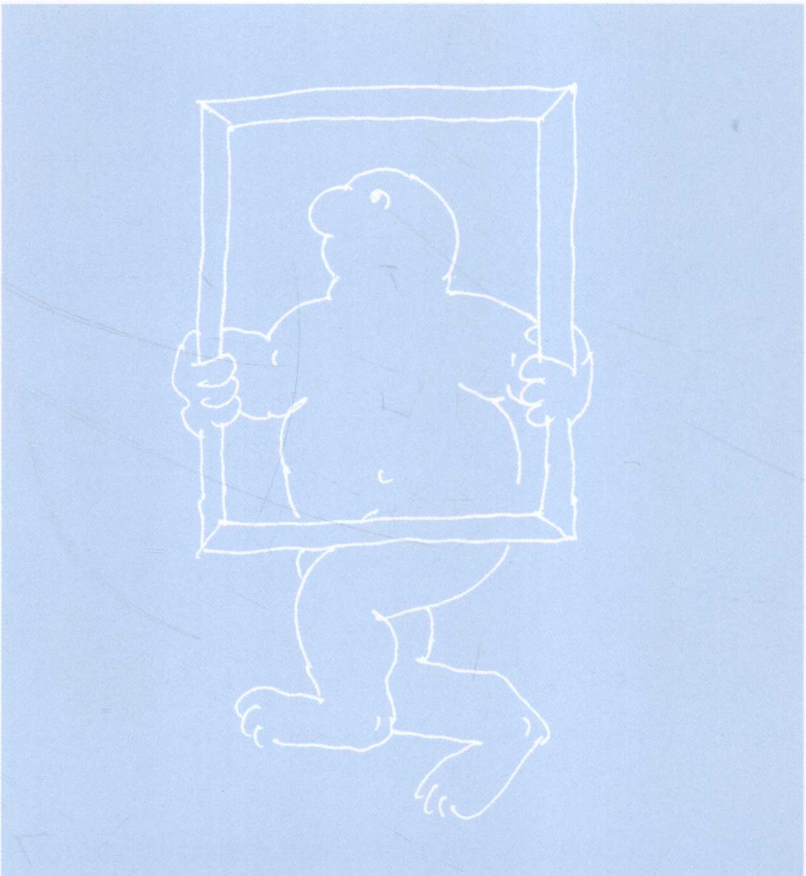
中国社会科学院创新工程学术出版资助项目

图式逻辑

刘新文 ● 著

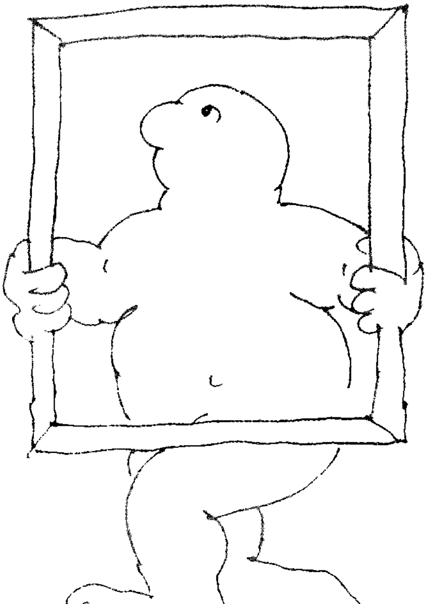


中国社会科学出版社

中国社会科学院创新工程学术出版资助项目

图式逻辑

刘新文 著



中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

图式逻辑/刘新文著.—北京:中国社会科学出版社,2012.6
ISBN 978-7-5161-1379-0

Ⅰ.①图… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①逻辑 Ⅳ.①B81

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第216559号

出 版 人 赵剑英
责任编辑 田 文
特约编辑 余俊伟
责任校对 刘 俊
责任印制 李 建

出　　版 中国社会科学出版社
社　　址 北京鼓楼西大街甲158号(邮编100720)
网　　址 http://www.csspw.cn
中文域名:中国社科网　　010-64070619
发 行 部 010-84083685
门 市 部 010-84029450
经　　销 新华书店及其他书店

印　　刷 北京君升印刷有限公司
装　　订 廊坊市广阳区广增装订厂
版　　次 2012年6月第1版
印　　次 2012年6月第1次印刷

开　　本 710×1000　1/16
印　　张 13
插　　页 2
字　　数 253千字
定　　价 39.00元

凡购买中国社会科学出版社图书,如有质量问题请与本社联系调换
电话:010-64009791

前　言

逻辑研究有效推理。一个推理是有效的是因为结论所传达的信息与前提所传达的信息之间的必然关系，而传达这些信息的媒介不一定就是语言，图形在人类推理中同样也扮演着非常重要的角色。

本书考察的对象是历史上著名的逻辑图及其逻辑理论。逻辑图首先是为理解亚里士多德的直言命题和三段论推理而发展起来的，其开端一般追溯到欧拉图。围绕着图形的可表达性问题，在长期的历史发展过程中，经过欧拉、文恩和皮尔士等人的努力，逻辑图从最初的设想变成了现实，从最初的简单表述三段论的工具发展成了关系逻辑和模态逻辑等的图式表示。在数学和逻辑领域，由来已久的观点是，“（图形）只是促进某些推理训练的辅助工具；……作为一种证明论手段它并不重要；实际上，……它在证明本身中没有恰当的位置。因为证明是一个句法对象，只由有穷多的、带有标签的句子组成”,① 图形仅仅是一种直观的教学辅助工具，精确的数学推理和逻辑演算根本就无法用图形来模拟。皮尔士的革命性思想不仅克服了逻辑图的重大缺陷，而且为逻辑图打开了一个新的天地：存在图是在现代意义上可靠的和完全的图式逻辑系统。当代的逻辑学家们更是在现代逻辑的基础上、运用现代逻辑的工具和技术对逻辑图进行形式化研究，建立了一大批形式的图形推理系统，并运用到哲学、计算机科学和人工智能等领域，深刻地改变了逻辑图的发展，在此基础上提出的“图式逻辑”的新概念更是为哲学逻辑增添了一个新的分支。在其历史发展过程之中，随着表达能力的逐步提高，特别是由于对“否定”的表示，逻辑图的直观性程度也在逐步降低。

围绕着图形的可表达性问题，我们在第 1 章考察逻辑图从古典形式走向形式化的发展历程。古典的逻辑图主要包括欧拉图和文恩图（一般也把经过

① Tennant, 1986.

皮尔士改造过的文恩图——“皮尔士－文恩图”包括在内)。由于可靠（且完全）的逻辑推演规则的提出，在逻辑图从古典形式走向形式化的发展历程中，具有转折性的是皮尔士－文恩图以及皮尔士的存在图系统，现代形式的图式逻辑就是在这两者的基础上建立起来的。

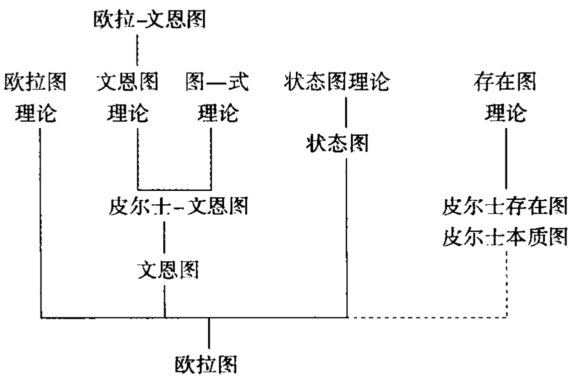
第2章研究的是欧拉图。逻辑图一般追溯到欧拉图，欧拉图的基本形式以圆表示非空非全的类。欧拉的系统具有各种各样的缺陷，后人沿着不同方向对其进行过各种改进。现代逻辑视野中的欧拉图将突出欧拉图的可视方面，在不添加新的语法对象的基础上严格按照现代逻辑的工具和技术来研究欧拉图，建立起一个具有可靠和完全的推演规则的形式系统，并研究其模型论性质，然后把这些技术和方法推广到在欧拉图基础上直接扩张而成的一类图形——状态图。

第3、4章的研究对象是文恩图及其扩展。文恩图是文恩在欧拉图系统的基础上从图形的表达能力方面对欧拉图改造而成的，皮尔士沿着文恩对欧拉图的改进的方向作了发挥，使得文恩图的表达能力得到了进一步的提高，所得的逻辑图解系统史称“皮尔士－文恩图”。另外，皮尔士还在自己改进的图形系统中引进了图形转换规则，尽管皮尔士的这些规则还不尽完善。20世纪90年代以来出现的新理论使皮尔士的规则完善起来。沿着皮尔士对文恩图在表达力方面的扩展，20世纪90年代以来，一些新的尝试是把文恩图和文恩图、欧拉图和文恩图、图形和逻辑公式组合起来，以及新近正在研究的蜘蛛图、约束图，等等。

我们在第5章研究皮尔士的存在图系统。1896年，皮尔士在接受文恩对欧拉图的改进的基础上，沿着相同的方向作了发挥，使得图的逻辑表达能力得到了进一步的提高，所得的逻辑图解系统史称“皮尔士－文恩图”。但是，皮尔士认为迄今为止的逻辑图在“镜像性”方面都不能让自己满意。凭借自己在化学和其他学科的经验，皮尔士相信逻辑需要有一种可视的记法，这种记法可以像化学中显示分子结构的化学图那样来显示命题的结构。因此，在改造文恩图的同时皮尔士创立了自己的镜像逻辑——“存在图”系统。存在图是皮尔士多产的一生最后20年对逻辑学的主要贡献，是现代逻辑草创时期皮尔士在其关系演算和谓词逻辑的基础上发展起来的、表示逻辑句子和逻辑推理的图式系统，具有和一阶逻辑相同的表达能力，是皮尔士用来证明其实效主义的工具。我们将在本章中详细研究存在图的主要内容、发展历程及其哲学意义，以及皮尔士提出的存在图判定问题（命题逻辑部分），除此之

外，我们把皮尔士关于存在图的线性记法的一个介绍的译文附在后面作为附录。

为了直观、快捷地把握本书的主要内容以及逻辑图的发展脉络及其相互之间的传承关系，我们用下列形式的树状图来表示本书所研究的逻辑图及其逻辑理论的谱系（按照年代远近从下到上排列，其中实线表示具有直接的扩展关系，虚线则表示没有这种关系，而是在不同解释的基础上发展起来的；位置的高低大致表示年代的差异）：



除了这个树状图中反映出来的逻辑图，本书还简单介绍了最近在它们的基础上发展出来的逻辑图，如蜘蛛图、限制图，等等。

承蒙赵汀阳先生厚爱，封面的漫画是他绘制的。

逻辑图在高校逻辑教学中仍是必不可少的内容之一，希望本书对促进我国逻辑教学和研究有所助益，但由于水平有限，难免存在一些问题和错误，希望得到广大专家、读者的批评指正。

刘新文
中国社会科学院哲学研究所
2012 年 3 月

目　　录

第1章 逻辑图:从古典到形式化

图形在人类推理中扮演着非常重要的角色，逻辑图是逻辑的核心概念之一。① 逻辑图首先是为理解亚里士多德的直言命题和三段论推理而发展起来的，其开端一般追溯到欧拉图。围绕着图形的可表达性问题，在长期的历史发展过程中，经过莱布尼茨、欧拉、文恩和皮尔士等人的努力，逻辑图从最初的设想变成了现实，从最初的简单表述三段论的工具发展成了关系逻辑和模态逻辑等的图式表示。当代的逻辑学家们更是在现代逻辑的基础上，运用现代逻辑的工具和技术对逻辑图进行形式化研究，建立起一大批形式的图形推理系统，考察了这些系统独到的理论特点，并运用到哲学、计算机科学和人工智能等领域，深刻地改变了逻辑图的发展；与此同时，在此基础上提出的“图式逻辑”的新概念更是为哲学逻辑增添了一个新的分支。②

我们在本章考察逻辑图围绕着图形的可表达性问题从古典形式走向形式化的发展历程。古典的逻辑图主要包括欧拉图和文恩图（通常教材中所说的文恩图是经过皮尔士改造过的“皮尔士－文恩图”）。由于可靠（且完全）的逻辑推演规则的提出，在逻辑图从古典形式走向形式化的发展历程中，具有转折性的是皮尔士－文恩图以及皮尔士的存在图系统，现代形式的图式逻辑首先就是在这两者的基础上建立起来的。

§1.1 古典形式：欧拉图和文恩图

1761年，瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）引入被后人

① 正在陆续出版的11卷《逻辑史手册》专辟一卷（第11卷《逻辑：其核心概念的历史》）详述逻辑图、后承关系、量词、否定、联结词、真值、模态词等概念。参见 Moktefi & Shin，2012。

② 关于“图式逻辑”的概念和引论请参见第二版《哲学逻辑手册》第4卷的章节，Hammer，2002。

称为"欧拉图（也称'欧拉圈'）"的图形来直观地、非形式地表述三段论推理。欧拉图是一种简单的可视语言，在这一图形系统之中，欧拉用类似几何的方法通俗化了莱布尼茨图解逻辑关系的方案。[①] 这种方法对一般陈述句的外延（或类）解释特别注意，它既可以表示非空非全的类之间的关系，也可以解说三段论和表示直接推理。

欧拉图的基本形式是以圆表示非空非全的类，即用圆表示三段论中词项的外延，圆中的点是类中的元素。欧拉图是用两个圆的包含、排斥和交叉等拓扑性质来表示集合之间的包含、相异和相交关系的一种图解。也就是说，全称肯定命题（A 命题，"所有 S 都是 P"）用一个圆包含另一个圆表示，全称否定命题（E 命题，"所有 S 都不是 P"）用两个互不相交的圆表示，而特称肯定命题（I 命题，"有的 S 是 P"）和特称否定命题（O 命题，"有的 S 不是 P"）则用两个交叉的圆表示——前者把表示主词的字母写在交叉的区域，而后者把交叉区域留空，以此表示主词外延与谓词外延的交为空集。亚里士多德的四个直言命题 A、E、I、O 的欧拉图解分别如下（图 1.1）：

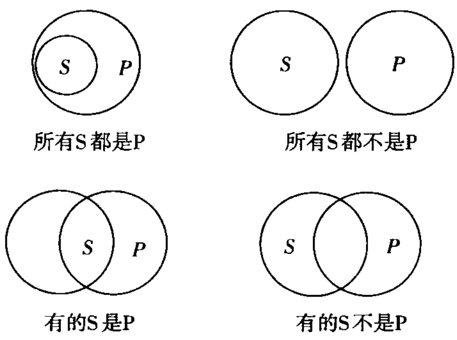


图 1.1

欧拉图直观上相当清楚：圆之间的包含、相离表示全称，相交表示特称。在后面两个表示特称命题的图中，圆中写有字母（比如 S）之处表示有某物属于 S。而下图（图 1.2）并没有对集合 Q 有任何断定：[②]

① 关于莱布尼茨的图解逻辑思想以及相关历史、哲学问题详情请参见 Leibniz，1966；以及二手文献：（1）Baron，1969；（2）Bassler，1998。

② 我们现在提出这一点很重要，现代形式的欧拉图推理系统中的一条重要规则"引入规则"的可靠性与此有关。"引入规则"的情况请参阅本书第 2 章有关内容。

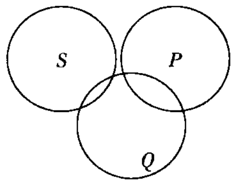


图 1.2

但是在“可表达性”问题上，欧拉图具有重大缺陷：（1）没有欧拉图可以表示出全类和空类（$S=\varnothing$）、不能表示补运算，这给表示涉及换质的直接推理带来了困难。（2）这一系统无法穷尽两个词项之间一切可能的关系：比如，所有事物或是 S 或是 P，等等。（3）表示否定的特称命题的欧拉图具有歧义性：我们无法区分“有的 S 不是 P”和“有的 P 不是 S”。（4）与歧义性相关，矛盾命题的欧拉图表示也出现了问题。在布尔代数中互相矛盾的命题以一种明显的方式表现出来，而在欧拉图中，与肯定的全称命题和否定的全称命题相矛盾的两个命题都用一样的图表示出来。（5）我们可以通过处置欧拉图来帮助我们解决有关三段论推理的问题，但难以表示更复杂的推理关系：困难的根本在于，我们不能把多个图组合成一个图，并且有时还无法确定一个图应当如何转换，如我们无法把表示“所有 M 是 S”和“有的 M 是 P”的两个欧拉图组合成一个图从而检验“有的 S 是 P”是否是其结论；这个问题不仅出现在特称命题中，对于两个全称命题也有同样的情况。

欧拉图以后的逻辑图基本上是就图形的可表达性问题而展开的，具体的做法是为欧拉图添加额外的图形装置以增强表达能力。这一发展方向首先是从文恩图开始的。

1881 年，英国逻辑学家约翰·文恩（John Venn，1834—1923）在《符号逻辑》一书中使用了相交区域的图形（史称“文恩图”）来解释类之间或命题的真值之间的关系。① 文恩图的基本形式以矩形表示论域，矩形中的圆表示非空类；每一个圆把矩形分成任意一个类及其补类。文恩认为，欧拉图不能提供一种一般的方法在同一个图中表示两个类之间的更多关系。欧拉图中的圆表示非全非空的类，圆之间的关系直接表示相应的类之间的实际关系，因而不能表示论域，也不能表示相应的类之间潜在的关系。为了克服欧拉图表达方面的这些困难，文恩采用了一种“初始图”的办法。初始图表明

① 在 1880 年，文恩已经在他的论文中引入了文恩图，参见 Venn，1880。当前主流逻辑文献中关于文恩图的介绍请参阅 Kneebone，2001，第 24—25 页。

了所涉及的类之间所有可能的关系，并且也不假定这些类一定都是非空的。下面的图 1.3 就是涉及两个类 S 和 P 的初始图，表示了 S 和 P 之间所有可能的关系，其中把平面所划分成的四个区域表示了类 S 、P 、非 S（用 S'表示）和非 P（用 P'表示）相互之间四种可能的组合。[①] 能否表示出类之间所有可能的关系，正是两种图解之差异所在，也是造成多个欧拉图难以组合成一个图的根本原因。

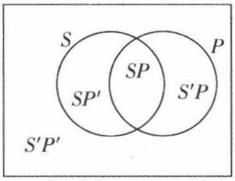


图 1.3

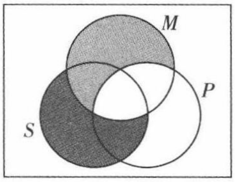


图 1.4

除了初始图外，文恩还利用在图的区域中加上阴影的语形办法来表示相应的类为空类，而欧拉图系统中是用欧拉图的“缄口不言”来说明一个类是空类。所有的文恩图都是欧拉图，但并不是所有的欧拉图都是文恩图；用现代逻辑的术语来说，文恩图作为“语言”是在欧拉图这一“语言”的一个片断的基础上通过增加表示空类的阴影而扩充得到的，或者说，文恩图是用阴影这一语形装置扩充欧拉图后的一个“片段”。有了初始图和阴影这两种语形方面的准备，文恩图就可以用来验证换质推理和三段论的有效性。例如，上面的图 1.4 就是第一格 AAA 的图解，其中 S、M 两圆连同深色阴影表示命题“所有 S 是 M ”，M 、P 两圆连同浅色阴影表示命题“所有 M 是 P ”，把相应于这两个命题的阴影加到关于 S 、M 、P 的初始图中就得到 AAA 的图解。就表达能力方面来讲，图 1.5 与前述的图 1.2 表达的是相同的信息：

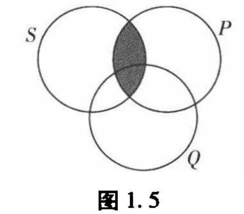


图 1.5

① SP 表示 S 和 P 的交集，可以简单地读成“ S 之内 P 之内”，$S'P$ 读成“ S 之外 P 之内”；其余类似。这种记法史称“德·摩根记法”。

文恩图不同于欧拉图的地方在于前者第一次用不同的区域表示所有可能的组合，并在各种区域中用记号表示：为使给定的命题成立，哪些组合必是空的，哪些组合不是。令人遗憾的是，文恩图跟欧拉图一样也不能表示特称命题，不能表示选言命题。后来的学者再一次从添加语形装置的角度来弥补可表达性方面的这些缺陷。①

§1.2　里程碑：皮尔士－文恩图和皮尔士存在图

美国逻辑学家、哲学家查尔斯·S. 皮尔士（Charlse S. Peirce，1839—1914）接受文恩对欧拉图的改进，并作了进一步的发挥，使得图的表达能力得到了提高，不仅可以表示特称命题而且可以进一步表示选言的和联言的复合命题。经过皮尔士改进的文恩图史称“皮尔士－文恩图”；② 所有的文恩图都是皮尔士－文恩图。在皮尔士－文恩图中，皮尔士在一个区域中画上叉符号“×”来表示该区域不空，并且用符号“o”代替文恩图中的阴影来断定一个区域为空区域。③ 符号“×”和“o”可以用短线连接成一条链表示析取。单独一个“×”或者“o”也表示一条链。而在同一个皮尔士－文恩图中，由“×”和“o”组成的不同的链表示各条链的合取。④ 例如，图 1.6 中的皮尔士－文恩图与句子

$$SP'\neq\varnothing \vee S'P=\varnothing$$ ⑤

的意思相同，断定“S 和非 P 的交集不是空集、或者非 S 和 P 的交集是空集”，即“有 S 是非 P 或者所有的 P 都是 S”。类似的，图 1.7 中的图形与句子

$$(SP'Q'\neq\varnothing \vee SPQ'\neq\varnothing \vee S'PQ'\neq\varnothing)$$
$$\wedge(SP'Q\neq\varnothing \vee S'PQ=\varnothing)$$
$$\wedge(S'P'Q'=\varnothing \vee S'P'Q=\varnothing)$$

---

① 卡罗尔的“逻辑游戏”中的系统是欧拉和文恩系统的变种，其中补集可以明显地表示成一个图中的区域。参见（1）Carroll，1896；（2）Stenning，1999。

② 参见第二版《哲学逻辑手册》第 4 卷中“图式逻辑”一章：Hammer，2002，第 395 页。

③ *CP* 4.357。我们在本书中采用的是标准的记法：“*CP*”指哈茨霍恩、魏斯和伯克斯编辑出版的八卷本《皮尔士全集》（Peirce，C. S.，1931－1958：*Collected Papers of C. S. Peirce*，vols. 1－6，Hartshorne，C. & P. Weiss（eds.）；vols. 7－8，Burks，A. W.（ed.），Cambridge：Harvard.），其后的数字“4.357”分别指第 4 卷第 357 段。下同。

④ *CP* 4.360.

⑤ 本书中的符号“∅”表示空集，即没有元素的集合。

具有相同的意思；在这个合取式中，第一个合取支由图 1.7 最下面的一条链表示，第二个和第三个合取支分别由中间的和最上面的链表示。

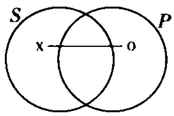


图 1.6

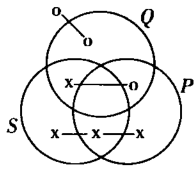


图 1.7

一个图的某一个区域中如果同时出现没有用短线连接的“×”和“o”，那么该图就断定了一个假命题，如图 1.8 的图形等于说 $SP'=\varnothing \wedge SP'\neq\varnothing$，一个集合既是空集同时又包含着元素，这就是一个矛盾命题；另一方面，如果其中的“×”和“o”被用短线连接起来则断定了一个有效命题，如图 1.9 的图形断定了 $S'P=\varnothing \vee S'P\neq\varnothing$，说的是一个集合或者是空集或者包含着元素：

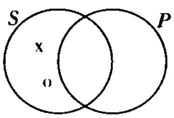


图 1.8

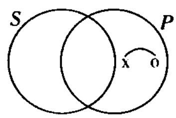


图 1.9

这样，所有的皮尔士－文恩图都可以找到一个与其等价的布尔公式；另一方面，所有的布尔公式也都可以用以上的皮尔士－文恩图表示出来。也就是说，在表达能力上皮尔士－文恩图等价于不带等词的标准一元一阶逻辑。[①]当然，作为皮尔士－文恩图的一个对偶解释，“×”、“o”之间的连线也可以视为合取关系，而同一图中的各条链则被视为析取关系。这两种解释在语义上是等价的。

另外，皮尔士还引进了图形的变形规则，这些图形变形规则的使用完全像代数中的规则一样，也就是说，“是在严格定义的条件之下进行的”。[②] 皮尔士对逻辑图研究的一个重要贡献是他第一个讨论了图形的变形规则，这些

① 这是形式的图式逻辑在表达性研究方面的第一个结果。详见本书第 4 章。

② *CP* 4. 361.

规则的提出在逻辑图的发展史上具有里程碑的意义。这些规则为六条:

第一条:

任何完整的断定指号（即一个叉、零或者叉和零的连接体）都可以被删除。

第二条:

对任何断定指号都可以为其添加新的指号。

第三条:

如果没有其他断定，任何许可的断定都可以分开写成。

第四条:

一个指号在同一个区域中的不同出现，不管它们是否被联结在一起，都等价于一个出现；两个不同的指号在同一个区域中出现时，如果它们已经联结在一起，那么等价于没有任何指号出现，可以任意添加或删除它们，而如果它们各自分离则它们构成一个假命题；如果两个对立的指号在同一个区域中出现且一个与某个其他的指号如P联结在一起而另一个也与其他另外一个联结在一起，那么把其他两个指号联结起来，同时删除这两个对立者。

第五条:

任何表示词项的一条封闭曲线都可以被删除，只要满足以下条件：如果这样一来两个合并在一起的区域包含有独立的零，那么可以联结这些零；如果被删除曲线的一边有一个零而由两个区域合并而成的区域不再包含其他独立的零，那么删除该零连同其所在的整个链。

第六条：

> 任何表示词项的一条封闭曲线都可以被添加到原来的图中；……如果该曲线穿过的区域包含有一个叉……那么应该添加一个新的叉使得添加的曲线位于这两个叉之间，不管原来的叉是不是位于其他链上。如果新的曲线穿过的区域包含有一个零，那么应该复制一个包含该零的整个链不与原来的链联结，而且使得两个零分别位于新添曲线两边。[1]

用现在的术语来说，皮尔士的这些规则在运用时相当于经典逻辑的消解证明程序（resolution）。当然，它们还不是完善的。

20 世纪 90 年代以前，皮尔士 - 文恩图并没有得到研究，欧拉图由于其明显的缺陷也一直很少得到重视，而对文恩图的使用和研究却一直在进行。我们在前面已经看到，文恩图中所有表示词项的封闭曲线都必须两两相交。当讨论的词项的数量少于 5 时，其文恩图一般都很容易就能够画出；但是，当讨论的词项的数量为 5 或更多时是否可以画出其文恩图？对于这一问题文恩本人给出了一个构造性方法，1959 年，摩尔在《符号逻辑杂志》上为这一构造性方法的有效性给出了一个拓扑证明。[2] 与此同时，从 20 世纪 60 年代开始，人们重新发现了皮尔士的“存在图”。

存在图是皮尔士对关系逻辑的图式表示。逻辑图与其表示的对象之间有某种一致性。在皮尔士看来，逻辑的目的不是发展一种有效的演算使得结论可以迅速而容易地从前提得出，逻辑的准确任务是尽可能逼真地、以一种“镜像”（icon）的方式来清楚地把推理的最基本的、元素性的构成成分分析并展示出来。文恩图既不能表示存在命题，也不能表示析取信息，更不能表示关系词的逻辑。因此，在改造文恩图的同时，皮尔士费十年（1886—1896）之功，运用自己在拓扑和图论中的研究发展出了自己的逻辑图式系统——存在图。存在图系统是可以在其上进行逻辑转换运算的一类图，每一个基本的运算都是在一个表示论域的任意平面上画上图的一个部分或擦掉图的一个部分。这是一个包罗广泛的系统，在这个系统中皮尔士相信任何可以

① *CP* 4.362。我们将在本书第 3 章对这些规则进行详细、深入的研究。

② Moore，1959.

想象得到的断言或逻辑论证都可以给出其几何表达式，“存在”一词即是指这种图在描述任何可能论域中的任何方面的任何存在状态的力量。存在图系统由 Alpha 图、Beta 图和 Gamma 图三个部分组成，各个部分都有自己初始的构图符号以及操作这些图的保真的图形转换规则，从而各自形成了一个证明系统，分别具有与经典命题演算、带等词的一阶谓词演算以及模态逻辑相同的表达能力。存在图的初始指号只有三个：一条表示否定的封闭曲线、一条既表示个体变元又表示存在量词的恒等线和一条表示“可能不”的封闭虚线。两个图的并置表示两者的合取。图 1. 10 是一个 Beta 图：

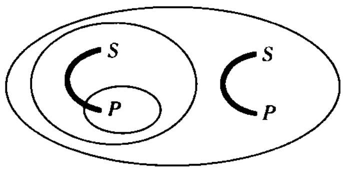


图 1. 10

其解释如下：

$$\neg(\neg\exists x(Sx\wedge\neg Px)\wedge\exists x(Sx\wedge Px))$$

Alpha 图（在现代意义上可靠且完全）的图形转换规则有五条：（1）两条同心封闭曲线允许被嵌入到任意一个子图之外或者从任意的子图之外被删除；两条同心封闭曲线在语义上表示双重否定，因此规则 1 是可靠的，运用它不会从真的前提得出假的结论。（2）在任何一个由奇数条封闭曲线包围的断言页部分上，任何图都可以画于其上；这条规则的作用与自然推演中在子证明中添加新的假设一样，因此是可靠的。（3）在任何一个由偶数条封闭曲线包围的断言页部分上，任何子图都可以被删除。规则 3 的可靠性在于可以把它看作是一种广义的合取消去：每一个合取支都可以从一个合取式中消去。（4）一个图的任何一个子图都可以被复制到包围该子图的所有封闭曲线所包围的断言页上任何其他空白处；在自然推演中，在一个子证明中出现的前提可以在该子证明中重复出现，规则 4 的作用与此相同。（5）任意由第 4 条规则复制而出现的子图都可以被删除。

与自己那些公认的逻辑成就相比，皮尔士认为逻辑的图式化研究才是自己对于逻辑的最重要的工作，在自己最后的 20 年中，倾注了他在逻辑方面的主要精力，1903 年他更是把这一图式系统称为“我的杰作”（My