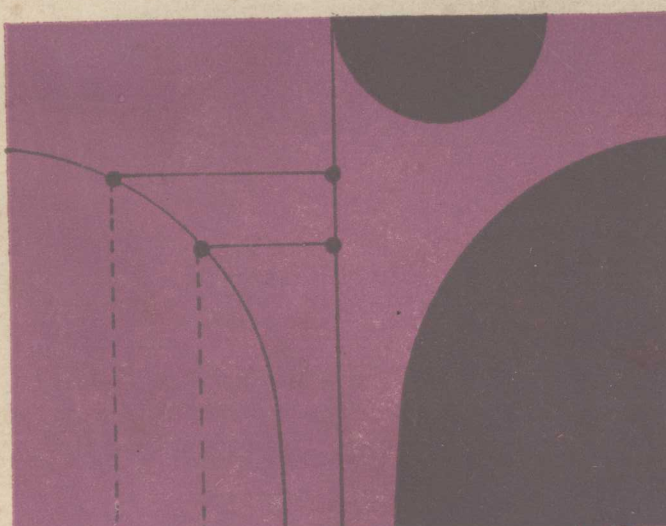
高级中学课本

代数下册（必修）

学习指导



人民教育出版社　重庆出版社

高级中学课本

代数下册（必修）学习指导

《学习指导》编写组 编

人民教育出版社 重庆出版社

（川）新登字010号

高级中学课本

代数下册(必修)学习指导

人民教育出版社　重庆出版社出版
新华书店重庆发行所发行　重庆新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张 10.5　字数 252 千
1994年7月第一版　1994年7月第一版第一次印刷
印数：00,001—33,300

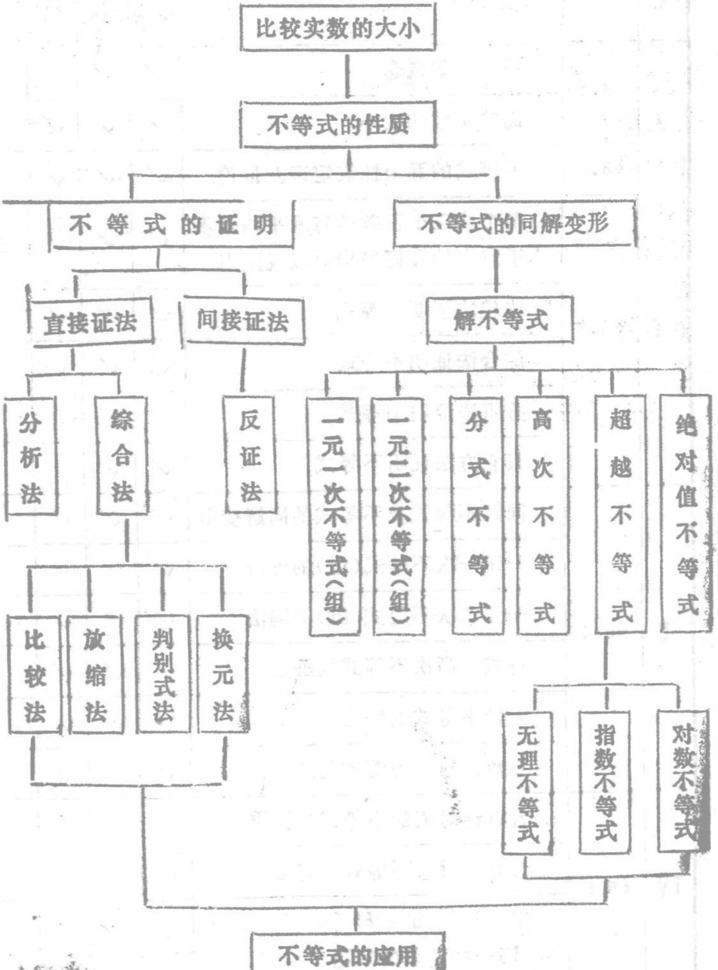
*

ISBN 7-5366-2906-0/G・1087
定价：4.35元

目　录

第五章 不等式

知识结构


比较实数的大小
不等式的性质
不等式的证明
不等式的同解变形
直接证法
间接证法
解不等式
分析法
综合法
反证法
一元一次不等式(组)
一元二次不等式(组)
分式不等式
高次不等式
超越不等式
绝对值不等式
比较法
放缩法
判别式法
换元法
无理不等式
指数不等式
对数不等式
不等式的应用

学习目标

单元	节次	知识要点	学习水平			
			了解	理解	掌握	灵活运用
Ⅰ	§5.1	不等式的概念	✓	✓		
		比较实数的大小	✓	✓	✓	
	§5.2	不等式的五个性质定理及推论	✓	✓	✓	
Ⅱ	§5.3	两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数以及应用	✓	✓	✓	✓
		比较法证明不等式	✓	✓	✓	✓
		综合法证明不等式	✓	✓	✓	
		分析法证明不等式	✓	✓		
		其它方法证明不等式	✓	✓		
Ⅲ	§5.4	同解不等式及不等式的同解变形	✓	✓	✓	
		一元一次不等式(组)的解法	✓	✓	✓	✓
		一元二次不等式(组)的解法	✓	✓	✓	✓
		分式、高次不等式的解法	✓	✓	✓	
		无理不等式的解法	✓	✓	✓	
		指数、对数不等式的解法	✓	✓	✓	
Ⅳ	§5.5	含有绝对值的不等式的性质	✓	✓		
		含有绝对值不等式的解法	✓	✓	✓	
		用不等式 $\|a\|-\|b\|\leqslant\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$ 解一些简单的问题	✓	✓	✓	

第I单元　不等式的性质

学习指导

1．实数的大小顺序与实数的运算性质是本章证明不等式和解不等式的基础。

2．要注意不等号“$>$”与“$\geqslant$”的区别，“$\geqslant$”表示大于或者等于的意思，例如 $3\geqslant 3$ 是正确的。

3．要比较A和B的大小，归结为判断它们的差$A-B$的符号（这里A、B可以是具体的数，也可以是代数式）。

$A-B$的符号如果随着某个字母的取值范围的不同有所变化，那么A与B的大小关系要按某字母的不同的取值范围来分别讨论。

例如比较x^2与$2x$的大小：

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 2$时，则$x^2\geqslant 2x$，当$0<x<2$时，则$x^2<2x$。

4．不等式的性质是证明不等式和解不等式的依据。

5．不等式性质的5个定理及推论中使用的符号“$\Longleftrightarrow$”、“$\Longrightarrow$”、“$\Longleftarrow$”，要区别它们的差异（以后学习了充要条件一节，就知道它们分别表示充要条件、充分条件和必要条件）。

定理3可以改成$a>b\Longleftrightarrow a+c>b+c$；同样移项法则也可以改成$a+b>c\Longleftrightarrow a>c-b$。

6．定理5也可改用幂函数的性质来证明。

7．如果不论用什么实数代替不等式中的字母，不等式都成立，这样的不等式叫做绝对不等式。后面要学的不等式证明，一般就是证明它是绝对不等式．如果只有用某些范围

内的实数代替不等式中的字母它才成立，这样的不等式叫做条件不等式。后面要学的不等式的解，就是找出条件不等式成立的条件。

练习5-1

A 组

一、选择题（有且仅有一个结论正确，下同）

1. 若$x>y$，$m>n$，则下列不等式中正确的是 (　　)

(A) $x-m>y-n$；

(B) $xm>yn$；

(C) $\frac{x}{n}>\frac{y}{m}$；

(D) $m-y>n-x$。

2. a、b是实数，下列命题中正确的是 (　　)

(A) $a>b \Longrightarrow a^2>b^2$；

(B) $|a|>b \Longrightarrow a^2>b^2$；

(C) $a>|b| \Longrightarrow a^2>b^2$；

(D) $a\neq|b| \Longrightarrow a^2\neq b^2$。

3. 若$a-b>a$，且$a+b<b$，则下列不等式中正确的是 (　　)

(A) $b<a$；　　(B) $a<b<0$；

(C) $a<0$且$b<0$；　　(D) $a<0$且$b>0$。

4. 若$b<a<0$，则下列不等式中正确的是 (　　)

(A) $b^2<ab$；　　(B) $a^2<ab<b^2$；

(C) $b^2<a^2$；　　(D) $ab<a^2$。

5．若$ab\geqslant ac$，则一定有　　　　（　　）

(A) $b\geqslant c$；　　　　(B) $b\leqslant c$；

(C) $b=c$；　　　　(D) 以上均不正确．

6．已知$a<b<0<c$，则下列不等式中不成立的是

（　　）

(A) $ac>bc$；　　　　(B) $a+c<b+c$；

(C) $ab>bc$；　　　　(D) $a+b<a+c$．

7．若$b<0<a$，$d<c<0$，则下列不等式中正确的是

（　　）

(A) $a-c>b-d$；

(B) $a+c>b+d$；

(C) $ac>bd$；

(D) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$．

8．若$a<0$，则下列不等式中正确的是　　　　（　　）

(A) $(0.2)^a>2^a>\left(\frac{1}{2}\right)^a$；

(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^a>2^a>(0\cdot2)^a$；

(C) $\left(2^a>\frac{1}{2}\right)^a>(0\cdot2)^a$；

(D) $(0\cdot2)^a>\left(\frac{1}{2}\right)>2^a$．

9．若$0<a<b<1$，则下列命题中正确的是　　　　（　　）

(A) $\log_a b>1$；　　　　(B) $\log_a b<0$；

(C) $0<\log_a b<1$；　　　　(D) $\log_a b<-1$．

10. 若$x>y>1$，$0<a<1$，则下列各式中一定错误的是 (　　)

(A) $x^{-a}<y^{-a}$；　　(B) $x^{a}>y^{a}$，

(C) $a^{x}<a^{y}$；　　(D) $\log_{\frac{1}{a}} x<\log_{\frac{1}{a}} y$。

11. 若x、y、z均为大于-1的负数，则一定有 (　　)

(A) $x^2<y^2+z^2$；　　(B) $-1<xyz<0$；

(C) $x+y+z<-3$；　　(D) $(xyz)^2>1$。

12. 若$a+b>0$，$b<0$，那么下列关系中正确的是 (　　)

(A) $a>b>-a>-b$；

(B) $a>-a>b>-b$；

(C) $a>-b>b>-a$；

(D) $-a>-b>a>b$。

二、填空题

13. 设$a\in(60,80)$，$b\in(20,30)$，则

(1) $a+b\in$ ________________。

(2) $a-b\in$ ________________。

(3) $\frac{a}{b}\in$ ________________。

14. 在下列空格中填上恰当的符号($>$，$\geqslant$，$<$，$\leqslant$)

(1) 若$x>y$，$mx<my$，则m__0。

(2) $a>0$，$b>0$，则$\frac{a}{b}$__$\frac{a-1}{b}$。

(3) $x>y$，$z<0$，则$(x-4)z$__$(y-4)z$。

(4) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则$a$__$b$。

(5) 若$a>b$，则$a\lg\sin x$__$b\lg\sin x(\sin x>0)$。

(6) $0.9^{(a+\frac{3}{2})^2}$__$0.9^{(a+1)(a+2)}$。

(7) $\lg\sqrt{m+2}$__$\lg(\sqrt{m+1}+1)(m\geqslant-1)$。

15. 若$x+y=2$，$b<x<a$，则$2-a$，$2-b$，y三数的大小关系是________________。

16. 若$a>b>c>1$，则将$\sqrt{abc}$、$\sqrt{ab}$、$\sqrt{bc}$、$\sqrt{ac}$按从小到大排列的顺序是________________。

三、解答题

17. 比较$\frac{4}{\log_2 10}+\frac{2}{\log_3 10}+\frac{1}{\log_7 10}$与3的大小。

18. 比较a^2+b^2+1与$a+b+ab$的大小。

19. α、β是锐角，且$\cos\alpha>\sin\beta$，试比较$\alpha+\beta$与$\frac{\pi}{2}$的大小。

20. 若$1<a<b<a^2$，试比较$\log_b\frac{b}{a}$，$\log_a\frac{a}{b}$，$\log_b a$的大小。

21. 若$x>y>0$，$a>b$，且$a+b=2$，比较$\lg x+\lg y$与$a\lg x+b\lg y$的大小。

22. 若a、b、c均为正数，且$\lg a-\lg b>\lg b-\lg c>\lg c-\lg a$，试判断$a$、$b$、$c$中的最大者。

B 组

一、选择题

1. 若$b<0$，$0<|a|<|b|<|c|$，且$\sqrt{\frac{ab^2}{c}}=\frac{b}{c}\sqrt{ac}$，则有 ( )

(A) $c<b<a$； (B) $a<b<c$；

(C) $b<a<c$； (D) $b<c<a$。

2．若$0<a<\frac{1}{2}$，则下列不等式中恒成立的是 （ ）

(A) $\log_a(1-a)>1$；

(B) $\sin(1+a)>\sin(1-a)$；

(C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+a}>\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}$；

(D) $(1-a)^{\frac{2}{3}}>(1+a)^{\frac{2}{3}}$。

3．若$1<x<a$，则下列关系式正确的是 （ ）

(A) $(\log_a x)^2<\log_a x^2<\log_a(\log_a x)$；

(B) $\log_a x^2<\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2$；

(C) $\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$；

(D) $\log_a(\log_a x)<\log_a x^2<(\log_a x)^2$。

4．已知：$0<x<1$，$y=x^x$，$z=x^y$，则x、y、z的大小顺序是 （ ）

(A) $x<y<z$； (B) $x<z<y$；

(C) $y<x<z$； (D) $z<x<y$。

二、填空题

5．将$0.8^{0.5}$，$0.9^{0.4}$，$\sin1$，$\cos1$从小到大排列____。

6．设$p=\log_3 16$，则与p最接近的整数是__________。

7．把$\log_{0.2}0.3$，$\log_2 3$，$\log_{20}30$由小到大排列________________。

三、解答题

8．比较$2x^4+1$与$2x^3+x^2$的大小。

9. 若$a>0$，$a\neq 1$，$0<b<1$，比较$|\log_a(1-b)|$与$|\log_a(1+b)|$的大小。

10. 若$n>2$，比较$\lg\frac{2n+1}{2}$，$\frac{1}{2}\lg(2n+1)$，$\frac{1}{2}[\lg n+\lg(n+1)]$的大小。

11. 若$a>0$，比较$\log_a(a+1)$与$\log_{(a+1)}a$的大小。

12. 若$a>1$，$b>1$，$c>1$，且$\lg^2 a-2\lg a\cdot\lg b+\lg b\cdot\lg c=0$，试判断$a$、$b$、$c$的大小。

第Ⅱ单元　不等式的证明

学习指导

1. 不等式的证明是本章的难点，不等式的意义和性质是不等式证明的依据。由于不等式形式的多样性，不等式的证明也就有多种多样的方法。根据大纲、会考标准和高考说明，本单元的重点是比较法、综合法、分析法和应用平均值不等式的证法。

2. 综合法和分析法是直接证明不等式的两种基本方法。综合法是一种顺推证法，由条件推到结论（从条件寻求它的必要条件），简单表示为$A\Rightarrow A_1\Rightarrow A_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B$。分析法的证明思路与综合法刚好相反，它是一种逆推证法，由结论倒推到条件（寻求结论成立的充分条件），简单表示为$B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow\cdots\Leftarrow A$。综合法与分析法既有区别又有联系。区别在于综合法是由因导果，分析法则是执果索因；而在具体证题过程中，二者又是互相联系的：一般用分析法探求证题的思路，然后用综合法叙述。

3．比较法是综合法中的一种最基本的方法．比较法又分求差和求商两种．求差法是最重要最基本的方法．它的大致步骤是作差、变形、判断符号．其中变形$A-B$并使之易于确定符号是比较法证明不等式的关键．配方、因式分解是求差法中常见的变形手段．有时也有应用函数的值域或单调性来确定符号的．

4．平均值不等式方法是综合法的一种．在利用此法证题时，常常用到传递性和同向不等式相加等性质．因而需在正确掌握不等式的性质后方能灵活运用．

5．不等式的证明方法还有放缩法、判别式法、换元法、反证法等等．用判别式法证明不等式或求取值范围时，要注意二次项的系数不能为零．换元法中用三角代换最为常见，注意角的取值范围要与代换的变量的取值范围相一致．结论中出现“至少”或者“不成立”等语句时常用反证法．这些证明方法不是本章的重点，只要求理解并能解决一些简单的问题就行了．

6．不等式的一个重要应用就是利用平均值不等式求某些函数的最大值与最小值．求的时候要注意等号成立的条件，另外含变量的各项的和或积必须是常数．

练习5-2

A 组

一、选择题

1．记$\omega=x^2-xy+y^2$，则 （　　）

(A) $\omega>0$；　　(B) $\omega<0$；

(C) $\omega \geqslant 0$;　　(D) $\omega \in R$.

2. 设$a>0$, $b>0$，则下列不等式中不正确的是（　　）

(A) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$;

(B) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$;

(C) $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b} \geqslant a+b$;

(D) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{a+b}$.

3. 若a、$b \in R^+$，则下面不等式中恒成立的是（　　）

(A) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

(B) $\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \frac{a+b}{2}$;

(C) $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

(D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

4. 若$0<a<1$, $0<b<1$, 那么, $a+b$, $2\sqrt{ab}$, a^2+b^2, $2ab$中最大的是（　　）

(A) a^2+b^2;　　(B) $a+b$;

(C) $2ab$;　　(D) $2\sqrt{ab}$.

5. 下列函数中最小值为2的函数是（　　）

(A) $y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}-1$　　$(x>0)$

(B) $y=x+\frac{1}{x}$　　$(x \neq 0)$

(C) $y=\sin x+\cos x$

(D) $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$。

6．若$a>1$，则$a+\dfrac{1}{a-1}$的最小值是　　　　(　　)

(A) 2；　　　　(B) 3；

(C) a；　　　　(D) $2\sqrt{\dfrac{a}{a-1}}$。

7．已知$x>0$，$y>0$，且$x+y\leqslant 4$，则下列不等式中恒成立的是　　　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{x+y}\leqslant\dfrac{1}{4}$；　　　　(B) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 1$；

(C) $\sqrt{xy}\geqslant 2$；　　　　(D) $\dfrac{1}{xy}\geqslant 1$。

8．下列命题中，错误的是　　　　(　　)

(A) $y=2\sqrt{x}+\dfrac{8}{\sqrt{x}}$的最小值是8。

(B) $y=2x\sqrt{3-x^2}$的最大值是$2\sqrt{2}$。

(C) $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$的最小值是2。

(D) $y=\log_8(x^2+1)+\log_{(x^2+1)}8$的最小值是2。

9．设a、b为正实数，那么$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$2\sqrt[4]{ab}$的大小顺序是　　　　(　　)

(A) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant 2\sqrt[4]{ab}$；

(B) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant 2\sqrt[4]{ab}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$；