GAODENG SHUXUE

TONGBU JINGJIANG

高等数学

同步精讲

张天德　刘长文　主　编
吴　臻　　　　　主　审

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

ENG SHUXUE

NGBU JINGJIANG

高等数学

同步精讲

张天德　刘长文　主　编
张德瑜　娄万东　副主编
吴　臻　　　　　主　审

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步精讲/张天德，刘长文主编．—济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-6331-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①G013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 197445 号

高等数学同步精讲
张天德 刘长文 主编

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：（0531）82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：（0531）82098071

印刷者：山东新华印务有限责任公司
地址：济南市世纪大道 2366 号
邮编：250104 电话：（0531）82079112

开本：787mm×1092mm 1/16
印张：30.5
版次：2012 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-6331-0
定价：39.80 元

前　言 QIANYAN

高等数学是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为帮助读者学好高等数学，我们编写了《高等数学同步精讲》，该书与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)配套，它汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，本书将会成为读者学习《高等数学》的良师益友。

该书章节的划分和内容设置与同济大学的《高等数学》(第六版)完全一致。每节内容由三部分组成：一、主要内容归纳；二、经典例题解析及解题方法总结；三、教材习题解答。每章最后还有两部分内容：总习题解答及自测题与参考答案。

主要内容归纳：该部分对每节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，并对较易出错的地方作了适当的解析。

经典例题解析及解题方法总结：列举每节不同难度、不同类型的重点题目，给出详细解答，以帮助读者理清解(证)题思路，掌握基本解(证)题方法和技巧；解题前的分析和解题后的方法总结，可以使读者收到举一反三，融会贯通之功效。

习题解答：每节与每章后都给出了与教材内容同步的习题解答，利用它读者可自行检查学习效果。

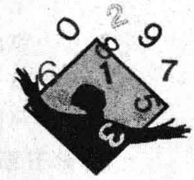
自测题是编者从多年教学及考研辅导中精心挑选的典型题目。目的是在读者对各章内容有了全面了解之后，给读者一个检测、巩固所学知识的机会，从而使读者对各种题型有更深刻的理解，并进一步掌握所学知识点，做到能灵活运用。

本书由张天德、刘长文主编，张德瑜、娄万东副主编，山东大学吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。山东大学数学学院部分教师、清华大学张锋、中国科学技术大学刘志刚也作了一定的校正工作，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

编　者

2012.4.14



目 录 MULU

高等数学
同步精讲

第一章 函数与极限

高等数学研究的对象是函数，所用的工具是极限，其思想理念贯彻于高等数学的始终. 理解极限的概念，掌握极限的计算是学好高等数学的基础.

第一节 映射与函数

一、主要内容归纳

1. 集合 具有某种特定性质的事物或对象的全体称为集合，其中每个对象或事物称为集合的元素.

2. 邻域 设 $a,\delta\in R$ 且 $\delta>0$，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 去掉中心 a 后，所得集合称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

3. 映射 设 X,Y 是两个非空集合，如存在一个对应法则 f，使得 $\forall x\in X$，按照法则 f 总有 Y 中唯一确定的元素 $y\in Y$ 与该 x 对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记为

$$f:X\to Y,$$

其中 X 称为 f 的定义域，x 称为 f 的原象，y 称为 x 在 f 下的象，即 $y=f(x)$，并称集合 $\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 为 f 的值域.

4. 函数

(1)函数的概念　设有两个变量 x 与 y，D 是一个给定的数集. 若对于每个数 $x\in D$，y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

构成函数关系的决定因素，一个是对应关系 f(即映射)，另一个是定义域 D，只有当两者都相同时，才表示同一个函数.

(2)反函数和复合函数

①反函数　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域为 D_1，若 $\forall y\in D_1$，$\exists x\in D$，使得 $f(x)=y$，如此确定了 x 是 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，但习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

②复合函数　若函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_1，而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_2，且其值域 $D_3\subset D_1$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ $(x\in D_2)$ 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数.

注意：并不是任意两个函数都能构成复合函数的. 只有当函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域中时才能构成复合函数.

求函数的定义域和函数表达式是这部分的常考题型.

(3)分段函数　分段函数是特别要注意的一类函数，它用几个不同解析式“分段”表示一个函数，所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等. 图象分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图象也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

本节的难点是复合函数，重点是复合函数及分段函数.

5. 函数的主要性质

(1)有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正常数 M，使得对于 x 在 D 上的任意取值，均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2)单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，如果对于 D 上任意两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）. 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性　设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，如果对 D 上任意点 x，均有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

(4)周期性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 T，使得对于 D 上任意 x，均有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

6. 基本初等函数与初等函数

常数函数 $y=c$（c 为常数），幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$，指数函数 $y=a^x(a\neq1,a>0)$，对数函数 $y=\log_a x(a\neq1,a>0)$，三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合，并由一个式子表示的函数称为初等函数.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解　由 $f[\varphi(x)]=1-x^2$ 及 $f(x)=\sin x$

知 $\sin\varphi(x)=1-x^2$，所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，从而 $-1\leqslant1-x^2\leqslant1$，所以 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

方法总结

求初等函数的定义域有下列原则：①分母不能为零. ②偶次根式的被开方数不能为负数. ③对数的真数不能为零或负数. ④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant1$. ⑤$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$. ⑥$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in Z$. 求复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

【例 2】 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$，求 $f(x)$.

解　令 $t=\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$，于是 $f(t)=3f\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)-\dfrac{2t+2}{t-1}=3[3f(t)-2t]-\dfrac{2t+2}{t-1}$，

整理得　$8f(t)=6t+2\dfrac{t+1}{t-1}$，　　所以　　$f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}\dfrac{x+1}{x-1}$.

方法总结

1. 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数，再解不等式 $f(x)\leqslant0$ 与 $f(x)>0$，最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

2. 复合函数的求解方法主要有三种：(1)代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合. (2)分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合. (3)图示法：a)画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图象；b)将 $y=f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出；c)写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；d)将 c 所得的结果代入 $y=f(u)$ 中，便得到复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 适用于两分段函数的复合.

【例 3】 函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为________.

解　令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $y=\dfrac{1+t}{1-t}$，所以 $t=\dfrac{y-1}{y+1}$，即 $\sqrt{1-x}=\dfrac{y-1}{y+1}$，从而　$x=1-\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^2=\dfrac{4y}{(y+1)^2}$，

因此反函数为 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

故应填 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

方法总结

反函数求解方法比较固定，即由 $y=f(x)$ 解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【例 4】 指出下列函数是否有界.

(1) $y=\frac{1}{x^2}, a\leqslant x\leqslant 1$，其中 $0<a<1$.　　(2) $y=x\cos x, x\in \mathbf{R}$.

解 (1)因为 $a\leqslant x\leqslant 1,(0<a<1)$，所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}$，

取 $M=\frac{1}{a^2}$，则 $\forall x\in[a,1]$ 有 $|y|=\frac{1}{x^2}\leqslant M$，故 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $[a,1]$ 上有界 $(0<a<1)$.

(2)对 $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$（$[M]$ 表示不超过 M 的最大整数部分），则 $\cos x=-1$，此时

$$|y(x)|=|(2[M]+1)\pi\cdot\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M,$$

由定义得 $y=x\cos x$ 在 R 上无界.

方法总结

证明函数有界的常用方法：①利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行缩放处理. ②利用导数求最值的方法（详见第三章第五节）. ③根据连续函数的性质（详见本章第十节）.

【例 5】 判断函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的单调性.

解 $\forall x_1,x_2\in(0,\pi), x_1<x_2$，

因为 $\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$，由于 $x_1<x_2$，故有 $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi, 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\pi$，

所以 $\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0, \sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$，从而 $\cos x_2-\cos x_1<0$.

即 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减.

方法总结

证明函数单调性的主要方法有：①利用函数单调性定义. ②利用导数.（例题详见第三章第四节例 2）

【例 6】 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+c)=-f(x)$，所以

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数，$2c$ 是它的一个周期.

方法总结

判定函数为周期函数的主要方法：①从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$. ②利用周期函数的运算性质证明.

【例 7】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是________.

(A)奇函数　(B)偶函数　(C)非奇非偶函数　(D)不能确定

解 因为 $f(x)+f(y)=f(x+y)$，所以 $f(0)+f(0)=f(0+0)$，从而 $f(0)=0$.

因为 $f(0)=f(x-x)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，因此 $f(x)$ 是奇函数.

故应选(A).

方法总结

1. 判定函数奇偶性通常采用的方法有：①从定义出发，或者利用运算性质（奇函数的代数和为奇函数

等).②证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

2.两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

三、习题1—1解答

1.**解**:$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$, $A\cap B=[-10,-5)$,

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$, $A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

注解:$A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$.

2.**证**:$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$.

3.**证**:(1)$y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists x\in A\cup B, y=f(x)\Leftrightarrow\exists x\in A$ 或 $x\in B, y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

(2)$y\in f(A\cap B)\Rightarrow\exists x\in A\cap B, y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

评注:反之,由 $y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow\exists x\in A, y=f(x)$;$\exists x'\in B, y=f(x')$.由于 f 不一定是单射,未必有 $x=x'$.例如,函数 $f(x)=x^2, x\in\mathbf{R}$. $A=(-\infty,0]$, $B=[-1,+\infty)$, $A\cap B=[-1,0]$, $f(A\cap B)=[0,1]$但 $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty)$.

4.**解**:(1)$3x+2\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-\frac{2}{3}$即定义域为$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(2)$1-x^2\neq0\Rightarrow x\neq\pm1$,即定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)$x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0\Rightarrow x\neq0$ 且 $|x|\leqslant1$,即定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4)$4-x^2>0\Rightarrow|x|<2$,即定义域为$(-2,2)$.

(5)$x\geqslant0$,即定义域为$[0,+\infty)$.

(6)$x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$即定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7)$|x-3|\leqslant1\Rightarrow2\leqslant x\leqslant4$,即定义域为$[2,4]$.

(8)$3-x\geqslant0$ 且 $x\neq0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9)$x+1>0\Rightarrow x>-1$,即定义域为$(-1,+\infty)$.

(10)$x\neq0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

评注:本题是求函数的自然定义域,一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,即得所求定义域.下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$y=\frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(x)\neq0$;　　$y=\sqrt[2n]{x}$, $x\geqslant0$;　　$y=\log_a x$, $x>0$;

$y=\tan x$, $x\neq(k+\frac{1}{2})\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;　　$y=\cot x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x$, $|x|\leqslant1$;　　$y=\arccos x$, $|x|\leqslant1$.

5.**解**:(1)不同,因为定义域不同.

(2)不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(3)相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4)不同,因为定义域不同.

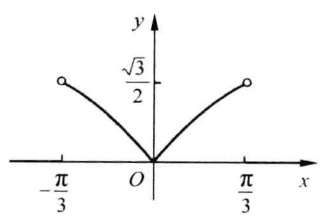


图1—1

6.**解**:$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$. $y=\varphi(x)$的图形如图1—1所示.

7.**证**:(1)$y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$

设 $x_1<x_2<1$.因为 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$,

所以 $f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x)$在$(-\infty,1)$内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$，

所以，$f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

8. **证**：设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得

$$f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1).$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$ 即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

9. **证**：(1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 是奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是 $G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x)$，

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

10. **解**：(1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$，因为 $f(x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，$f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

11. **解**：(1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$. (2) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$. (3) 是周期函数，周期 $l=2$. (4) 不是周期函数. (5) 是周期函数，周期 $l=\pi$.

12. **分析**：函数 f 存在反函数的前提条件为：$f:D\to f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射，特别 (1)、(4)、(5)、(6) 中的函数均为单调函数，故都存在反函数.

解：(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，即反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，即反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5)由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$，即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6)由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，即反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

13. **解**：设 $f(x)$ 在 X 有上界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，故 $-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M，下界 $-M$. 反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1，下界 K_2，即 $K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$，$x\in X$. 取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有界.

14. **解**：(1) $y=\sin^2 x$，$y_1=\dfrac{1}{4}$，$y_2=\dfrac{3}{4}$. (2) $y=\sin 2x$，$y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=1$. (3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=e$. (5) $y=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}$.

15. **解**：(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.　　(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$x\in[a,1-a]$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\varnothing$(即空集).

16. **解**：$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$　　$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图 1—2，图 1—3 所示.

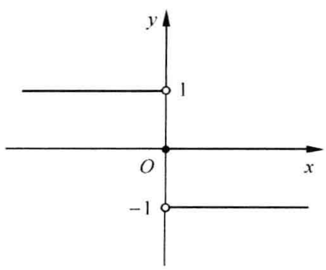


图 1—2

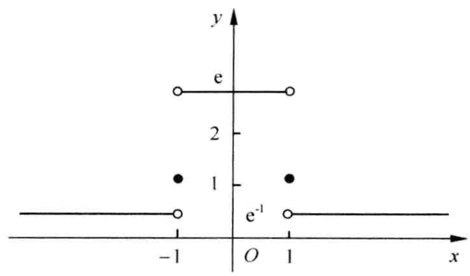


图 1—3

17. **解**：$AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，

又 $S_0=\dfrac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]$，

得　$BC=\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$，

所以　$L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$，

而 $h>0$ 且 $\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0$，因此湿周函数的定义域为 $(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.

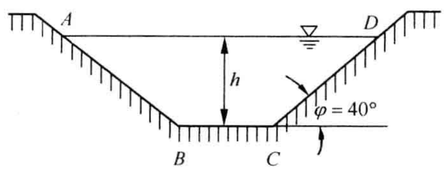


图 1—4

18. **解**：设订购 x 台，实际售价每台 p 元，厂方所获利润 P 元. 则按题意，有

当 $x\in[0,100]$ 时，$p=90$，$P=(90-60)x=30x$；

当 $x>100$ 时，超过 100 台的订购量为 $x-100$，售价降低 $0.01(x-100)$，但最低价为 75，即降价数不超过 $90-75=15$，故 $0.01(x-100)\leqslant 15\Rightarrow x\leqslant 1600$，

于是，当 $x\in(100,1600)$ 时，$p=90-0.01(x-100)=91-0.01x$，$P=(91-0.01x-60)x=31x-0.01x^2$；

当 $x\in(1600,+\infty)$ 时，$p=75$，$P=(75-60)x=15x$.

因此，有

(1) $p=\begin{cases}90, & x\in[0,100],\\ 91-0.01x, & x\in(100,1600],\\ 75, & x\in(1600,+\infty).\end{cases}$　　(2) $P=\begin{cases}30x, & x\in[0,100],\\ 31x-0.01x^2, & x\in(100,1600],\\ 15x & x\in(1600,+\infty).\end{cases}$

(3)$x=1000$，$P=31\times10^3-0.01\times10^6=21\times10^3$(元).

19. **解**:设 $F=mC+b$,其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32°$相当于$C=0°$，$F=212°$相当于$C=100°$，所以 $b=32$， $m=\frac{212-32}{100}=1.8$.

故 $F=1.8C+32$ 或 $C=\frac{5}{9}(F-32)$.

(1)$F=90°$， $C=\frac{5}{9}(90-32)\approx32.2°$. $C=-5°$， $F=1.8\times(-5)+32=23°$.

(2)设温度值 t 符合题意,则有 $t=1.8t+32$,$t=-40$. 即华氏 40°恰好也是摄氏 −40°.

20. **解**:由表中第 3 列,猜想 1986 年后任一年的世界人口是前一年人口的 1.018 倍. 于是,在 1986 年后的第 t 年,世界人口将是 $P(t)=4936\cdot(1.018)^t$(百万).

2010 年对应 $t=24$,于是 $P(24)=4936\cdot(1.018)^{24}\approx7573.9$(百万)$\approx76$(亿),

即推测 2010 年的世界人口约为 76 亿.

第二节　数列的极限

一、主要内容归纳

1. 数列　一个定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)$(称为整标函数),当自变量 n 按正整数 1,2,3,…依次增大的顺序取值时,函数按相应的顺序排成一串数:

$$f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$$

称为一个无穷数列,简称数列. 数列中的每一个数称为数列的项,$f(n)$称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1)设$\{x_n\}$是一数列,如果存在常数 a,当 n 无限增大时,x_n 无限接近(或趋近)于 a,则称数列$\{x_n\}$收敛,a 称为数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于 a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,或 $x_n\to a$. 当$n\to\infty$时,若不存在这样的常数 a,则称数列$\{x_n\}$发散或不收敛,也可以说极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(2)设$\{x_n\}$为一个数列,a 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正整数 N,使得 $n>N$ 的一切 x_n 都满足不等式$|x_n-a|<\varepsilon$,则称 a 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

3. 数列极限的性质

(1)唯一性:收敛数列的极限是唯一的.

即若数列$\{x_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,则 $a=b$.

(2)有界性:假设数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$必有界,即存在常数 $M>0$,使得$|x_n|<M$(对任意$n\in N$). 这个性质中的 M 显然不是唯一的,重要的是它的存在性.

(3)保号性:假设数列$\{x_n\}$收敛,其极限为 a.

①若有正整数 N,使得当 $n>N$ 时 $x_n>0$(或<0),则 $a\geqslant0$(或$\leqslant0$).

②若 $a>0$(或<0),则有正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$x_n>0$(或<0).

(4)若数列$\{x_n\}$收敛于 a,则它的任一子数列也收敛于 a.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 用 $\varepsilon-N$ 方法证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

证　$\forall\varepsilon>0$,要证$\left|\frac{n!}{n^n}\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\varepsilon$,

实际上只须：$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\frac{1}{n}<\varepsilon$

即可，从而 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

【例 2】 "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).（考研题）

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

解　由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得"$\forall\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon_1$".

显然可推导出"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"，则对于任意的 $\varepsilon_1>0$（不妨令 $0<\varepsilon_1<1$，当 $\varepsilon_1>1$ 时，取 ε_2，使 $0<\varepsilon_2<1<\varepsilon_1$，用 ε_2 代替 ε_1 即可），取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\varepsilon_1>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon<\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$，令 $N_1=N-1$，则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon_1$".

可见上述两种说法是等价的.

故应选(C).

方法总结

1. 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 是本节的难点.

用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 的关键在于给了 ε，求对应的 $N=N(\varepsilon)$，这往往通过解不等式实现，有时 N 可直接解出，有时要利用一些技巧将不等式放大. 读者熟练掌握解证不等式的技巧是攻克这一难点的关键.

2. 正确理解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义.

(1)$\varepsilon>0$ 的任意给定性，ε 是任意给定的正数，它是任意的，但一经给出，又可视为固定的，以便依 ε 来求 N，由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，所以定义中的不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 可改为 $|x_n-a|<k\varepsilon$（$k>0$ 为常数），也可改为 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon^2$，$|x_n-a|<\frac{1}{M}$（$M$ 是任意正数），$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$ 等，其含义与 $|x_n-a|<\varepsilon$ 等价.

(2)N 的相应存在性，N 依赖于 ε，通常记作 $N=N(\varepsilon)$，但 N 并不是唯一的，$N(\varepsilon)$ 是强调其依赖性的一个符号，并不是函数关系，这里，N 的存在性是重要的，一般不计较其大小，甚至也不必是自然数，只要是正数就可以. 所以，定义中的 $n>N$ 可改为 $n\geqslant N$ 或 $n>A(A\in\mathbf{R}^+)$.

(3)定义中"当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$"是指下标 $n>N$ 的无穷多项 x_n 都进入数 a 的 ε 邻域：$x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 即在 a 的 ε 邻域外最多只有 $\{x_n\}$ 的有限项，由此可知：改变或增减数列 $\{x_n\}$ 的有限项，并不影响数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

【例 3】 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{n\pi}{2}$，证明数列 $\{x_n\}$ 没有极限.

分析　若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则由极限性质知道极限应是唯一的，要证明 $\{x_n\}$ 没有极限，只要找到两个子列分别收敛到不同的值即可.

证　设 k 为正整数，若 $n=4k$，则　$x_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0$；

若 $n=4k+1$，则　$x_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1}\to 1\quad(k\to+\infty)$.

因此 $\{x_n\}$ 没有极限.

【例 4】 证明：数列 $x_n=(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n}$ 是发散的.

证　考察子序列 $x_{2n}=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}\to 1\ (n\to+\infty)$，$x_{2n+1}=-\frac{2n+2}{2n+1}=-1-\frac{1}{2n+1}\to -1\quad(n\to+\infty)$.

由子序列的收敛性与数列收敛性的关系，可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

方法总结

在证明数列发散时，可采用下列两种方法：①找两个极限不相等的子数列. ②找一个发散的子数列.

三、习题 1—2 解答

1. **解**：(1)收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.　(2)收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.　(3)收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})=2$.

(4)收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.　(5)$\{n(-1)^n\}$发散.　(6)收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=0$.

(7)$\{n-\frac{1}{n}\}$发散.　(8)$\{[(-1)^n+1]\frac{n+1}{n}\}$发散.

*2. **解**：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下：

因为 $\quad |x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$,

要使$|x_n-0|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 所以$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，就有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]=1000$. 即若 $\varepsilon=0.001$，只要 $n>1000$，就有$|x_n-0|<0.001$.

*3. **证**：(1)因为要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2)因为$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$，要使$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{4n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}$，所以$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

评注：本题中所采用的证明方法是：先将$|x_n-a|$等价变形，然后适当放大，使 N 容易由放大后的量小于 ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中是经常采用的.

(3)因为$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{2n^2}$，要使$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\frac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即 $n>\frac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 所以$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4)因为$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\frac{1}{10^n}$，要使$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{10^n}<\varepsilon$，即 $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$. 所以$\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$)，取 $N=\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

*4. **证**：因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而有$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如，考虑数列$\{(-1)^n\}$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\{(-1)^n\}$没有极限.

*5. **证**：因数列$\{x_n\}$有界，故$\exists M>0$，使得对一切 n 有$|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，就有$|y_n|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$，从而有$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

*6. **证**：因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，当 $k>k_1$ 时，有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为 $x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，所以对上述 $\varepsilon>0$，$\exists k_2$，当 $k>k_2$ 时，有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$. 记 $K=\max\{k_1,k_2\}$，取 $N=2K$，则当 $n>N$ 时，

若 $n=2k-1$，则　$k>K+\frac{1}{2}>k_1 \Rightarrow |x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$，

若 $n=2k$，则　$k>K\geqslant k_2 \Rightarrow |x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$. 从而只要 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}=x_n=a$.

第三节　函数极限

一、主要内容归纳

1. 函数极限的定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义，A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 δ，使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

2. 左极限和右极限的定义　若对于满足 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限，即左(右)极限，分别记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A \quad \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A\right)$$

类似地，可以给出当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限为 A 的定义.

3. 极限的性质

(1)唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 A 必唯一.

(2)有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域(x_0 除外)内是有界的.

(3)保号性　设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域(x_0 除外)内均有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

4. 充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

5. 函数极限与数列极限的关系　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$($A$ 为定数)，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in N^+)$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 利用极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$，　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\,(a>0)$.

证　(1)对 $\forall\varepsilon>0$，由 $|5x+2-12|=|5x-10|=5|x-2|<\varepsilon$ 得 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$，

故取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|5x+2-10|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

方法总结

用定义证明函数极限存在的步骤：

①对于任给的 $\varepsilon>0$，由不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，经一系列适当放大可得：$|f(x)-A|<\cdots<c|x-x_0|<\varepsilon$ (c 为正常数)(或 $|f(x)-A|<\cdots<cM(x)$(c 为正常数)).