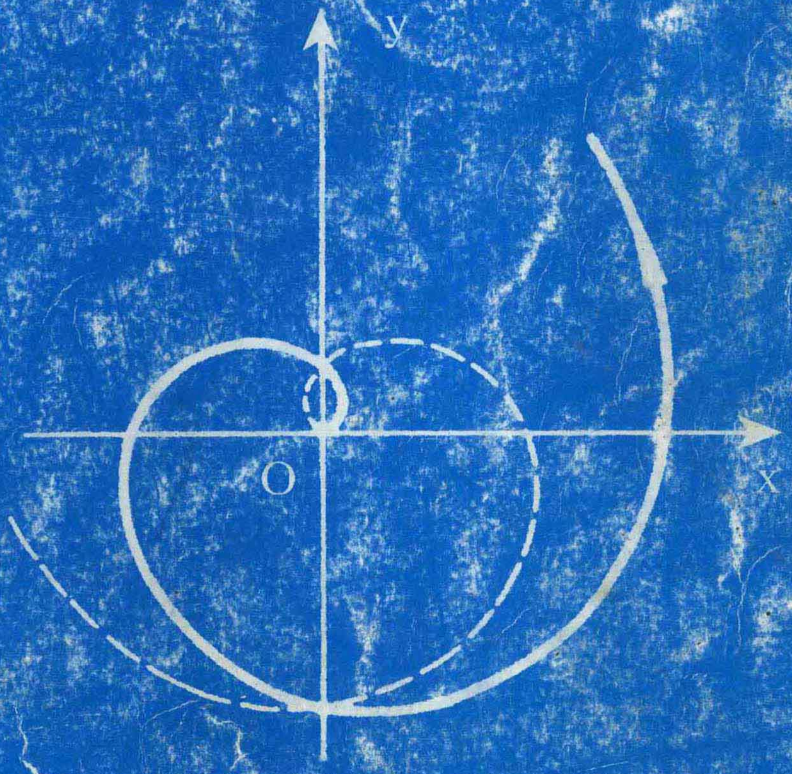
Gao Den Shu Xue

高等数学

上册



河海大学高等数学编写组

高　等　数　学

上　册

河海大学高等数学编写组

前　　言

本讲义是根据工科本科高等数学教学基本要求并结合河海大学近年来高等数学教学改革的实践编写而成，力求在加强基础的前提下，结合相应内容拓广知识面，重视培养学生的分析问题和解决问题的能力，自学能力、逻辑推理能力以及建立数学模型的能力。此外本讲义还注意了与其它后继数学课程的联系与衔接，便于教学。

本讲义分上、下两册。上册内容为一元函数微积分、常微分方程，下册内容为空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数，每章配有总习题及习题答案与提示。此外，本讲义末还附有微积分在经济问题中的应用简介、差分方程简介、几种常用的曲线、积分表，供读者参考使用。

本讲义由河海大学应用数学系丁莲珍、郁大刚、王海鹰、钮群、胡庆云、郑苏娟老师合作编写而成。全书由丁莲珍、郁大刚老师负责统稿。大学数学教研室的老师给予了大力支持和帮助，在此深表谢意！

由于编者水平所限，本讲义的疏漏之处在所难免，恳请广大读者不吝指正。

编者　2003 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学是一门研究变量的数学，它在自然科学与社会科学的许多邻域里都有着广泛的应用。函数是变量关系的数学描述，极限方法是研究变量的基本方法。自然界中许多自然现象在数量关系上都具有连续性，连续函数是一类最基本最常见的函数，是高等数学研究的主要对象。因此，函数、极限与函数的连续性是高等数学的基础。在本章中我们将介绍这些基本概念以及它们的一些主要性质。

第一节　函数

一、集合、区间及邻域

1.集合

在数学中常把具有某种特定性质所组成的总体称为一个**集合**。组成这个集合的事物称为该集合的**元素**。集合通常用大写字母表示，如 $A,B,\cdots$，集合的元素通常用小写字母表示，如 $a,b,\cdots$。设 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。我们今后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合。如果没有特别声明，今后我们所提到的数都是实数。例如，我们把全体实数集合记作 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q}\mid P\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}\text{ 且 }q\neq 0,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\}$$

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或者称 A 包含于 B，或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 Φ。例如，集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$ 就是一个空集。

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2.区间

区间是用得较多的数集，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为区间的端点，它们均不属于 (a,b)。类似地可定义以 a,b 为端点的**闭区间，半开半闭区间**。

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

半开半闭区间 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$

$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$

上述以 a,b 为端点的区间都叫做**有限区间**，它们的长度都是 $b-a$。此外还有**无穷区间**，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}, \qquad (-\infty,b)=\{x \mid x < b\}。$$

类似的有 $(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，特别 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 是实数}\}$。

区间是实数集合 $\mathbf{R}$ 的一部分，在几何上可以用实数轴上的点来表示。例如区间 $[a,b]$，(a,b)，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$ 分别如图 1－1(a)，(b)，(c)，(d) 所示。

图 1－1

3. 邻域

邻域也是一种常用的集合。设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **为点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\}$$

点 x_0 称为该邻域的**中心**，δ 为该邻域的**半径**（图 1－2）。

显然，邻域 $U(x_0,\delta)$ 内的任何点 x 到点 x_0 的距离都小于 δ，可用 $|x-x_0|<\delta$ 表示，当 δ 越小时，x 与点 x_0 就越接近，因此 $U(x_0,\delta)$ 表示与点 x_0 的距离小于 δ 的一切点的全体，该邻域又可记作

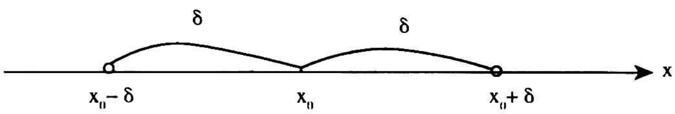


图 1－2

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

如果把邻域的中心去掉，所得到 集合称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

为了方便，有时把开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域，把开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域。

二、函数

1. 函数概念

定义 **设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。数集 D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。**

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**。

在几何上，点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 就称为函数 $y = f(x)$ 的**图形（或图象）**。通常也把函数 $y = f(x)$ 的图形叫做曲线 $y = f(x)$。

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母，例如“g”，“F”，“φ”等等。如果在同一个问题中，讨论到几个不同的函数，则必须用不同的记号分别表示这些函数，以示区别。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。例如，自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s。如果开始下落的时刻是 $t = 0$，从高度为 H 处作自由下落，那么 s 与时间 t 之间的对应关系是 $s = \frac{1}{2}gt^2$，t 的取值范围应是 $[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}]$，即这个实际问题的函数的定义域为 $[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}]$。

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用数学式子表达的函数，这时约定函数的定义域就是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合，称为函数的**自然定义域**。例如，$f(x) = \arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，$f(x) = \frac{1}{1-x}$ 的定义域是 $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$。

我们定义的函数 $y = f(x)$，如果在确定的对应法则下，对于定义域内的每个 x，只有唯一的一个 y 值与之对应，这种函数称为**单值函数**。如果对应的 y 值多于一个，则称这样的函数为**多值函数**。例如，方程 $x^2 + y^2 = a^2$，如果将满足这个方程的 x 与 y 之间的关系作为对应法则，那么当 $x = \pm a$ 时，对应 $y = 0$ 一个值，但当 x 取开区间 $(-a, a)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值，这样的函数称为多值函数，并把 $y_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 和 $y_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 称为这个多值函数的两个**单值分支**。

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数。

最后我们再次强调，在函数关系中起决定作用的是定义域 D 和对应法则 f 这两个基本要素，两个函数是否相等（即为同一个函数），取决于函数的这两个要素是否完全相同。例如，函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$ 就是两个不同的函数，这是因为它们的对应法则不同，因而值域也就不同。

下面举几个函数的例子。

例 1　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $[0, +\infty)$，它的图形如图 1－3 所示。

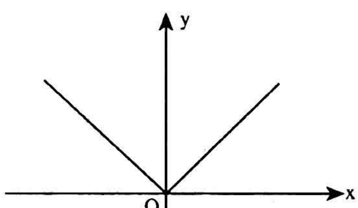


图 1－3

例 2　符号函数

$$y = sgnx = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-4 所示。对任何 $x\in\mathbf{R}$，有

$$x = sgnx\cdot|x| \quad 或 \quad |x| = xsngx$$

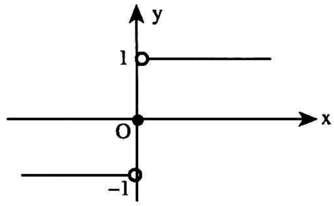


图 1-4

例 3　取整函数

对任意的 $x\in\mathbf{R}$，用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y = [x]$$

称此函数为**取整函数**，$[x]$称为 x 的整数部分。

例如，$[\frac{1}{2}]=0,[\sqrt{3}]=1,[2]=2,[-3.9]=-4$。

$y=[x]$的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-5 所示。

取整函数还可以表示成

$y=[x]=n$　当 $x\in[n,n+1),n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

取整函数 $y=[x]$具有下列性质：

对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $x-1<[x]\leqslant x$。

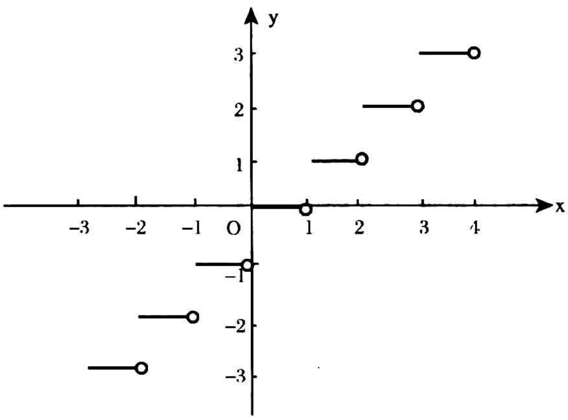


图 1-5

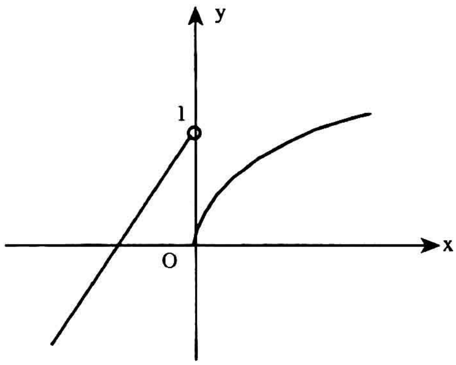


图 1-6

从上面的例子中我们看到，有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的式子来表示，这样的函数称为**分段函数**。

例 4　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geqslant 0\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$。当 $x\in(-\infty,0)$时，对应的函数值 $f(x)=2x+1$；当 $x\in[0,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=\sqrt{x}$。这个函数的图形如图 1-6 所示。

分段函数在科学技术和日常生活的实际应用中也是经常会遇到的，下面举例说明之。

例 5　根据国家规定，个人月收入 x 不足 880 元不纳税，超过 880 元而小于 1380 元的部分按 5% 纳税，而超过 1380 元而小于 2000 元的部分按 10% 纳税，则个人月收入 x 与交纳所得税 y 的函数关系为

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 880\\(x-880)\dfrac{5}{100} & 880<x\leqslant 1380\\25+(x-1380)\dfrac{10}{100} & 1380<x\leqslant 2000\end{cases}$$ 。

2. 函数的几种特性

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$。如果存在正数 M,使得对任一 $x\in X$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**。

如果这样的 M 不存在,就称 $f(x)$ 在 X 上**无界**。换言之,如果对任意给定的一个正数 M(不论多么大),总有某个 $x\in X$,使得

$$|f(x)|>M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**。

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足

$$|\sin x|\leqslant 1$$

所以 $\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数,任何大于等于 1 的实数都是它的界。

又如函数 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是无界函数。

函数有界的定义也可叙述为:如果存在常数 M_1 和 M_2,使得对任一 $x\in X$,都有

$$M_1<f(x)<M_2$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界。

容易证明,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$。如果对任意的 $x_1,x_2\in I$,且当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的;如果当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的。

单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**。

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 或 $[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$ 是单调增加的,在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$ 上是单调减少的,在整个 $[0,2\pi]$ 上不是一个单调函数(图 1-7)。

又例如,函数 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(图 1-8)。

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即当 $x\in D$ 时必有 $-x\in D$),如果对任意的 $x\in D$,总有

$$f(x)=f(-x)$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**;如果对任意的 $x\in D$,总有

$$f(x)=-f(-x)$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**。

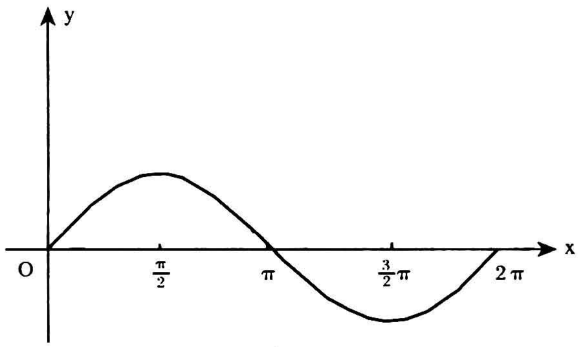


图 1－7

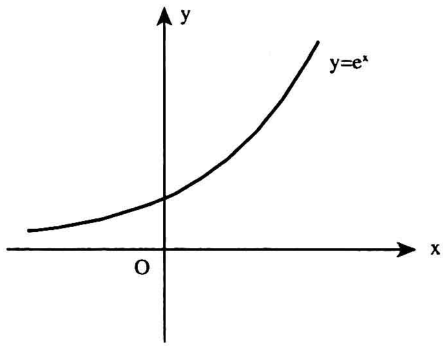


图 1－8

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称。

例如，$y=\sin x$，$y=x^3$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$y=\cos x$，$y=|x|$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数。

周期性 设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在不为 0 的数 T，使得对每一个 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且总有

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$是**周期函数**，T 称为$f(x)$的**周期**。通常我们说的周期指的是**最小正周期**。

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是周期为 π 的函数；$y=x-[x]$是周期为 1 的函数。

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域是 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的定义域是 D。如果 $u=\varphi(x)$的值域 $W\subset D_1$，则将由下式

$$y=f[\varphi(x)]$$

定义的函数称为由函数 $u=\varphi(x)$，$y=f(u)$构成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为**中间变量**。

例如，函数 $y=\sin 2x$ 可看作由 $y=\sin u$，$u=2x$ 复合而成的。又例如，$y=\sqrt{x^2+1}$可看作由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+1$ 复合而成的函数。

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成。例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x^2+1$，则得复合函数 $y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$。

函数的复合运算，一方面是产生新的函数的丰富源泉，另一方面又是将复杂的函数分解成比较简单的函数的一种方法。

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases},\qquad \varphi(x)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 1\\ 0 & x<1\end{cases},$$

求复合函数 $\varphi[f(x)]$。

解 由于

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases},$$

所以

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}\sin f(x) & f(x)\geq 1\\ 0 & f(x)<1\end{cases}$$

根据 $f(x)$的表达式知

当 $x\leqslant -1$ 时,$f(x)=x^2\geqslant 1$;当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=1$;当 $-1<x<0$ 时,$f(x)=x^2<1$。

从而

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}\sin x^2 & x\leqslant -1\\ 0 & -1<x<0\\ \sin 1 & x\geqslant 0\end{cases}\quad。$$

例 2 函数

$$y=\left[\frac{1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^3$$

可看成哪几个简单函数的复合?

解 由所给函数的复合结构可知,这个函数可看作由

$$y=u^3,\quad u=\frac{1-v}{1+v},\quad v=w^{\frac{1}{2}},\quad w=1-x^2$$

复合而成的复合函数。

要注意,并不是任何两个函数都能复合成一个新的函数。例如,$f(x)=\arcsin x$ 与 $\varphi(x)=x^2+2$ 就不能复合成 y 是 x 的函数。因为对任何 x 的值,表达式 $\arcsin(x^2+2)$都没有意义。因此,对函数 $f(x)$与 $\varphi(x)$进行复合时,必须注意只有当 $\varphi(x)$的值域或值域的一部分包含在 $f(x)$的定义域内时,才能复合。

2. 反函数

这里我们介绍另一种由给定函数构造新函数的方法——**反演法**,以及用反演法由给定函数构造的新的函数——**反函数**。为此,我们先观察下面的例子。

考虑在区间[0,2]上的函数 $f(x)=2x+1$,其值域为[1,5],对每一个 $x\in[0,2]$,通过 f 的作用恰好有一个 $y\in[1,5]$与之对应,即有

$$y=2x+1$$

相反,对每一个 $y\in[1,5]$,恰有一个 $x\in[0,2]$,使 $y=f(x)$。为求这个 x,我们可由 $y=2x+1$ 解得

$$x=\frac{1}{2}(y-1)$$

这个关系式将 x 定义为 y 的函数。如果我们用 $\varphi(y)$表示这个函数,则对每个 $y\in[1,5]$都有

$$x=\varphi(y)=\frac{1}{2}(y-1)$$

函数 $x=\varphi(y)$称为函数 $y=f(x)$的**反函数**。此时,对每一个 $x\in[0,2]$,都有

$$\varphi[f(x)]=\varphi(2x+1)=\frac{1}{2}[(2x+1)-1]=x,$$

而对每一个 $y\in[1,5]$,都有 $f[\varphi(y)]=f[\frac{1}{2}(y-1)]=2[\frac{1}{2}(y-1)]+1=y$。

一般地,设 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W。对于每个 $x\in D$,恰有一个 $y\in W$,使得 $y=f(x)$。若对于每一个 $y\in W$,恰有唯一一个 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,则在 W 上定义的这个新函数,称为 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x=\varphi(y)\text{ 或 }x=f^{-1}(y)$$

而由 $y=f(x)$得到 $x=\varphi(y)$的这种方法称为**反演法**。

如果 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数,则 $y=f(x)$也是 $x=\varphi(y)$的反函数,即它们互为反函数。

习惯上,我们总是以 x 为自变量,因此把 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$)写成 $y=\varphi(x)$(或 $y=f^{-1}(x)$)。例如,函数 $y=2x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上都是单调函数,其反函数 $x=\frac{1}{2}(y-1)$,$y\in(-\infty,+\infty)$,互换 x 和 y 的符号,将这个反函数写作 $y=\frac{1}{2}(x-1)$,$x\in(-\infty,+\infty)$。

容易证明,如果 $y=f(x)$为定义在 D 上的单调函数,则其反函数必定存在。有时,函数 $f(x)$在它的整个定义域 D 上不是单调的,但它在某个区间 $I(I\subset D)$上都是单调的,如果我们把 $f(x)$的定义域限制在 I 上,这样得到的函数就存在反函数。

例如,函数 $y=\sin x$ 在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上不是单调的,故不存在反函数,但如果把它的定义域限制在单调区间 $I_n=[(n-\frac{1}{2})\pi,(n+\frac{1}{2})\pi]$$(n\in\mathbf{Z})$上,则定义在 I_n 上的正弦函数就存在反函数。特别地,定义在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的正弦函数有一个定义域为$[-1,1]$,值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$的反函数,通常称为反正弦函数的主值,记作 $y=arc\sin x$。

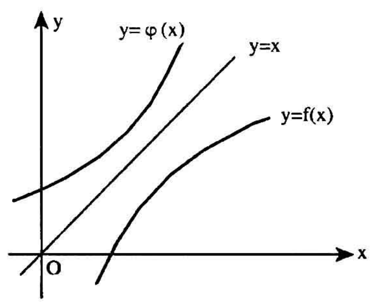


图 1-9

函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=\varphi(x)$的图形在同一坐标平面上是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1-9)。

四、初等函数

1. 基本初等函数

在微积分中常见的函数都是由五类所谓“基本初等函数”构成的,大家在中学数学教材里已不同程度地接触过这五类函数。我们在这里对这些函数作一些简要的说明,便于大家复习。

(1)幂函数

$$y=x^{\mu}\quad(\mu\text{ 是常数})$$

称为**幂函数**。

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域是随 μ 的取值而确定的。例如,当 $\mu\in\mathbf{N}$ 时,$y=x^{\mu}$ 的定义域是

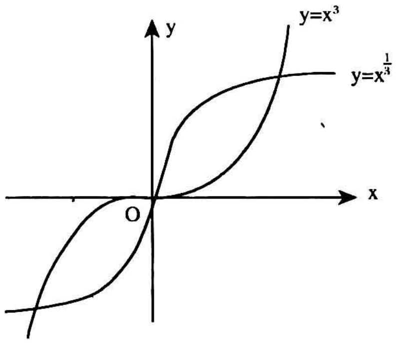


图 1 - 10

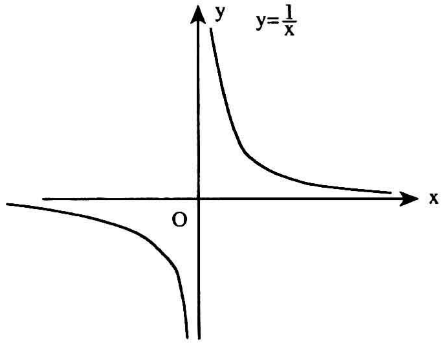


图 1 - 11

R,当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是$[0,+\infty)$;当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域是$(0,+\infty)$。但不论 μ 取什么值,幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义。

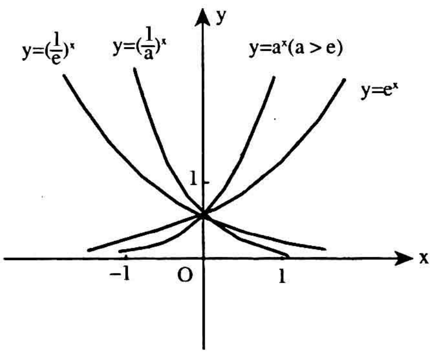


图 1 - 12

图 1 - 10 是 $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图形;图 1 - 11 是 $y=\frac{1}{x}$ 的图形。

(2)**指数函数**

$$y = a^x \qquad (a>0,a\neq 1)$$

称为**指数函数**。它的定义域是$(-\infty,+\infty)$。

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $a^x>0$ 且 $a^0=1$,所以指数函数的图形在 x 轴上方且通过点(0,1)。

当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是单调增加函数,当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是单调减少函数(图 1 - 12)。

工程技术上常用以常数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数

$$y = e^x$$

我们将在第一章第六节中介绍这个常数 e。

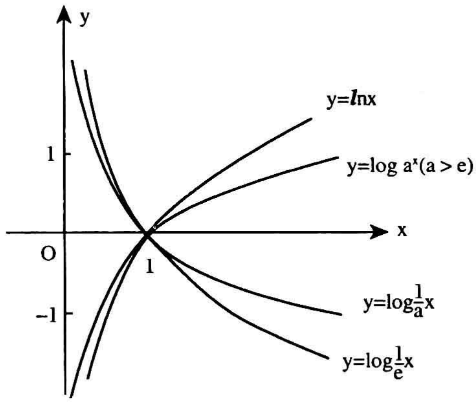


图 1 - 13

(3)**对数函数**

对数函数是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作

$$y = \log a^x \qquad (a>0,a\neq 1)$$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,它的图形与指数函数 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,总位于 y 轴右方且通过点(1,0)(图 1 - 13)。

当 $a>1$ 时,$y=\log a^x$ 是单调增加的。

当 $0<a<1$ 时,$y=\log a^x$ 是单调减少的。

当 a 取常数 e 时,我们把 $\log e^x$ 记为 lnx,并把

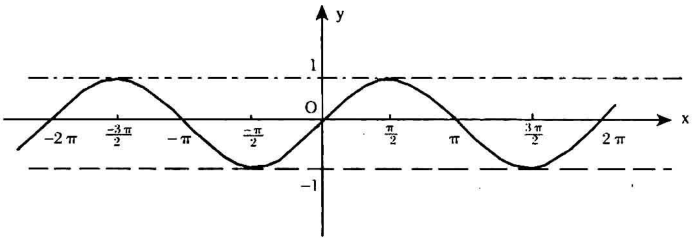
$$y = lnx$$

称为**自然对数函数**。这是工程问题中常见的函数。

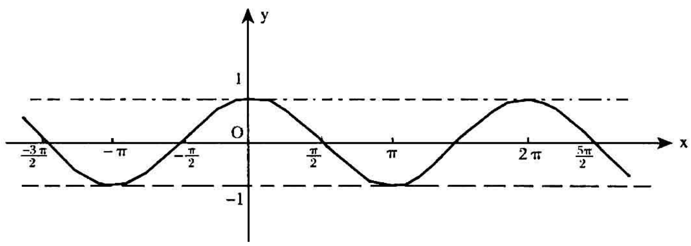
(4)三角函数

我们把所有的三角函数列在下表中，以利大家复习。

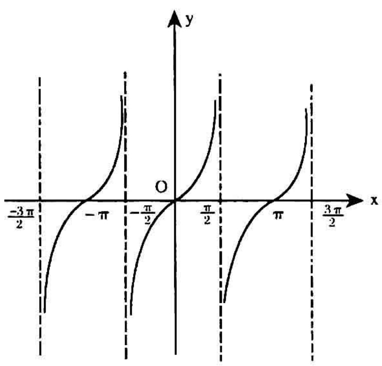
函数	定义域	值域	周期	奇偶性	图形
$y=\sin x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	2π	奇	图 1－14(a)
$y=\cos x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	2π	偶	(b)
$y=\tan x$	$\mathbf{R}\setminus\{(n+\frac{1}{2})\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	π	奇	(c)
$y=\cot x$	$\mathbf{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	π	奇	(d)
$y=\sec x$	$\mathbf{R}\setminus\{(n+\frac{1}{2})\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}\setminus(-1,1)$	2π	偶	略
$y=\csc x$	$\mathbf{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}\setminus(-1,1)$	2π	奇	略



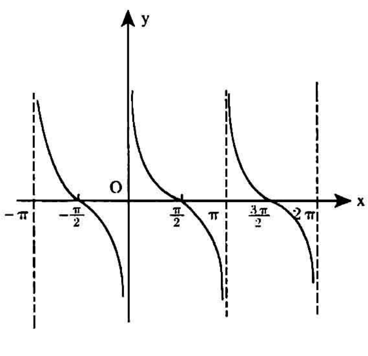
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1－14