。

數學除氣骨以外，還要注意力的問題，有氣，才有力，沒有力，氣也沒有用處，兹關于力的問題，特舉數例如次：

普通人對於無窮觀念，僅有攏統的直覺，而不能作明確的決定。但當滲進集合意義時，便變為：「用任何方法逐次一一抽取其中元素，如不能盡，則此集合為無窮的」，由是使成為明確的有力的概念了。

幾何對偶定理在証題的地位駕乎許多證法之上，所以是一個有力的定理。

「如若一是」存在時候，則必有「如若一不是」，這裏「是」與「不是」便是柏拉圖對於事物的正反兩面作有力的辯証，從此使產生了歸謬法抽剩法擴充法，所以正反論證是產生數學命題的泉源。

最後更舉幾個關于神的例子如次：

先就自然數來說，在生理上，不論華語，德語，英語，巫語等，其發音均極自然而且有節奏的。其次當演算時候，如果所得的答數為自然數時，便像鬆了一口氣似的，也好像經過了相當勞苦而獲得休息似的，所以在心理上是十分調和的，更從道理來說，自然數好像從紊亂複雜的局面中得到可列的恩典，也好像從苦難無邊的意識裏，得到了救世主一般。

次說到奇數形式 $2n+1$，與偶數形式 $2n$，其中所表現的神態也和自然數一般，但它們尚在漫長無邊的自然數區域中找到了更高的分類神采。

在自然數裏，雖然很早便發見質因數的存在，可惜沒有一定的方法抓住它，由是更談不上發聲的辦法了，所以無法神化的。自 Permat 的公式出，即"$n! \pm 1$"，由是質因數的形式使得到心理的調和，且又可由聲音很有節奏的讀出。

完全數自發現以來，即具有美的表現，它指出數的積和和間的調和。

有理數原是散漫繁瑣的，但自可列性意義整理後便成為有次序了。由是可用和諧的聲音很爽快的順序讀出。

至於幾何方面，如 Pascal 線，Brianchon 點，Simson 線等，都是從紛雜的局面裏，發見了美麗的有序的而又調和的元素來。

證題方面也有許多神品，不外乎要整齊一致，勿牽涉不重要的定理，勿作重複繁瑣的叙述，然後才算上乘。

上述諸例，不過是帮助瞭解罷了，尚没有正確的數學意義。為了這個緣故，便轉入集合的理論了。

不論是方法，不論是概念，既是誕生了，便自然而然的會創出數學理論來，這樣，產生理論的能力，便是數學的氣。但產生理論的速率，有快有慢，速度快的，就是幼年時期的氣，等到相當時期，它們的速率便逐漸降低，由是健旺的氣，便逐漸衰退了，當達到濫調時候，速率便停止了。由是便進入老年期。

若用集合的理論來解釋，其意義更為明顯，一個新概念或新方法，可用適當方法使它變成一個小集合，由是在該集合外的另一集合對該集合會變換為另一種集合，這裏所生的新元素便是新生的理論，又若此集合為有窮的，並若多產生一個理論，那麼，新元素也就減少了一個，因此，其氣也就短一個了，這好像下圍棋填子一般，若不是添氣的棋子，填了一個，氣也就短了一個，所以卓越的數學家决不願在某範圍內，作特殊的補充，必須激昂志氣，用擴充方法，另覓新的路徑，使增個新氣，為自己及他人的研究基礎 否則懦弱無能的人，專門作別人尾巴，專門作文化俘虜，非等到氣閉了氣盡了不肯了。又若集合是無窮的，但又可分為發散及收歛二種，如係發散，誠屬偉大，如為收歛，其氣雖不能盡而速率太小了。

次談數學的骨，數學的本質既是邏輯，那麼，邏輯便是數學的骨。在數學本質裏，邏輯佔據了整個證題及命題二大項。

若論命題，可用圓來作例子，就其定義說，動點要受下列條件的限制：

1. 在平面上

2. 有一定點

3. 對定點要成等距離

但當此三條件成立以後，而靠着感官來意識的外形完全被淘汰了。因為這三個條件的建立便是骨的建設的完成，由是圓的意義便可捨棄外形而依骨成立了。但當骨的意義進入解析幾何時候，便被條件式取代了，即設有 xy 的二次式，若 x^2 及 y^2 的係數相等，且 xy 的係數為 O，則此二次式為圓。由是又把直覺式的骨破壞了，另換上一個條件集合為新的骨。

若用集合法來討論對應的關係，這前後不同的骨，顯然可作用兩個集合作成函數對應，而不必是一一對應。

骨的大義既明，但還要明白的，便是不論在命題上或證題上必需用最少的條件獲得最大的效果，否則拖水帶泥，繁而無當，骨的價值便降低了。比方古代天文學家雖然建下不少的理論，但自牛頓的定律出，一一都被吞噬了。由是 M, A, V, T, S 等元素便取代了揭露宇宙秘密的地位。這樣看來，繁瑣的無能的骨常被偉大的骨所侵吞，那麼，偉大的數學家難道不願意創造偉大的骨嗎？

現在論到數學的力，當一個微妙的方法和簡捷的途徑誕生以後，也為了這個新法的誕生而廢棄了，迂迴曲折的途徑也為了簡捷途徑的發見便跟着荒蕪了，這就是新法或途徑所表現的作用，也就是數學的力。

若利用集合的理論來定義數學的力，在集合論裏的兩個集合，如為有序對應，那就完成了方向的條件。質量的意義，不妨以某一元素所對應的集合內元素的個數或某一集合和其所對應的集合內元素的個數之比，為方便計，把這種比稱為質量，而以氣的長短作產生元素率的大小，那麼，力的意義也就決定了。

如以集合 T 表數學的氣，以 T 的方向為方向，M 表質量，f 表力，則得力的定義為：$f=F(MT)$。

二、射影概念的擴充（一）

線束或點列射影對應的定義既為：

$$(1)\quad \begin{cases} P + u_i\ Q = O \\ P' + u_i\ Q_i = O \end{cases}$$

實際上（1）式亦可改為：

$$(2)\quad \begin{cases} P + u_i\ Q = O \\ P' + k u_i\ Q' = O \end{cases} \qquad (k:\text{常數})$$

或

$$(3)\quad \begin{cases} P + u_i\ Q = O \\ P' + (k u_i + C)\ Q' = O \end{cases} \qquad (k, C:\text{常數})$$

因當 i 固定時，任取四點，$i = 1, 2, 3, 4$ 則有：

$$\frac{(k u_1 + C) - (k u_3 + C)}{(k u_2 + C) - (k u_3 + C)} : \frac{(k u_1 + C) - (k u_4 + C)}{(k u_2 + C) - (k u_4 + C)}$$

$$= \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} : \frac{u_1 - u_4}{u_2 - u_4} \cdots (3')$$

（3）及（3′）式不過是一方射影對應定義及其條件罷了，至於普遍射影性質亦必適合此種定義，現在把此種思想擴充到 n 方去。因為（3）式 u 之次數為 1，故（3）可改為：

$$P' + f(u)\,Q' = O \qquad (\because f(u) \equiv k u_i + C)$$

∴ （3′）可改為：

$$\frac{f(u_1) - f(u_3)}{f(u_2) - f(u_3)} : \frac{f(u_1) - f(u_4)}{f(u_2) - f(u_4)}$$

$$= \left(\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_4} : \frac{u_1 - u_4}{u_2 - u_4}\right)\left(\frac{k}{k} : \frac{k}{k}\right)$$

上式表射影對應的條件，當 $n = 1$ 時，$\lessgtr_{13}$，$\lessgtr_{14}$，$\lessgtr_{23}$ 及 $\lessgtr_{24}$ 均為常數 k，其複比值為 1. 前定理略去 $\frac{k}{k} : \frac{k}{k}$ 為條件的特殊情形

罷了。但當 $n=2$, 則 $\Xi_{13}, \Xi_{14}, \Xi_{23}, \Xi_{24}$ 均為 u_i 的一次式。餘類推。

註: Ξ_{13} 表 $[f(u_1)-f(u_3)] \div (u_1-u_3)$ 餘倣此。

當 $n=2$ 時，點列或線束的射影對應稱為二方射影對應。

茲舉例如次：

$$\begin{cases} P+u_i Q=O \\ P'+(A_0 u_i^2+A_1 u_i+A_2)Q'=O \end{cases}$$

當 $n=m$ 時，亦倣此。

定理: 設二點列(或線束) $P+uQ=O$, $P'+\lambda Q'=O$ 造成 n 方射影對應的充要條件為:

$$a\lambda f(u)+b\lambda+cf(u)+d=O \quad (ad-bc\neq O)$$

$(a, b, c, d$: 常數)

定理: 設二基本形式 $\begin{cases} P+u_i Q=O \\ P'+\lambda_i Q'=O \end{cases} \quad (i=1, 2, 3)$

造成 $f(u_i)$ 射影對應的充要條件為:

$(\lambda_1\lambda_3, \lambda\lambda_2)=[f(u_1)f(u_3), f(u)f(u_2)]$

註: $(\lambda_1\lambda_3, \lambda\lambda_2)\equiv(\lambda_1-\lambda)/(\lambda_3-\lambda):(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_3-\lambda_2)$

定理: 設二線束共面，且不成配景，其射影函數為 n 次，則對應線交點軌跡造成一 $n+1$ 次代數曲線。

定理: 設有二個基本形式為已知，第一形式內有 n 個元素與第二形式內 n 個元素成射影對應，則可唯一決定一個 n 方射影對應。

定理: 已知 $n+2$ 個點共面，且三點不共線，則可唯一決定一種特別 $n+1$ 次代數曲線通過該 $n+2$ 點。

定理: 設一點 $(x_0\ y_0)$ 不屬於 $P+f(u)Q=O$ 點列內則連此點及點列內任一點的直線必與交點成射影對應。

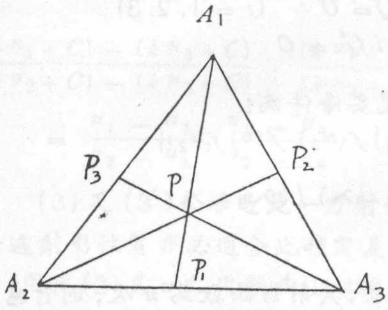
定義： 二種形式$P+f(u)\ Q=O$及$G+f(u)\ H=O$所造成的射影對應，稱為全同射影對應。

定理： 在平面上$A_1\,A_2\,A_3\,E$四點所成完全四角形，對平面上任一點P，則

$$A_1(A_2A_3,\ EP)\ A_2(A_3A_1,\ EP)\ A_3(A_1A_2,\ EP)=1$$

玆由擴充射影函數的關係，來討論射影函數的性能，設在二次空間內任取一點P，當P依射影對應變動時，常構成形形色色的空間，此空間稱為射影空間。

此種空間的構造，和普通幾何空間不同，普通幾何空間是均勻的，連續的，而此種射影空間則有發散性的，有極限的，有節縮性的，有跳動性的，其性質概由$f(u)$所決定，而普通空間不過是其中一個特殊狀態罷了。



(圖 一)

要決定射影空間的形象，應以齊次坐標為討論對象。設由參攷三角形各頂點與P聯線交三邊於P_1, P_2, P_3三點，則可知P的位置，已為P_1, P_2, P_3所決定了，但P_1, P_2, P_3三點坐標可由

$$A_2+f_1(u)\,A_3=O,$$
$$A_3+f_2(u)\,A_1=O,$$
$$A_1+f_3(u)\,A_2=O$$

來決定，由是P_3的分佈情形，應以函數$f_3(u)$為主，如$f_3(u)\to\pm\infty$，則$P_3\to$極限點，如$f_3(u)\to-1$則$P_3\to\pm\infty$，惟P_3的本身雖極近此極限點，而究不能與極限點重合，由是該點的位置，不能在軌跡以內，因此，該點是空虛元素，由是得：

定理： 幾何的射影極限點是空虛元素。

玆舉一例來討論射影空間。

設 $$f(u)=u+\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}$$

設 $u \to -\infty$ 則 $f(u) \to -\infty$

$u \to +\infty$ 則 $f(u) \to +\infty$

$u \to -0$ 則 $f(u) \to -\infty$

$u \to +0$ 則 $f(u) \to +\infty$

$u \to 1+0$ 則 $f(u) \to +\infty$

$u \to 1-0$ 則 $f(u) \to -\infty$

由是從 $f(u)$ 與 u 的對應關係，可得許多間隔空間，

玆先論第一間隔空間：

$f(u) \to -\infty$, 則 $P_3 \to A_2$

$f(u) \to -k\ (k=>0)$ 則 $P_3 \to 1$

$f(u) \to -\infty$ 則 $P_3 \to A_2$

故 P_3 在 $\overline{A_1A_2}$ 上移動，係由 $1 \to A_2 \to 1$，則 $(A_2 1)$ 稱為第一反覆空間，P_3 存在此空間內，而每個 P_3 各有二點，雖係重合，但方向相反，此 $(A_2 1)$ 集合有一極限點 A_2，實際上 P_3 不能達到 A_2 的位置，故不存在，故 A_2 為空虛元素。又 $f(u) \to -k$ 時，則 $-k$ 為 $f(u)$ 的上限，實際上 P_3 亦不能到達此點，故亦不存在，故 1 亦為空虛元素。又在 $(A_2 1)$ 集合內並不含 $P\infty$ 元素，故稱有極限且有二個空虛元素的集合。

由上可知在 $A_2 1$ 集合內，有無數個 P_3 點存在，假使以 $A_2 1$ 長度來除 P_3 的總點數，可得此集合的點數的密度。玆述如次：

$f(u)$ 之值，由 $-k \to -\infty$，其點數為 ∞ 個，又由 $-\infty \to -k$，其點數的亦為 ∞ 個，故共得 $2 \times \infty$ 個。

又 $f(u)$ 所成的 $A_1 + f(u)A_2 = O$ 的點數與 $(A_2 1)$ 內點數成一一對應，故 $A_1 + f(u)A_2 = O$ 的點數與 $(A_2 1)$ 內點數相等，但在 $A_2 1$ 上一個點實際上具有正反異向的二種點列，而其中每一個點列皆有 ∞ 個自然數與之對應，故其密度可以 $\dfrac{2}{A_2 1}$ 來表示。

當 P_3 到達 $-\infty$ 以後，隨着便跳到 $+\infty$ 來，其中僅有一個空虛元素為極限，因此，轉進了第二間隔空間。

$u > 0$ 時，$f(u) \to +\infty$ 　則 $P_3 \to A_2$

$f(u) = 0$ 　則 $P_3 \equiv A_1$

$f(u) \to -1+0$ 　則 $P_3 \to -\infty$

$f(u) \to -1-0$ 　則 $P_3 \to +\infty$

$f(u) \to -\infty$ 　則 $P_3 \to A_2$

故在第二間隔空間裏，又可把它分為三段，且把 $\overline{A_1 A_2}$ 佈滿，第一段由 $A_2 \to A_1$，A_2 為空虛元素，A_1 為實點，過 A_1 使是第二段了。由 A_1 向左作無限延長，當延長至 $-\infty$ 時，又跳躍過此空元素 $P-\infty$，到直線的另一端 $P+\infty$，然後才到了第三段空間，又回到空虛元素 A_2 由是知每一跳躍必需有一空虛元素，此與純史中弱性發展限相符合。

對於密度方面，第一段空間的密度為 $\frac{1}{A_1 A_2}$ 第二段為 $\frac{1}{\infty} = 0$，第三段亦為 $\frac{1}{\infty} = 0$

當 P_3 到達 A_2 時候，便跳入第三段空間了。

$u > 1$ 時，$f(u) \to +\infty$，則 $P_3 \to A_2$

$f(u) \to +k'$，則 $P_3 \to 2$

$f(u) \to +\infty$，則 $P_3 \to A_2$

故 P_3 在 $A_1 A_2$ 上移動時，係由 $A_2 \to 2 \to A_2$，此中 A_2，2 均為空虛元素，且 A_2 為極限點，2 為下界點，而其密度則為 $\frac{1}{A_1 2}$ 故得：

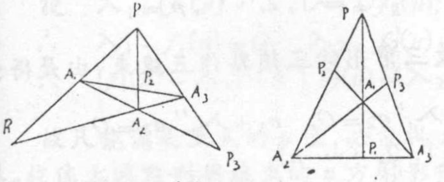
a) 設 $f(u)$ 在 (a, b) 內為連續函數，且 $f(a) \to +\infty$ 及 $f(b) \to -\infty$，則 $A_1 + f(u) A_2 = 0$ 的分佈為自 $A_2 \to -\infty$，又由 $+\infty \to A_2$.

b) 設 $f(u)$ 在 (a, b) 內為連續函數，且 $f(a) \to +\infty$ $f(b) \to +\infty$，則 $A_1 + f(u) A_2 = 0$ 的分佈為 $(A_2 A_1)$ 內一個線段。

茲進一步討論空虛元素的分佈，但空虛元素又可分為 $P\infty$ 的分佈與極限點的分佈兩種。茲先論 $P\infty$ 的分佈。

如圖 $P\to\infty$ 時，則 PP_1, PA_2, PA_2, PA_3 可視為平行線束，故得：

$$\frac{A_1P_2}{A_3P_2}=\frac{P_1A_2}{A_3A_2}=\frac{A_1A_2}{P_3A_2} \quad 或 \quad \frac{A_1P_2}{A_1A_3}=\frac{P_1A_2}{P_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_1P_3}$$



(圖 二)

又 $\dfrac{A_1P_2}{A_3P_2}=\dfrac{x_1}{x_3}$,

$$\frac{P_1A_2}{A_3A_2}=\frac{x_2}{x_3-x_2}$$

$$\frac{A_1A_2}{P_3A_1}=\frac{x_1-x_2}{x_2}$$

令 $\dfrac{x_1}{x_3}=\dfrac{x_2}{x_3-x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{x_2}=k$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_1:x_2:x_3&=k_1:(1+k_1):1\\ x_2:x_3:x_1&=k_2:(1+k_2):1\\ x_3:x_1:x_2&=k_3:(1+k_3):1\end{aligned}$$

此為 $P\infty$ 分佈的充要條件。

茲再論極限點的分佈，為簡單計，更舉一例如次：

$$f(u)=\frac{1}{u}$$

當 $u\to\infty$ 則 $f(u)\to O$ $\therefore$ $P_2\to A_3$

此 A_3 即其極限點。但因 ∞ 不是實在的，故 $f(u)$ 亦不實在，由是 P_2 亦不實在，故 A_8 為空虛元素。(但 A_3 有時不空虛)。由是當 $\dfrac{A_3P_2}{P_2A_1}\to O$, 為極限點存在的條件。當 $\dfrac{A_3P_2}{P_2A_1}\to O$, 則 $\dfrac{A_2P_3}{P_3A_1}\to k$, 而 $\dfrac{A_3P_1}{A_2P_1}\to k'$, 由是關於 $\dfrac{A_3P_2}{P_2A_1}\to O$ 的極限點 P 的分佈係存在於 $\overline{A_2A_3}$ 點列上，同理，P 的極限點除 $\overline{A_2A_3}$ 外，還有 $\overline{A_1A_2}$ 及 $\overline{A_1A_3}$ 兩種點列。

茲再論射影函數空間與點列及線束的對應關係。設在一點列（或一線束內）有 n 個已知元素，則對一參攷三角形可以決定

點列（或線束）內任一元素的座標，即此種座標可由射影函數來決定。

點列內既有 n 個已知元素，則必可決定一個 n 方射影對應函數，設在點列上任一點為：

$$P+u_i Q=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由是將此 n 個點與參攷三角形的三頂點作三線束，由是得：

$$(1)\quad a_2+\lambda_i a_1=0,\quad a_3+\lambda_i' a_2=0,\quad a_1+\lambda_i'' a_3=0$$
$$(i=1,2,\cdots\cdots n)$$

故可設 $\lambda_i^{(h)}=a_0^{(h)}u_i^n+\cdots\cdots+a_n^{(h)}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n$
$h=0,1,2)$

而因 λ_i u_i 為已知，故 $a_0^{(h)}$, $a_1^{(h)}\cdots\cdots a_n^{(h)}$ 諸係數可以決定，由是(1)式可改書為：

$$a_2+f_1(u)\,a_1=0,\quad a_3+f_2(u)\,a_2=0,\quad a_1+f_3(u)\,a_3=0.$$

但上式還需表示為任一點的座標，故需滿足：

$f_1(u')\,f_2(u')\,f_3(u')=1$ （u' 為任意值）

但此條件除決定點的位置外，還可決定此點的軌跡必為直線。因為在點列上任一點與三頂點連線所得的座標為：

$$f_1(u')\ :\ f_2(u')\ :\ f_3(u')$$

故當此比例值決定時，則由比例式所決定之點亦必在該點列上，否則 $f_1(u'):f_2(u'):f_3(u')$ 可以決定二點了，此與座標的意義不合。

上述 n 方射影對應是全同射影對應，但當 $A_1+f_1(u)A_2=0$, $A_2+f_2(u)A_3=0$, $A_3+f_3(u)A_1=0$ 若與 $P'+uQ'=0$ 所成對應的關係，顯然成為一個單獨點列與三個點列集合成 n 方射影對應，但 $f_1(u)$ 的次數既為 n，那麼，當 n 個 $f_1(u')$ 值決定時，則必有

n個u'值和它對應，這就是一對多的對應。至於$f_2(u')$及$f_3(u')$當然不是例外，但由$f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$所解得的u'值，往往不都合於點的條件，因為這三批n個u'值，必須有一致的u值時，然後由$f_1(u)$, $f_2(u)$及$f_3(u)$所決定的點才係其對應點，茲求其條件：

設　$\lambda_1 = f_1(u)$　　$\lambda_2 = f_2(u)$,　　$\lambda_3 = f_3(u)$

$\therefore$　$\lambda_1 - f_1(u) = 0$,　$\lambda_2 - f_2(u) = 0$,　$\lambda_3 - f_3(u) = 0$

$\therefore$　$[f_1(u) - \lambda_1] + k\,[f_2(u) - \lambda_2] + k'\,[f_3(u) - \lambda_3] = 0$

故凡能滿足上式的u值，必能與$f_1 : f_2 : f_3$所決定的點成對應。故係上述點列與線束的n方射影對應條件。

又當$f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$為一次式時，則上式點列內僅有一對應點。

三、射影概念的擴充（二）

關於射影對應的形式除了上述以外，還可擴充為：

$$\begin{cases} P + u_k Q = 0 \\ (P')^n + (u_k Q')^n = 0 \end{cases}$$

由是由割圓方程式得：

$$\begin{cases} P + u_k Q = 0 \\ P' - \left[Cos\,\dfrac{2k'+1}{n}\pi + isin\,\dfrac{2k'+1}{n}\pi\right] u_k Q' = 0 \end{cases}$$

$$(k' = 0, 1, \cdots\cdots\cdots, n)$$

可知此亦為射影對應形式，稱為n次射影對應式，簡書為：

$$\begin{cases} P + u\,Q = 0 \\ P' + (a_k + i\,b_k)\,Q' = 0 \end{cases}$$

定理：　兩基本形式：$\begin{cases} R + u\,S = 0 \\ R' + (a + i\,b)\,S' = 0 \end{cases}$　造成n次射影對應的充要條件為：

$$a\,kj\,u\,(S\infty - Br) = b\,[r\alpha + kj\,u\,(rB + \infty S) + u^2 SB]$$
$$(\alpha S - Br \neq 0)$$

註：應將 $R' + (a+ib)S' = 0 \rightarrow R_1' + (kj + ikj')\,u\,S' = 0$

而以 $\begin{cases} R_1 = \alpha R' + rS' \\ S_1 = BR' + SS' \end{cases}$ 代入即得

定理：設二基本形式為已知，在第一形式內元素 A, B, C，與第二形式內元素 A', B', C' 對應，且 C' 為複數，則可唯一決定一 n 次射影對應。

設把直線方程式擴充至 Gauss 平面上時，則變為：

$$iAx + By + iC = 0$$

因此，更作一直線：

$$iA'x + B'y + iC' = 0$$

使與上直線成線束：

$$i(A + kA')x + (B + kB')y + i(C + kC') = 0$$

則上式可改書為：

$$iux_0 + vy_0 + iw = 0.$$

定理：設一點 $(x_0\, y_0)$ 不屬於 $P + uQ = 0$ 點列內；則連此點及點列內任一點的直線，與其交點成全同射影對應。

定理：設二個 u 次射影線束不成配景，則對應直線交點的軌跡成一個二次曲線集合，其元素有 n 個。

定理：從 Gauss 平面上一個二次曲線的四定點，射影到曲線上任一點，則所得四線複比為一定。

假使在參考三角形 $A_1A_2A_3$ 內，要存在

$$\begin{cases} P + uQ = 0 \\ P' + (kj + ikj')\,uQ' = 0 \end{cases}$$