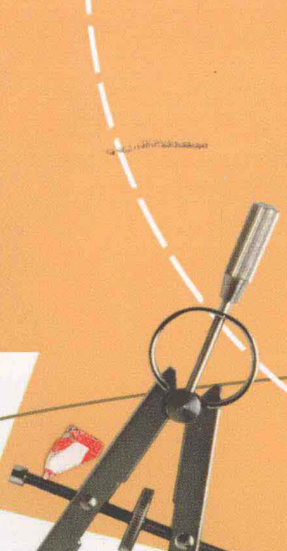
单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

解析几何

黄利兵 陆洪文 著

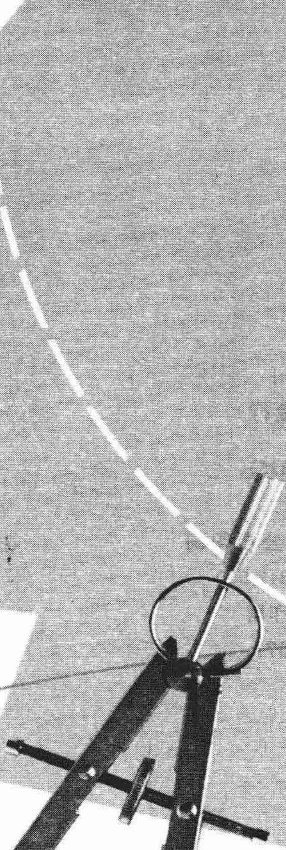


单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

解析几何

黄利兵 陆洪文 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/黄利兵，陆洪文著. —上海：上海科技教育出版社，2010.9

(数学奥林匹克命题人讲座)

ISBN 978-7-5428-5039-3

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①黄…②陆… Ⅲ. 解析几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.653

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123368 号

责任编辑：卢　源

封面设计：童郁喜

数学奥林匹克命题人讲座

解析几何

单　墫　主编

黄利兵　陆洪文　著

上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社　出版发行

(上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235)

www.ewen.cc　www.sste.com

全国新华书店经销　上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240　1/32　印张 8.375　字数 217 000

2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5428-5039-3/O・677

定价：20.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》（上海教育出版社，1980 年）问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

黄利兵　陆洪文	《解析几何》
王伟叶　熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
田廷彦	《圆》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰　张永芹	《组合问题》
任　韩	《图论》
田廷彦	《组合几何》

唐立华　　　　　　　　《向量与立体几何》

杨德胜　　　　　　　　《三角函数·复数》

显然，作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生是博士生导师，不仅在代数数论等领域的研究上取得了卓越的成绩，而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式，是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是2008年IMO中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献，培养了很多的人才。2008年9月14日，“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立，担任这个研究中心主任的正是多届IMO中国国家队领队、华东师范大学数学系教授熊斌。

这些作者有一个共同的特点：他们都为数学竞赛命过题。

命题人写书，富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新，是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景（如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景），写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单 墫

2008 年 10 月

前言

解析几何，又称坐标几何，其主要特征是通过建立坐标系，利用代数或分析的手段来研究几何。它是许多现代数学分支如代数几何、微分几何等的基础。在高中数学中，它也是不可或缺的重要部分。

有人认为，高中数学所触及的解析几何内容虽不少，仍比较浅显；即使在奥林匹克数学中，解析几何似乎也仅仅是一试的内容。如此认识解析几何是完全错误的。解析几何并非一味地死算，而是含有丰富的技巧和思想。理解这些技巧和思想，对于进入 CMO 以及今后进一步的学习都大有裨益。

解析几何的历史可追溯至两千多年前的阿波罗尼乌斯(Apollonius)，但将它的建立归功于笛卡儿(R. Descartes)，已是目前的定论。事实上，与笛卡儿同时代的棣莫弗(A. de Moivre)对此也有重大贡献(注：我们在中学教科书中看到的棣莫弗公式就出自此人之手)。

中学阶段解析几何的一个重要篇章是圆锥曲线。这个主题，无论是古希腊时代还是在射影几何兴旺发达的 19 世纪，都是异常丰富多彩的一页。在 19 世纪早期活跃的几何学家沙勒(M. Chasles)、彭赛列(J-V. Poncelet)和施泰纳(J. Steiner)等，对于圆锥曲线都有独到的研究，各自留下了以他们的名字命名的许多定理。本书将为读者展现这些定理中的沧海一粟。

本书第一、二讲介绍了解析几何的基本内容，在高中知识(直线和二次曲线等)的基础上，列举了一些例题和习题，让我们充分体会到几何问题代数化的力量。特别是，当距离的平方出现在问题之中时，解析几何常常表现出更多的方便(比如证明到三角形三顶点距离的平方和最小的点是该三角形的重心)。而对于椭圆、双曲线和抛物线，目前也只能利用解析几何，如用纯粹的平面几何则太困难了。这说明，代数并

非仅仅是几何问题的简单化、机械化，有时也是一种必不可少的延伸方法。这部分内容由同济大学数学系陆洪文撰写。

第三讲介绍了一些简单的射影几何知识。我们并不打算介绍整个射影几何的宏大理论，而只把目光集中于那些看起来较为简单的定理。为此，我们选择了这样一条路线，从直线间的射影对应入手，过渡到圆锥曲线上的射影对应，并进而介绍极点和极线的理论。这与通常公理化的处理方式颇有不同之处。

第四讲将站在射影几何的角度考察圆锥曲线的仿射性质和度量性质。读者将了解到，仿射几何与射影几何的区别，只不过是把无穷远直线从所有直线中独立出来而已。而相似几何只是进一步选定两个特殊点，即“圆点”。有了这些认识，圆锥曲线的直径、共轭方向、渐近方向、焦点和准线等都可通过射影概念加以定义。这也就为解题提供了一些新的思路。

第五讲是前两讲的综合，它引进了新的工具，即三线坐标系。虽然三线坐标与重心坐标是完全平行的体系，但近年来重心坐标似乎更流行一些。在作者看来，三线坐标在表达某些几何条件时有明显的优势，但其短处在于经常需要进行三角函数的化简。在这里，我们提出了一些技术来解决这个问题，只是未构成系统的算法。

最后一讲介绍的是复数方法，这是高中知识的加深。特别是关于垂极点和西姆森线等方面的内容，给我们耳目一新的感觉。

后四讲可看做提高部分，由南开大学数学系黄利兵撰写。

作者

2010.4.22

目录

第一讲 直线与圆

§1.1 直　　线

知识桥

一、直线的倾斜角和斜率

1. 倾斜角 α：当直线 l 与 x 轴相交时，x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和 l 重合时所转过的最小正角为 α；当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定 $\alpha=0$，故 $0\leqslant\alpha<\pi$.

2. 斜率 k：$k=\tan\alpha$. 当 $\alpha=0$ 时，$k=0$；当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$k>0$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，k 不存在（直线没有斜率）；当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$k<0$.

3. 两点斜率公式——直线方向坐标化：

已知直线上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

注意：(1) 斜率公式与两点的顺序无关；

(2) 斜率公式不需求出直线的倾斜角，因此使用较方便；

(3) 斜率公式是研究直线方程的各种形式的基础，必须熟记并灵活运用；

(4) 当 $x_1=x_2$，$y_1\neq y_2$ 时，直线与 x 轴垂直，倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，没有斜率.

训练营

例 1 已知直线 l 的倾斜角 α 满足条件 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，求直线 l 的斜率 k.

分析 关键是怎样从 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 求得 $\tan\alpha$，并注意隐含条件.

解

$\because\quad \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 $0\leqslant\alpha<\pi$，

$\therefore\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，且 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin2\alpha=\frac{1}{25}$，

$\therefore\quad \sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{24}{25}$，

解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{4}{3}$.

由 $\tan\alpha<-1$ 知，所求的斜率 $k=-\frac{4}{3}$.

点评 本题很多同学不会舍去 $-\frac{3}{4}$，错为两解. 倾斜角 α 满足 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，说明角 α 在第二象限，且 $\sin\alpha>|\cos\alpha|$，故 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$. 善于发现题设中的隐含条件，有助于数学能力的提高.

知识桥

二、直线的方程

直线方程有点斜式、斜截式、两点式、截距式、参数式、一般式和法

线式.

学习了直线的方程,应思考如下问题:直线方程各种形式的适用范围? 哪种形式适用范围更广? 哪种形式更利于作图?

要注意发现关系,发现优劣,发现特殊.

以下归纳供参考.

1. 点斜式:$y-y_0=k(x-x_0)$. 要求斜率 k 存在,因此不能表示与 x 轴垂直的直线.

2. 斜截式:$y=kx+b$. 适用范围同上.

3. 两点式:$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. 要求 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$,因此不能表示与 x 轴垂直的直线,也不能表示与 y 轴垂直的直线.

4. 截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. 要求在 x 轴上的截距 a 和 y 轴上的截距 b 存在,且 $ab\neq 0$,因此不能表示与 x 轴或 y 轴垂直的直线,也不能表示过原点的直线.

5. 参数式:$\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt,\end{cases}$($t$ 是参数). 任何直线均能表示. 特别当 $a^2+b^2=1$ 时,t 的绝对值等于线段 P_0P 的长度,其中 $P_0(x_0,y_0)$,$P(x,y)$.

6. 一般式:$Ax+By+C=0$(A,B 不同时为零). 任何直线均能表示.

7. 法线式:$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$($0^\circ\leqslant\theta<360^\circ$,$p\geqslant 0$).

其中,θ 是该直线法向量(由坐标原点引一条与该直线垂直的直线,以坐标原点为起点、交点为终点的向量,即为要求的法向量)与 x 轴正方向的夹角,p 是该法向量的长度.

参数式可以有多种形式. 例如:

设直线过点 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$,则该直线上的动点 $M(x,y)$ 的坐标满足

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\text{参数 }\lambda\neq-1),$$

而 M 分线段 M_1M_2 的比为 λ.

关于直线参数方程，还可以更进一步地描述如下.

直线 l 过点 $P(x_0,y_0)$，则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha,\end{cases}$（$t$ 为参数，α 为倾斜角）. $|t|$ 的几何意义是直线上的点到点 P 的距离，$t>0$ 时此点在点 P 的上方，$t<0$ 时此点在点 P 的下方.

训练营

例 2 求下列直线 l 的方程：

(1) l 在 y 轴上的截距是 -2，倾斜角的正弦为 $\frac{4}{5}$；

(2) l 过点 $A(1,2)$，且与两坐标轴的截距和为 0；

(3) l 过点 $P(2,3)$，且与两坐标轴的截距相等；

(4) l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$，且与原点距离为 7.

分析 关键是确定直线方程中的待定系数.

解 (1) 设直线 l 的倾斜角为 α，

则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，故斜率 $k=\tan\alpha=\pm\frac{4}{3}$，

由斜截式得 $y=\frac{4}{3}x-2$ 或 $y=-\frac{4}{3}x-2$.

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $4x+3y+6=0$ 或 $-4x+3y+6=0$.

(2) 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ 或 $y=kx$.

由点 $A(1,2)$ 在 l 上得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{-a}=1$ 或 $2=k$，

解得 $a=-1$ 或 $k=2$.

$\therefore$ l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $2x-y=0$.

(3) **方法一**：利用点斜式（本题斜率存在且不为零）.

设直线 l 的方程为 $y-3=k(x-2)$.

令 $x=0$，得在 y 轴上的截距 $b=-2k+3$；

令 $y=0$，得在 x 轴上的截距 $a=2-\frac{3}{k}(k\neq 0)$.

由两坐标轴上截距相等，得 $-2k+3=2-\frac{3}{k}$，

解得 $k=-1$ 或 $\frac{3}{2}$，

∴ l 的方程为 $x+y-5=0$ 或 $3x-2y=0$.

方法二：利用一般式.

设直线 l 的方程为 $x+y+c=0$ 或 $kx-y=0$.

由于点 $P(2,3)$ 在 l 上，得 $2+3+c=0$ 或 $2k-3=0$，

解得 $c=-5$ 或 $k=\frac{3}{2}$（下略）.

(4) **方法一：**利用点线距离公式（详见本节第三部分）.

设直线 l 的方程为 $y=x\tan\frac{2\pi}{3}+b$，即 $y=-\sqrt{3}x+b$.

由原点到 l 的距离为 7 得 $\frac{|b|}{2}=7$，$b=\pm 14$.

∴ l 的方程为 $\sqrt{3}x+y\pm 14=0$.

方法二：利用直线方程的法线式.

∵ 法线角 $\theta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}$，

∴ 直线 l 的方程为 $x\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-7=0$ 或 $x\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)-7=0$，

∴ l 的方程为 $\sqrt{3}x+y\pm 14=0$.

点评 学习直线的方程常犯的错误是忽略方程各种形式的应用条件，因此造成丢解. 本例中各个小题均为两解，你做对了吗？

例 3 直线 l 过点 $A(3,2)$，且被 $l_1: x-3y+10=0$ 和 $l_2: 2x-y-8=0$ 所截的线段恰以 A 为中点. 求直线 l 的方程.

分析 本题容易陷入会列式不会求解的误区，使解题半途而废.

例如，设直线 l 交 l_1 于点 $B(x_1, y_1)$，交 l_2 于点 $C(x_2, y_2)$，

则由题意，列出方程组

$$\begin{cases} x_1-3y_1+10=0, \\ 2x_2-y_2-8=0, \\ x_1+x_2=6, \\ y_1+y_2=4. \end{cases}$$

为避免解多元方程组，必须减少未知数，并巧用中心对称.

解

方法一：减少未知数

设直线 l 交 l_1 于点 $B(3t-10, t)$，交 l_2 于点 $C(a, 2a-8)$.

由 BC 中点为 A，得 $\begin{cases} 3t-10+a=6, \\ t+2a-8=4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} t=4, \\ a=4, \end{cases}$ 故点 $B(2,4)$.

由两点式得，AB 所在的直线的方程为 $\dfrac{y-2}{4-2}=\dfrac{x-3}{2-3}$，

即直线 l 的方程为 $2x+y-8=0$.

方法二：巧用中心对称

设直线 l 交 l_1 于点 $B(3t-10, t)$，

则 B 关于 $A(3,2)$ 的对称点 $C(16-3t, 4-t)$ 在直线 l_2 上.

故 $2(16-3t)-(4-t)-8=0$，

解得 $t=4$，点 $B(2,4)$. 下同方法一，略.

方法三：利用参数方程

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+t\cos\theta, \\ y=2+t\sin\theta, \end{cases}$ (t 为参数)，

代入方程 $(x-3y+10)(2x-y-8)=0$，即 $2x^2-7xy+3y^2+12x+14y-80=0$ 中，

得 $(2\cos^2\theta-7\sin\theta\cdot\cos\theta+3\sin^2\theta)t^2+(10\cos\theta+5\sin\theta)t-28=0$.

由 $t_1+t_2=0$，得 $10\cos\theta+5\sin\theta=0$，
故 l 的斜率 $k=\tan\theta=-2$，
所以直线 l 的方程为 $2x+y-8=0$.

点评 解析几何中，常常遇到有思路但运算繁难的问题，因此要研究运算的方法和技能. 设四个未知数列四个独立的方程，理论上说没有错误，但实际上这样做的同学却往往没有解出来. 方法一利用点 B,C 分别在直线 l_1,l_2 上，只设两个未知数，克服了“多元”的困难. 方法二利用 BC 的中点为 $A(3,2)$ 等，只设一个未知数，也解决了问题. 方法三用到直线参数式方程的特殊形式，其几何意义是 $|AB|=|t_1|$，$|AC|=|t_2|$，由 BC 的中点为 $A(3,2)$，知 $t_1+t_2=0$，从而求出直线 l 的斜率得解. 三种方法中，以方法二最简便，其余两种也给了我们方法上的启示，值得学习.

知识桥

三、两条直线的位置关系

1. 两条直线平行、垂直的充要条件

直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$；
直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$.

(1) $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow$ 方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 无解.

(2) 当 $A_1B_1C_1\neq 0$ 时，$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}\neq\dfrac{C_2}{C_1}$.

(3) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.