

高等学校教材

# 概率论与 数理统计 简明教程

茆诗松 濮晓龙 程依明  
编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 概率论与数理统计 简明教程

Gailülun yu Shuli Tongji Jianming Jiaocheng

茆诗松 濮晓龙 程依明 编著



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《概率论与数理统计教程(第二版)》的简明本,篇幅约减1/3左右,基本内容不减,在深度和广度上有所减少,以适应不同教学时数的理科和工科各专业作为教材使用。

全书共分八章,前四章为概率部分,主要叙述各种概率分布及其性质,后四章为数理统计部分,主要叙述各种参数估计与假设检验方法。本书从实例出发,注重讲清各种基本概念和基本方法的来龙去脉,适合初学者阅读,是一本概率统计的入门书。习题按节配置,供练习使用。

本书除可供学时不多的数学类专业使用外,工科院校各专业及其他专业类似课程也可使用,本书也适合自学使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计简明教程/茆诗松,濮晓龙,程依明编著. —北京:高等教育出版社,2012.1

ISBN 978-7-04-033800-3

I. ①概… II. ①茆… ②濮… ③程… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第274388号

策划编辑 李蕊 责任编辑 李艳馥 封面设计 张申申 版式设计 马敬茹  
插图绘制 尹文军 责任校对 窦丽娜 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 涿州市京南印刷厂  
开本 787mm × 960mm 1/16  
印张 21.5  
字数 400千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
版次 2012年1月第1版  
印次 2012年1月第1次印刷  
定价 31.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究  
物料号 33800-00

# 前 言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《概率论与数理统计教程(第二版)》(以下简称原《教程》)的简明本,篇幅约减 $1/3$ 左右,以适应不同教学时数的理科和工科各专业使用,取名为《概率论与数理统计简明教程》(以下简称《简明教程》)。

这本《简明教程》保持原《教程》一书的框架与特色,基本内容与基本要求不变,而在深度与广度方面要求有所降低。在这一想法的指导下,本书仍为八章,保持原《教程》中一些较好的叙述方式,如把随机事件与随机变量、统计量与估计量、拒绝域与检验的 $p$ 值等几乎同时出现。在概率部分强调分布观念及其分位数,在统计部分强调假设检验思想及与置信区间的关系,力图通过理清这些联系使学生能更深入理解一些基本概念与方法。与此同时,我们也删去一些内容,如事件域、主观概率、概率的连续性、特征函数、贝叶斯估计、似然比检验、非参数检验和多重比较等。原《教程》中丰富多样、富于时代气息的例子大部分都得以保留。习题仍分节设立,但数量上有所减少。全书叙述便于学生阅读,教师易教,促进学生能用随机观念和统计思想去思考问题和处理问题。

本书前四章由程依明编写,后四章由濮晓龙编写,全书由茆诗松统稿。我们几经讨论、修改,完成此书,但不当之处仍在所难免,恳请广大教师和学生提出批评意见,我们将不断努力,力争把这本教材改得更好一些。

茆诗松、濮晓龙、程依明

2011年8月3日

# 目 录

<b>第一章 随机事件与概率</b> .....	1
§ 1.1 随机事件及其运算 .....	1
1.1.1 随机现象和样本空间 .....	1
1.1.2 随机事件 .....	2
1.1.3 随机变量 .....	3
1.1.4 事件间的关系 .....	4
1.1.5 事件间的运算 .....	5
习题 1.1 .....	7
§ 1.2 概率的定义及其确定方法 .....	8
1.2.1 概率的公理化定义 .....	9
1.2.2 确定概率的频率方法 .....	10
1.2.3 确定概率的古典方法 .....	11
习题 1.2 .....	17
§ 1.3 概率的性质 .....	18
1.3.1 概率的可加性 .....	18
1.3.2 概率的单调性 .....	19
1.3.3 概率的加法公式 .....	21
习题 1.3 .....	22
§ 1.4 条件概率 .....	23
1.4.1 条件概率的定义 .....	23
1.4.2 乘法公式 .....	25
1.4.3 全概率公式 .....	25
1.4.4 贝叶斯公式 .....	28
习题 1.4 .....	30
§ 1.5 独立性 .....	31
1.5.1 两个事件的独立性 .....	31
1.5.2 多个事件的相互独立性 .....	32
1.5.3 试验的独立性 .....	34
习题 1.5 .....	35
<b>第二章 随机变量及其分布</b> .....	37
§ 2.1 随机变量及其分布 .....	37
2.1.1 随机变量的概念 .....	37
2.1.2 随机变量的分布函数 .....	38

2.1.3	离散随机变量的概率分布列 .....	40
2.1.4	连续随机变量的概率密度函数 .....	42
	习题 2.1 .....	45
§ 2.2	随机变量的数学期望 .....	47
2.2.1	数学期望的概念 .....	47
2.2.2	数学期望的定义 .....	48
2.2.3	数学期望的性质 .....	51
	习题 2.2 .....	53
§ 2.3	随机变量的方差与标准差 .....	54
2.3.1	方差与标准差的定义 .....	54
2.3.2	方差的性质 .....	56
2.3.3	切比雪夫不等式 .....	56
	习题 2.3 .....	57
§ 2.4	常用离散分布 .....	58
2.4.1	二项分布 .....	59
2.4.2	泊松分布 .....	61
2.4.3	超几何分布 .....	64
	习题 2.4 .....	65
§ 2.5	常用连续分布 .....	66
2.5.1	正态分布 .....	66
2.5.2	均匀分布 .....	71
2.5.3	指数分布 .....	72
2.5.4	伽玛分布 .....	74
	习题 2.5 .....	77
§ 2.6	随机变量函数的分布 .....	79
2.6.1	离散随机变量函数的分布 .....	79
2.6.2	连续随机变量函数的分布 .....	79
	习题 2.6 .....	82
§ 2.7	分布的其他特征数 .....	83
2.7.1	$k$ 阶矩 .....	83
2.7.2	变异系数 .....	84
2.7.3	分位数 .....	85
2.7.4	中位数 .....	86
	习题 2.7 .....	87
<b>第三章</b>	<b>多维随机变量及其分布 .....</b>	<b>89</b>
§ 3.1	多维随机变量及其联合分布 .....	89
3.1.1	多维随机变量 .....	89
3.1.2	联合分布函数 .....	90

3.1.3	联合分布列 .....	91
3.1.4	联合密度函数 .....	92
3.1.5	常用多维分布 .....	93
	习题 3.1 .....	95
§ 3.2	边际分布与随机变量的独立性 .....	96
3.2.1	边际分布函数 .....	97
3.2.2	边际分布列 .....	97
3.2.3	边际密度函数 .....	98
3.2.4	随机变量间的独立性 .....	99
	习题 3.2 .....	101
§ 3.3	多维随机变量函数的分布 .....	102
3.3.1	多维离散随机变量函数的分布 .....	102
3.3.2	最大值与最小值的分布 .....	104
3.3.3	连续场合的卷积公式 .....	106
	习题 3.3 .....	108
§ 3.4	多维随机变量的特征数 .....	109
3.4.1	多维随机变量函数的数学期望、方差与协方差 .....	110
3.4.2	期望、方差与协方差的运算性质 .....	111
3.4.3	相关系数 .....	115
	习题 3.4 .....	121
§ 3.5	条件分布与条件期望 .....	123
3.5.1	条件分布 .....	123
3.5.2	条件数学期望 .....	127
	习题 3.5 .....	130
<b>第四章</b>	<b>大数定律与中心极限定理 .....</b>	<b>132</b>
§ 4.1	大数定律 .....	132
4.1.1	伯努利大数定律 .....	132
4.1.2	常用的几个大数定律 .....	135
	习题 4.1 .....	138
§ 4.2	中心极限定理 .....	139
4.2.1	独立随机变量和 .....	139
4.2.2	独立同分布下的中心极限定理 .....	142
4.2.3	二项分布的正态近似 .....	144
	习题 4.2 .....	147
<b>第五章</b>	<b>统计量及其分布 .....</b>	<b>149</b>
§ 5.1	总体与样本 .....	149
5.1.1	总体与个体 .....	149

5.1.2	样本	151
	习题 5.1	152
§ 5.2	样本数据的整理与显示	153
5.2.1	经验分布函数	153
5.2.2	频数频率表	154
5.2.3	直方图	156
5.2.4	正态概率图	156
	习题 5.2	160
§ 5.3	统计量及其分布	161
5.3.1	统计量与抽样分布	161
5.3.2	样本均值及其抽样分布	162
5.3.3	样本方差与样本标准差	164
5.3.4	样本矩及其函数	167
5.3.5	次序统计量及其分布	167
5.3.6	样本分位数与样本中位数	172
	习题 5.3	173
§ 5.4	三大抽样分布	175
5.4.1	$\chi^2$ 分布(卡方分布)	175
5.4.2	$F$ 分布	178
5.4.3	$t$ 分布	180
	习题 5.4	183
§ 5.5	充分统计量	184
5.5.1	充分性的概念	184
5.5.2	因子分解定理	187
	习题 5.5	189
<b>第六章</b>	<b>参数估计</b>	<b>192</b>
§ 6.1	点估计的概念与无偏性	192
6.1.1	点估计及无偏性	192
6.1.2	有效性	194
	习题 6.1	196
§ 6.2	矩估计及相合性	197
6.2.1	替换原理和矩法估计	197
6.2.2	概率函数已知时未知参数的矩估计	197
6.2.3	相合性	198
	习题 6.2	201
§ 6.3	最大似然估计	201
6.3.1	最大似然估计	202
6.3.2	渐近正态性	205



习题 6.3 .....	207
§ 6.4 一致最小方差无偏估计 .....	208
6.4.1 均方误差 .....	208
6.4.2 一致最小方差无偏估计 .....	209
6.4.3 充分性原则 .....	211
习题 6.4 .....	213
§ 6.5 区间估计 .....	214
6.5.1 区间估计的概念 .....	214
6.5.2 枢轴量法 .....	217
6.5.3 单个正态总体参数的置信区间 .....	218
6.5.4 大样本置信区间 .....	221
6.5.5 样本量的确定 .....	222
6.5.6 两个正态总体下的置信区间 .....	224
习题 6.5 .....	227
<b>第七章 假设检验</b> .....	<b>229</b>
§ 7.1 假设检验的基本思想与概念 .....	229
7.1.1 假设检验问题 .....	229
7.1.2 假设检验的基本步骤 .....	230
7.1.3 检验的 $p$ 值 .....	235
习题 7.1 .....	236
§ 7.2 正态总体参数的假设检验 .....	237
7.2.1 单个正态总体均值的检验 .....	237
7.2.2 假设检验与置信区间的关系 .....	242
7.2.3 两个正态总体均值差的检验 .....	243
7.2.4 正态总体方差的检验 .....	245
习题 7.2 .....	249
§ 7.3 其他分布参数的假设检验 .....	251
7.3.1 指数分布参数的假设检验 .....	251
7.3.2 比率 $p$ 的检验 .....	252
7.3.3 大样本检验 .....	253
习题 7.3 .....	254
§ 7.4 分布的拟合检验 .....	255
7.4.1 分类数据的 $\chi^2$ 拟合优度检验 .....	255
7.4.2 分布的 $\chi^2$ 拟合优度检验 .....	257
7.4.3 列联表的独立性检验 .....	260
习题 7.4 .....	263
<b>第八章 方差分析与回归分析</b> .....	<b>265</b>
§ 8.1 方差分析 .....	265

8.1.1	问题的提出	265
8.1.2	单因子方差分析的统计模型	266
8.1.3	平方和分解	267
8.1.4	检验方法	269
8.1.5	参数估计	272
8.1.6	重复数不等情形	274
	习题 8.1	276
§ 8.2	一元线性回归	278
8.2.1	变量间的两类关系	278
8.2.2	一元线性回归模型	279
8.2.3	回归系数的最小二乘估计	281
8.2.4	回归方程的显著性检验	284
8.2.5	估计与预测	288
	习题 8.2	294
§ 8.3	一元非线性回归	296
8.3.1	确定可能的函数形式	296
8.3.2	参数估计	297
8.3.3	曲线回归方程的比较	300
	习题 8.3	302
<b>附表</b>		303
	表 1 泊松分布函数表	303
	表 2 标准正态分布函数表	305
	表 3 $\chi^2$ 分布分位数 $\chi_p^2(n)$ 表	307
	表 4 $t$ 分布分位数 $t_p(n)$ 表	310
	表 5.1 $F$ 分布 0.90 分位数 $F_{0.90}(f_1, f_2)$ 表	313
	表 5.2 $F$ 分布 0.95 分位数 $F_{0.95}(f_1, f_2)$ 表	314
	表 5.3 $F$ 分布 0.975 分位数 $F_{0.975}(f_1, f_2)$ 表	315
	表 5.4 $F$ 分布 0.99 分位数 $F_{0.99}(f_1, f_2)$ 表	316
	<b>习题参考答案</b>	317
	<b>参考文献</b>	330

# 第一章

## 随机事件与概率

### § 1.1 随机事件及其运算

#### 1.1.1 随机现象和样本空间

概率论与数理统计研究的对象是随机现象. 概率论是研究随机现象的模型(即概率分布), 数理统计是研究随机现象的数据收集与处理.

在一定的条件下, 并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**, 如抛一枚硬币与掷一颗骰子. 随机现象有两个特点:

1. 结果不止一个;
2. 哪一个结果出现, 人们事先并不知道.

只有一个结果的现象称为**确定性现象**. 例如, 每天早晨太阳从东方升起, 水在标准大气压(压力约为 101 kPa)下加热到 100°C 就沸腾.

**例 1.1.1** 随机现象的例子.

- (1) 抛一枚硬币, 有可能正面朝上, 也有可能反面朝上.
- (2) 掷一颗骰子, 出现的点数.
- (3) 一天内进入某超市的顾客数.
- (4) 某种型号电视机的寿命.
- (5) 测量某物理量(长度、直径等)的误差.

随机现象到处可见.

对在相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验称为**随机试验**. 也有很多随机现象是不能重复的, 例如某场足球赛的输赢是不能重复的, 某些经济现象(如失业、经济增长速度等)也不能重复. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象, 但也十分注意研究不能重复的随机现象.

随机现象的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**, 记为  $\Omega = \{\omega\}$ , 其

中  $\omega$  表示基本结果, 又称为样本点. 认识随机现象首先要列出它的样本空间.

**例 1.1.2** 下面给出例 1.1.1 中随机现象的样本空间.

(1) 抛一枚硬币的样本空间为  $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ , 其中  $\omega_1$  表示正面朝上,  $\omega_2$  表示反面朝上.

(2) 掷一颗骰子的样本空间为  $\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ , 其中  $\omega_i$  表示出现  $i$  点,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . 也可更直接明了地记此样本空间为  $\Omega_2 = \{1, 2, \dots, 6\}$ .

(3) 一天内进入某超市的顾客数的样本空间为

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, \dots, 500, \dots, 10^5, \dots\},$$

其中“0”表示“一天内无人光顾此超市”, 而“ $10^5$ ”表示“一天内有十万人光顾此超市”. 虽然此两种情况很少发生, 但我们无法说此两种情况不可能发生, 甚至于我们不能确切地说出一天内进入该超市的最多人数, 所以该样本空间用非负整数集表示, 既不脱离实际情况, 又便于数学上的处理.

(4) 电视机寿命的样本空间为  $\Omega_4 = \{t: t \geq 0\}$ .

(5) 测量误差的样本空间为  $\Omega_5 = \{x: -\infty < x < \infty\}$ .

需要注意的是:

1. 样本空间中的元素可以是数也可以不是数.
2. 样本空间至少有两个样本点, 仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.
3. 从样本空间含有样本点的个数来区分, 将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一类, 称为离散样本空间, 如  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ . 而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类, 称为连续样本空间, 如  $\Omega_4, \Omega_5$ . 由于这两类样本空间有着重要差异, 导致使用数学工具不同, 故分别称呼之.

### 1.1.2 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为随机事件, 简称事件, 常用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示. 如在掷一颗骰子中,  $A =$ “出现奇数点”是一个事件, 即  $A = \{1, 3, 5\}$ , 它是相应样本空间  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个子集.

在以上事件的定义中, 要注意以下几点.

(1) 任一事件  $A$  是相应样本空间的一个子集. 在概率论中常用一个长方形表示样本空间  $\Omega$ , 用其中一个圆或其他几何图形表示事件  $A$ , 见图 1.1.1, 这类图形称为维恩(Venn)图.

(2) 当子集  $A$  中某个样本点出现了, 就说事件  $A$  发生了, 或者说事件  $A$  发生当且仅当  $A$  中某

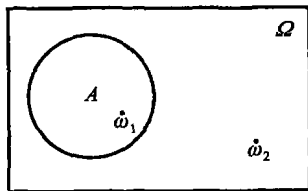


图 1.1.1 事件  $A$  的维恩图

个样本点出现了。

(3) 事件可以用集合表示,也可用明白无误的语言描述。

(4) 由样本空间  $\Omega$  中的单个元素组成的子集称为基本事件. 而样本空间  $\Omega$  的最大子集(即  $\Omega$  本身)称为必然事件. 样本空间  $\Omega$  的最小子集(即空集  $\emptyset$ )称为不可能事件.

**例 1.1.3** 掷一颗骰子的样本空间为  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ .

事件  $A =$ “出现 1 点”,它由  $\Omega$  的单个样本点“1”组成.

事件  $B =$ “出现偶数点”,它由  $\Omega$  的三个样本点“2, 4, 6”组成.

事件  $C =$ “出现的点数小于 7”,它由  $\Omega$  的全部样本点“1, 2, 3, 4, 5, 6”组成,即必然事件  $\Omega$ .

事件  $D =$ “出现的点数大于 6”, $\Omega$  中任一样本点都不在  $D$  中,所以  $D$  是空集,即不可能事件  $\emptyset$ .

### 1.1.3 随机变量

用来表示随机现象结果的变量称为随机变量,常用大写字母  $X, Y, Z$  表示. 很多事件都可用随机变量表示,表示时应写明随机变量的含义. 而随机变量的含义是人们按需要设置出来的. 下面通过一些例子来说明设置是如何进行的.

**例 1.1.4** 很多随机现象的结果本身就是数,把这些数看作某特设变量的取值就可获得随机变量. 如掷一颗骰子,可能出现 1, 2, 3, 4, 5, 6 诸点. 若设置  $X =$ “掷一颗骰子出现的点数”,则 1, 2, 3, 4, 5, 6 就是随机变量  $X$  的可能取值,这时

- 事件“出现 3 点”可用“ $X=3$ ”表示.
- 事件“出现点数超过 3 点”可用“ $X>3$ ”表示.
- “ $X \leq 6$ ”是必然事件  $\Omega$ .
- “ $X=7$ ”是不可能事件  $\emptyset$ .

在这个随机现象中若再设  $Y =$ “掷一颗骰子 6 点出现的次数”,则  $Y$  是仅取 0 或 1 两个值的随机变量,这是与  $X$  不同的另一个随机变量. 这时

- “ $Y=0$ ”表示事件“没有出现 6 点”.
- “ $Y=1$ ”表示事件“出现 6 点”.
- “ $Y \leq 1$ ”是必然事件  $\Omega$ .
- “ $Y \geq 2$ ”是不可能事件  $\emptyset$ .

上述讨论表明:在同一个随机现象中,不同的设置可获得不同的随机变量,如何设置可按需要进行.

**例 1.1.5** 有些随机现象的结果虽然不是数,但仍可根据需要设计出有意义的随机变量. 如检验一件产品的可能结果有两个:合格品与不合格品. 若我们把注意点放在不合格品上,则设置  $X =$ “检查一件产品所得的不合格品数”, $X$  是

仅取 0 与 1 的随机变量,且“ $X=0$ ”表示事件“出现合格品”,“ $X=1$ ”表示事件“出现不合格品”。

若检查 10 件产品,其中不合格品数  $Y$  是一个随机变量,它仅可能取 0, 1, 2, …, 10 等 11 个值,且

- 事件“不合格品数不多于 1 件”可用“ $Y \leq 1$ ”表示。
- “ $Y=0$ ”表示事件“全是合格品”。
- “ $Y=10$ ”表示事件“全是不合格品”。
- “ $Y < 0$ ”是不可能事件  $\emptyset$ 。
- “ $Y \leq 10$ ”是必然事件  $\Omega$ 。

由此可见,随机变量是人们根据研究的需要设置出来的,若把它用等号或不等号与某些实数联结起来就可以表示很多事件. 这种表示方法形式简洁、含义明确、使用方便. 今后遇到的大量事件都将用随机变量表示。

### 1.1.4 事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一个样本空间  $\Omega$  (即同一个随机现象)中进行. 事件间的关系与集合间的关系一样,主要有以下几种:

#### 一、包含关系

如果属于  $A$  的样本点必属于  $B$ ,则称  $A$  被包含在  $B$  中(见图 1.1.2),或称  $B$  包含  $A$ ,记为  $A \subset B$ ,或  $B \supset A$ . 用语言描述为:事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生.

譬如掷一颗骰子,事件  $A$  = “出现 4 点”的发生必然导致事件  $B$  = “出现偶数点”的发生,故  $A \subset B$ .

又如电视机的寿命  $T$  超过 10 000 h (记为事件  $A = \{T > 10\,000\}$ ) 和  $T$  超过 20 000 h (记为事件  $B = \{T > 20\,000\}$ ),则  $A \supset B$ ,见图 1.1.3.

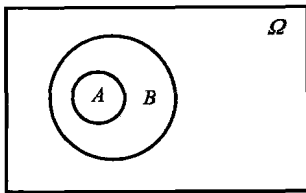


图 1.1.2  $A \subset B$

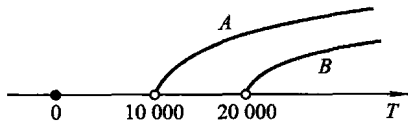


图 1.1.3  $\{T > 10\,000\} \supset \{T > 20\,000\}$

对任一事件  $A$ ,必有  $\emptyset \subset A \subset \Omega$ .

#### 二、相等关系

如果事件  $A$  与事件  $B$  满足:属于  $A$  的样本点必属于  $B$ ,而且属于  $B$  的样本点必属于  $A$ ,即  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,则称事件  $A$  与  $B$  相等,记为  $A = B$ .

从集合论观点看,两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合. 下例说

明:有时不同语言描述的事件也可能是同一件事.

例 1.1.6 掷两颗骰子,以  $A$  记事件“两颗骰子的点数之和为奇数”,以  $B$  记事件“两颗骰子的点数为奇一偶”.很容易看出: $A$  发生必然导致  $B$  发生,而且  $B$  发生也必然导致  $A$  发生,所以  $A=B$ .

### 三、互不相容

如果  $A$  与  $B$  没有相同的样本点(见图 1.1.4),则称  $A$  与  $B$  互不相容.用语言描述为: $A$  与  $B$  互不相容就是事件  $A$  与事件  $B$  不可能同时发生.

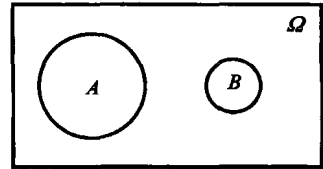


图 1.1.4  $A$  与  $B$  互不相容

如在电视机寿命试验中,“寿命小于 1 万小时”与“寿命大于 5 万小时”是两个互不相容的事件,因为它们不可能同时发生.

### 1.1.5 事件间的运算

事件的运算与集合的运算相当,有并、交、差和余等四种运算.

#### 一、事件 $A$ 与 $B$ 的并

记为  $A \cup B$ . 其含义为“由事件  $A$  与  $B$  中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件”(见图 1.1.5). 或用语言描述为“事件  $A$  与  $B$  中至少有一个发生”.

如在掷一颗骰子的试验中,记事件  $A = \text{“出现奇数点”} = \{1, 3, 5\}$ , 记事件  $B = \text{“出现的点数不超过 3”} = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A$  与  $B$  的并为  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ .

#### 二、事件 $A$ 与 $B$ 的交

记为  $A \cap B$ , 或简记为  $AB$ . 其含义为“由事件  $A$  与  $B$  中公共的样本点组成的新事件”(见图 1.1.6). 或用语言描述为“事件  $A$  与  $B$  同时发生”.

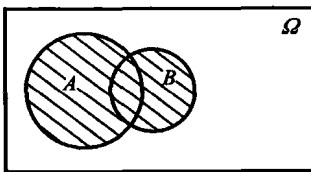


图 1.1.5  $A$  与  $B$  的并

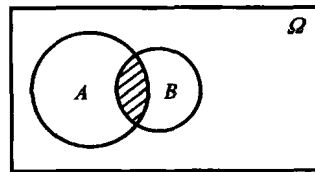


图 1.1.6  $A$  与  $B$  的交

如在掷一颗骰子的试验中,记事件  $A = \text{“出现奇数点”} = \{1, 3, 5\}$ , 记事件  $B = \text{“出现的点数不超过 3”} = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A$  与  $B$  的交为  $AB = \{1, 3\}$ .

若事件  $A$  与  $B$  为互不相容,则其交必为不可能事件,即  $AB = \emptyset$ , 反之亦然. 这表明:  $AB = \emptyset$  就意味着  $A$  与  $B$  是互不相容事件.

事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件, 譬如有事件  $A_1, A_2, \dots$ ,

则  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  称为有限并,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  称为可列并,  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  称为有限交,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  称为可列交.

### 三、事件 $A$ 对 $B$ 的差

记为  $A-B$ . 其含义为“由在事件  $A$  中而不在  $B$  中的样本点组成的新事件” (见图 1.1.7). 或用语言描述为“事件  $A$  发生而  $B$  不发生”.

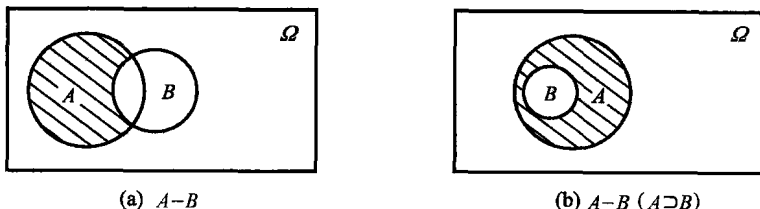


图 1.1.7

如在掷一颗骰子的试验中, 记事件  $A = \text{“出现奇数点”} = \{1, 3, 5\}$ , 记事件  $B = \text{“出现的点数不超过 3”} = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A$  对  $B$  的差为  $A-B = \{5\}$ .

若设  $X$  为随机变量, 则有

$$\{X = a\} = \{X \leq a\} - \{X < a\}, \quad \{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.$$

### 四、对立事件

事件  $A$  的对立事件, 记为  $\bar{A}$ , 即“由在  $\Omega$  中而不在  $A$  中的样本点组成的新事件” (见图 1.1.8), 或用语言描述为“ $A$  不发生”, 即  $\bar{A} = \Omega - A$ . 注意, 对立事件是相互的, 即  $A$  的对立事件是  $\bar{A}$ , 而  $\bar{A}$  的对立事件是  $A$ , 即  $\overline{\bar{A}} = A$ . 必然事件  $\Omega$  与不可能事件  $\emptyset$  互为对立事件, 即  $\overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$ .

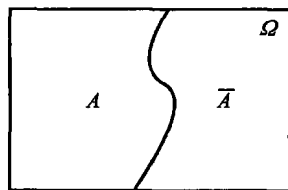


图 1.1.8  $A$  的对立事件  $\bar{A}$

如在掷一颗骰子的试验中, 事件  $A = \text{“出现奇数点”} = \{1, 3, 5\}$  的对立事件是  $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ , 事件  $B = \text{“出现的点数不超过 3”} = \{1, 2, 3\}$  的对立事件是  $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$ .

$A$  与  $B$  互为对立事件的充要条件是:  $A \cap B = \emptyset$ , 且  $A \cup B = \Omega$ .

此性质也可作为对立事件的另一种定义, 即如果事件  $A$  与  $B$  满足:  $A \cap B = \emptyset$ , 且  $A \cup B = \Omega$ , 则称  $A$  与  $B$  互为对立事件, 记为  $\bar{A} = B, \bar{B} = A$ .

需要注意的是:

1. 对立事件一定是互不相容的事件, 即  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ . 但互不相容的事件不一定是对立事件.



2.  $A-B$  可以记为  $A\bar{B}$ .

例 1.1.7 从数字  $1, 2, \dots, 9$  中可重复地任取  $n$  次 ( $n \geq 2$ ), 以  $A$  表示事件“所取的  $n$  个数字的乘积能被 10 整除”. 因为乘积能被 10 整除必须既取到数字 5, 又要取到偶数, 所以  $A$  的对立事件  $\bar{A}$  为“所取的  $n$  个数字中或者没有 5, 或者没有偶数”. 如果记  $B =$ “所取的  $n$  个数字中没有 5”,  $C =$ “所取的  $n$  个数字中没有偶数”, 则  $\bar{A} = B \cup C$ .

例 1.1.8 设  $A, B, C$  是某个随机现象的三个事件, 则

(1) 事件“ $A$  与  $B$  发生,  $C$  不发生”可表示为:  $AB\bar{C} = AB - C$ .

(2) 事件“ $A, B, C$  中至少有一个发生”可表示为:  $A \cup B \cup C$ .

(3) 事件“ $A, B, C$  中至少有两个发生”可表示为:  $AB \cup AC \cup BC$ .

(4) 事件“ $A, B, C$  中恰好有两个发生”可表示为:  $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$ .

(5) 事件“ $A, B, C$  同时发生”可表示为:  $ABC$ .

(6) 事件“ $A, B, C$  都不发生”可表示为:  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

(7) 事件“ $A, B, C$  不全发生”可表示为:  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

## 五、事件的运算性质

### 1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA. \quad (1.1.1)$$

### 2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (1.1.2)$$

$$(AB)C = A(BC). \quad (1.1.3)$$

### 3. 分配律

$$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC, \quad (1.1.4)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (1.1.5)$$

### 4. 对偶律 (德摩根公式)

$$\text{事件并的对立等于对立的交: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad (1.1.6)$$

$$\text{事件交的对立等于对立的并: } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (1.1.7)$$

事件运算的对偶律是很有用的公式. 这些性质用集合是不难证明的.

## 习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛三枚硬币;