高等学校教材

概率论与数理统计简明教程

茆诗松　濮晓龙　程依明
编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计简明教程

Gailülun yu Shuli Tongji Jianming Jiaocheng

茆诗松　濮晓龙　程依明　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材《概率论与数理统计教程（第二版）》的简明本，篇幅约减1/3左右，基本内容不减，在深度和广度上有所减少，以适应不同教学时数的理科和工科各专业作为教材使用。

全书共分八章，前四章为概率部分，主要叙述各种概率分布及其性质，后四章为数理统计部分，主要叙述各种参数估计与假设检验方法。本书从实例出发，注重讲清各种基本概念和基本方法的来龙去脉，适合初学者阅读，是一本概率统计的入门书。 习题按节配置，供练习使用。

本书除可供学时不多的数学类专业使用外，工科院校各专业及其他专业类似课程也可使用，本书也适合自学使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计简明教程/茆诗松，濮晓龙，程依明编著．—北京：高等教育出版社，2012.1
ISBN 978-7-04-033800-3

Ⅰ．①概… Ⅱ．①茆… ②濮… ③程… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第274388号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李艳馥　　封面设计 张申申　　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹文军　　责任校对 窦丽娜　　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 涿州市京南印刷厂
开　　本 787mm × 960mm　1/16
印　　张 21.5
字　　数 400千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012年1月第1版
印　　次 2012年1月第1次印刷
定　　价 31.40元

物 料 号 33800-00

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《概率论与数理统计教程（第二版）》（以下简称原《教程》）的简明本，篇幅约减1/3左右，以适应不同教学时数的理科和工科各专业使用，取名为《概率论与数理统计简明教程》（以下简称《简明教程》）。

这本《简明教程》保持原《教程》一书的框架与特色，基本内容与基本要求不变，而在深度与广度方面要求有所降低。在这一想法的指导下，本书仍为八章，保持原《教程》中一些较好的叙述方式，如把随机事件与随机变量、统计量与估计量、拒绝域与检验的p值等几乎同时出现。在概率部分强调分布观念及其分位数，在统计部分强调假设检验思想及与置信区间的关系，力图通过理清这些联系使学生能更深入理解一些基本概念与方法。与此同时，我们也删去一些内容，如事件域、主观概率、概率的连续性、特征函数、贝叶斯估计、似然比检验、非参数检验和多重比较等。原《教程》中丰富多样、富于时代气息的例子大部分都得以保留。习题仍分节设立，但数量上有所减少。全书叙述便于学生阅读，教师易教，促进学生能用随机观念和统计思想去思考问题和处理问题。

本书前四章由程依明编写，后四章由濮晓龙编写，全书由茆诗松统稿。我们几经讨论、修改，完成此书，但不当之处仍在所难免，恳请广大教师和学生提出批评意见，我们将不断努力，力争把这本教材改得更好一些。

茆诗松、濮晓龙、程依明

2011年8月3日

目　　录

第一章

随机事件与概率

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象和样本空间

概率论与数理统计研究的对象是随机现象. 概率论是研究随机现象的模型(即概率分布),数理统计是研究随机现象的数据收集与处理.

在一定的条件下,并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**,如抛一枚硬币与掷一颗骰子. 随机现象有两个特点:

1. 结果不止一个;
2. 哪一个结果出现,人们事先并不知道.

只有一个结果的现象称为**确定性现象**. 例如,每天早晨太阳从东方升起,水在标准大气压(压力约为 101 kPa)下加热到 100℃就沸腾.

例 1.1.1 随机现象的例子.

(1) 抛一枚硬币,有可能正面朝上,也有可能反面朝上.

(2) 掷一颗骰子,出现的点数.

(3) 一天内进入某超市的顾客数.

(4) 某种型号电视机的寿命.

(5) 测量某物理量(长度、直径等)的误差.

随机现象到处可见.

对在相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验称为**随机试验**. 也有很多随机现象是不能重复的,例如某场足球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如失业、经济增长速度等)也不能重复. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象,但也十分注意研究不能重复的随机现象.

随机现象的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其

中 ω 表示基本结果，又称为**样本点**. 认识随机现象首先要列出它的样本空间.

例 1.1.2 下面给出例 1.1.1 中随机现象的样本空间.

（1）抛一枚硬币的样本空间为 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中 ω_1 表示正面朝上，ω_2 表示反面朝上.

（2）掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中 ω_i 表示出现 i 点，$i=1,2,\cdots,6$. 也可更直接明了地记此样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,\cdots,6\}$.

（3）一天内进入某超市的顾客数的样本空间为

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,500,\cdots,10^5,\cdots\},$$

其中“0”表示“一天内无人光顾此超市”，而“10^5”表示“一天内有十万人光顾此超市”. 虽然此两种情况很少发生，但我们无法说此两种情况不可能发生，甚至于我们不能确切地说出一天内进入该超市的最多人数，所以该样本空间用非负整数集表示，既不脱离实际情况，又便于数学上的处理.

（4）电视机寿命的样本空间为 $\Omega_4=\{t:t\geqslant 0\}$.

（5）测量误差的样本空间为 $\Omega_5=\{x:-\infty<x<\infty\}$.

需要注意的是：

1. 样本空间中的元素可以是数也可以不是数.

2. 样本空间至少有两个样本点，仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.

3. 从样本空间含有样本点的个数来区分，将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一类，称为**离散样本空间**，如 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$. 而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类，称为**连续样本空间**，如 Ω_4,Ω_5. 由于这两类样本空间有着重要差异，导致使用数学工具不同，故分别称呼之.

1.1.2 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 如在掷一颗骰子中，$A=$“出现奇数点”是一个事件，即 $A=\{1,3,5\}$，它是相应样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个子集.

在以上事件的定义中，要注意以下几点.

（1）任一事件 A 是相应样本空间的一个子集. 在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω，用其中一个圆或其他几何图形表示事件 A，见图 1.1.1，这类图形称为**维恩**（Venn）**图**.

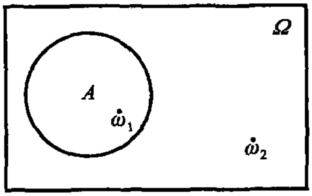


图 1.1.1 事件 A 的维恩图

（2）当子集 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了，或者说事件 A 发生当且仅当 A 中某

个样本点出现了.

(3) 事件可以用集合表示,也可用明白无误的语言描述.

(4) 由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**. 而样本空间 Ω 的最大子集(即 Ω 本身)称为**必然事件**. 样本空间 Ω 的最小子集(即空集 $\varnothing$)称为**不可能事件**.

例 1.1.3 掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

事件 A="出现 1 点",它由 Ω 的单个样本点"1"组成.

事件 B="出现偶数点",它由 Ω 的三个样本点"2,4,6"组成.

事件 C="出现的点数小于 7",它由 Ω 的全部样本点"1,2,3,4,5,6"组成,即必然事件 Ω.

事件 D="出现的点数大于 6",Ω 中任一样本点都不在 D 中,所以 D 是空集,即不可能事件 $\varnothing$.

1.1.3 随机变量

用来表示随机现象结果的变量称为**随机变量**,常用大写字母 X,Y,Z 表示. 很多事件都可用随机变量表示,表示时应写明随机变量的含义. 而随机变量的含义是人们按需要设置出来的. 下面通过一些例子来说明设置是如何进行的.

例 1.1.4 很多随机现象的结果本身就是数,把这些数看作某特设变量的取值就可获得随机变量. 如掷一颗骰子,可能出现 1,2,3,4,5,6 诸点. 若设置 X="掷一颗骰子出现的点数",则 1,2,3,4,5,6 就是随机变量 X 的可能取值,这时

- 事件"出现 3 点"可用"$X=3$"表示.
- 事件"出现点数超过 3 点"可用"$X>3$"表示.
- "$X\leqslant 6$"是必然事件 Ω.
- "$X=7$"是不可能事件 $\varnothing$.

在这个随机现象中若再设 Y="掷一颗骰子 6 点出现的次数",则 Y 是仅取 0 或 1 两个值的随机变量,这是与 X 不同的另一个随机变量. 这时

- "$Y=0$"表示事件"没有出现 6 点".
- "$Y=1$"表示事件"出现 6 点".
- "$Y\leqslant 1$"是必然事件 Ω.
- "$Y\geqslant 2$"是不可能事件 $\varnothing$.

上述讨论表明:在同一个随机现象中,不同的设置可获得不同的随机变量,如何设置可按需要进行.

例 1.1.5 有些随机现象的结果虽然不是数,但仍可根据需要设计出有意义的随机变量. 如检验一件产品的可能结果有两个:合格品与不合格品. 若我们把注意点放在不合格品上,则设置 X="检查一件产品所得的不合格品数",X 是

仅取 0 与 1 的随机变量,且“$X=0$”表示事件“出现合格品”,“$X=1$”表示事件“出现不合格品”.

若检查 10 件产品,其中不合格品数 Y 是一个随机变量,它仅可能取 0,1,2,…,10 等 11 个值,且

- 事件“不合格品数不多于 1 件”可用“$Y\leqslant 1$”表示.
- “$Y=0$”表示事件“全是合格品”.
- “$Y=10$”表示事件“全是不合格品”.
- “$Y<0$”是不可能事件$\varnothing$.
- “$Y\leqslant 10$”是必然事件 Ω.

由此可见,随机变量是人们根据研究的需要设置出来的,若把它用等号或不等号与某些实数联结起来就可以表示很多事件. 这种表示方法形式简洁、含义明确、使用方便. 今后遇到的大量事件都将用随机变量表示.

1.1.4 事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω(即同一个随机现象)中进行. 事件间的关系与集合间的关系一样,主要有以下几种:

一、包含关系

如果属于 A 的样本点必属于 B,则称 **A 被包含在 B 中**(见图 1.1.2),或称 **B 包含 A**,记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$. 用语言描述为:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

譬如掷一颗骰子,事件 A=“出现 4 点”的发生必然导致事件 B=“出现偶数点”的发生,故 $A\subset B$.

又如电视机的寿命 T 超过 10 000 h(记为事件 $A=\{T>10\ 000\}$)和 T 超过 20 000 h(记为事件 $B=\{T>20\ 000\}$),则 $A\supset B$,见图 1.1.3.

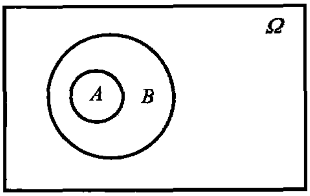


图 1.1.2 $A\subset B$

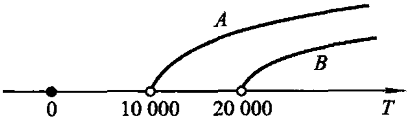


图 1.1.3 $\{T>10\ 000\}\supset\{T>20\ 000\}$

对任一事件 A,必有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

二、相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足:属于 A 的样本点必属于 B,而且属于 B 的样本点必属于 A,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与 B 相等**,记为 $A=B$.

从集合论观点看,两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合. 下例说

明:有时不同语言描述的事件也可能是同一件事.

例 1.1.6 掷两颗骰子,以 A 记事件"两颗骰子的点数之和为奇数",以 B 记事件"两颗骰子的点数为一奇一偶". 很容易看出:A 发生必然导致 B 发生,而且 B 发生也必然导致 A 发生,所以 $A=B$.

三、互不相容

如果 A 与 B 没有相同的样本点(见图 1.1.4),则称 **A 与 B 互不相容**. 用语言描述为:A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

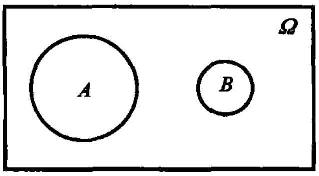


图 1.1.4　A 与 B 互不相容

如在电视机寿命试验中,"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两个互不相容的事件,因为它们不可能同时发生.

1.1.5　事件间的运算

事件的运算与集合的运算相当,有并、交、差和余等四种运算.

一、事件 A 与 B 的并

记为 $A\cup B$. 其含义为"由事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件"(见图 1.1.5). 或用语言描述为"事件 A 与 B 中至少有一个发生".

如在掷一颗骰子的试验中,记事件 A="出现奇数点"$=\{1,3,5\}$,记事件 B="出现的点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$,则 A 与 B 的并为 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$.

二、事件 A 与 B 的交

记为 $A\cap B$,或简记为 AB. 其含义为"由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件"(见图 1.1.6). 或用语言描述为"事件 A 与 B 同时发生".

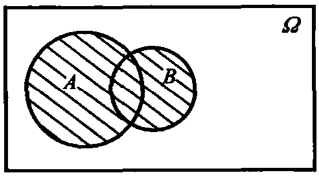


图 1.1.5　A 与 B 的并

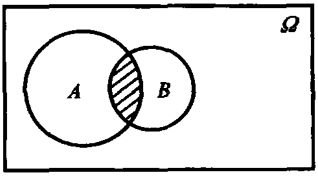


图 1.1.6　A 与 B 的交

如在掷一颗骰子的试验中,记事件 A="出现奇数点"$=\{1,3,5\}$,记事件 B="出现的点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$,则 A 与 B 的交为 $AB=\{1,3\}$.

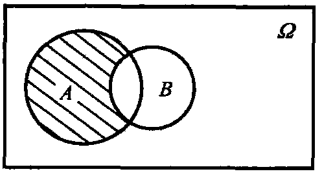
若事件 A 与 B 为互不相容,则其交必为不可能事件,即 $AB=\varnothing$,反之亦然. 这表明:$AB=\varnothing$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件.

事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件,譬如有事件 $A_1,A_2,\cdots$,

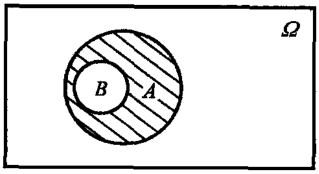
则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 称为有限并，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 称为可列并，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 称为有限交，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 称为可列交.

三、事件 A 对 B 的差

记为 $A-B$. 其含义为"由在事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的新事件"(见图 1.1.7). 或用语言描述为"事件 A 发生而 B 不发生".



(a) $A-B$



(b) $A-B$ ($A\supset B$)

图 1.1.7

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$"出现的点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$，则 A 对 B 的差为 $A-B=\{5\}$.

若设 X 为随机变量，则有

$$\{X=a\}=\{X\leqslant a\}-\{X<a\},\quad \{a<X\leqslant b\}=\{X\leqslant b\}-\{X\leqslant a\}.$$

四、对立事件

事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，即"由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件"(见图 1.1.8)，或用语言描述为"A 不发生"，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 注意，对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

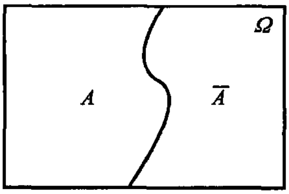


图 1.1.8　A 的对立事件 $\overline{A}$

如在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=$"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$ 的对立事件是 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，事件 $B=$"出现的点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$ 的对立事件是 $\overline{B}=\{4,5,6\}$.

A 与 B 互为对立事件的充要条件是：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$.

此性质也可作为对立事件的另一种定义，即如果事件 A 与 B 满足：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件，记为 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$.

需要注意的是：

1. 对立事件一定是互不相容的事件，即 $A\cap\overline{A}=\varnothing$. 但互不相容的事件不一定是对立事件.

2. $A-B$ 可以记为 $A\overline{B}$.

例 1.1.7 从数字 1,2,…,9 中可重复地任取 n 次($n\geqslant 2$),以 A 表示事件"所取的 n 个数字的乘积能被 10 整除".因为乘积能被 10 整除必须既取到数字 5,又要取到偶数,所以 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为"所取的 n 个数字中或者没有 5,或者没有偶数".如果记 B="所取的 n 个数字中没有 5",C="所取的 n 个数字中没有偶数",则 $\overline{A}=B\cup C$.

例 1.1.8 设 A,B,C 是某个随机现象的三个事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为:$AB\overline{C}=AB-C$.

(2) 事件"A,B,C 中至少有一个发生"可表示为:$A\cup B\cup C$.

(3) 事件"A,B,C 中至少有两个发生"可表示为:$AB\cup AC\cup BC$.

(4) 事件"A,B,C 中恰好有两个发生"可表示为:$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(5) 事件"A,B,C 同时发生"可表示为:ABC.

(6) 事件"A,B,C 都不发生"可表示为:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(7) 事件"A,B,C 不全发生"可表示为:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

五、事件的运算性质

1. **交换律**

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA. \tag{1.1.1}$$

2. **结合律**

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \tag{1.1.2}$$

$$(AB)C=A(BC). \tag{1.1.3}$$

3. **分配律**

$$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC, \tag{1.1.4}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{1.1.5}$$

4. **对偶律(德摩根公式)**

事件并的对立等于对立的交: $$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \tag{1.1.6}$$

事件交的对立等于对立的并: $$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{1.1.7}$$

事件运算的对偶律是很有用的公式.这些性质用集合是不难证明的.

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛三枚硬币;