

高級中學課本代數第三冊

教學參考資料

第一分冊

北京中小學教學參考資料編輯委員會

北京大眾出版社

編 者 的 話

一、本資料是爲了幫助京津兩市中學教師鑽研教材、改進教法、正確地使用教學大綱和教科書，以貫徹政務院和中共北京市委提高教育質量的指示而編修的。

二、根據中華人民共和國教育部的指示，本資料發行範圍限於京津兩市，其他地區如需參考，可以作爲內部交流經驗之用。

三、本資料僅供教學時參考，希望教師們在教學中發揮自己的創造性，不必受資料的拘束。

四、本資料是由京津兩市部分教師在暑假中以去年本會所編的“中學數學授課計劃綱要”爲基礎集體編修的，在內容上雖然有所改進，但由於編修教師的水平和時間的限制，一定還存在着不少缺點和錯誤，希望教師們在使用中多多提出指正的意見。來函請寄北京西黃城根甲 32 號本會。

五、本資料在編修過程中，曾蒙人民教育出版社數學編輯室的一些同志熱情的指導，又在北京師範大學傅種孫副校長領導下，由該校數學系董延闓、梁紹鴻、鍾善基、白尙恕、王世強、嚴士健等同志集體校閱，謹在此致以衷心的謝意。

北京中小學教學參考資料編輯委員會

一九五五年八月

總 說 明

本教學參考資料是根據“中學數學教學大綱（修訂草案）”和“高中代數第三冊”課本（一九五五年秋季供應），並在一九五四年暑期本會所編的“中學數學授課計劃綱要”的基礎上進行編修的。

中學數學教學大綱（修訂草案）中指出：

“中學數學教學的目的是教給學生以數學的基礎知識，並且培養他們應用這種知識來解決各種實際問題所必需的技能和熟練技巧。

教師在講授數學的過程中，要以社會主義思想教育學生，要充分聯繫我國社會主義建設中各方面的成就與情況，以培養他們成為積極參加社會主義建設和保衛祖國的全面發展的新人。注意培養學生的辯證唯物主義的世界觀，愛國主義思想和民族自尊心以及愛科學、愛勞動、愛集體、守紀律的美德，並且鍛鍊學生的堅強意志和性格。”

大綱中又指出：

“代數教學的目的，在於擴大學生關於數的概念，教會學生自覺地、迅速而又最合理地作出代數式的恒等變形，發展學生關於函數相依關係和它的圖象的概念，教會學生列出方程和解方程，並且教會學生應用代數知識解答有關物理、化學、技術方面、農業方面的簡單問題。”

在高中三年級第一學期的代數課中，主要是教給學生聯合與二項式定理、複數及不等式的知識。其教學目的如下：

（一）使學生理解並掌握聯合（排列、組合）的概念及排列與

組合的主要公式；熟悉二項式定理及其應用；掌握複數及其運算法則；明確不等式的意義和基本性質；並能够學會不等式的証法及一次不等式的解法等。

(二) 通過學習排列、組合，培養學生分析問題的能力；通過複數的學習使學生認識數學發展的規律並培養唯物主義的觀點；通過書面作業培養學生認真負責、愛好整潔的勞動品質。

本資料是按照單元編寫的，在每單元中均包括教學目的、教材分配、教材分析、教法建議和其他等五部分。

“教學目的”分列於每單元和每課時中，指出一般的和具體的要求。希望教師根據教學大綱的精神和學生的具體情況使這些目的在教學中得以貫徹。

“教材分配”部分，因編修時間所限，只按照課時的順序提出教學題目和教學目的以及例題、習題和參考題的配備建議，一般未詳及細節。對於課時和例題、習題的安排是編者根據一般情況擬訂的，但因各校具體條件不同，不可能完全適用，任課教師要從實際出發，確定取捨，不能強求劃一。所列參考題係供教師佈置作業時調濟之用，也可留作進行複習時的參考。

“教材分析”部分，主要說明教材的講授順序、前後聯系和教學重點，旨在幫助教師深入地鑽研教材，進一步掌握和貫徹教學大綱的精神。但由於教材特點和教學需要的不同，所以詳略不一。

“教法建議”係根據一般的教學經驗，提出一些教學方法，旨在幫助教師更好的處理教學中的具體問題。教師必須在鑽研教材的基礎上，結合學生的具體情況和存在問題，決定自己的教學方法，不要機械搬用。

“其他”部分，係根據教學需要，提出一些僅供教師參考的材料，或對於編者意圖作某些必要的解釋。其中有些內容較深，是爲了幫

助部分教師深入的領會教材，明確概念，但絕不可搬到教學中去。

此外，關於補充題、學期複習提綱以及對於課本的勘誤等統列於書後的“附錄”中，以備應用和查考。

本學期全部教材擬用32課時講授完畢（詳見下表），其餘時間可留作複習和考查之用。

講 授 內 容	授課時數
第一單元 聯合與二項式定理	共14課時
I 聯合	7 課時
II 牛頓二項式定理	7 課時
第二單元 複數	共10課時
第三單元 不等式	共 8 課時
I 不等式的基本性質和同解不等式	4 課時
II 不等式的證明和一次不等式的解法	4 課時

此外在教學中還應注意下列事項：

（一）在教學過程中，應注意遵守教學原則，例如在講授聯合時，要特別注意啟發學生的積極性，多引導學生進行思考。

在教學中必須遵循由感性到理性，由具體到抽象，由特殊到一般等原則。如講不等式的基本性質時，就應先由具體的數字不等式講起，然後再推廣到一般的情形，但也應注意演繹的方式。

（二）教師在佈置課外作業時，應要求學生先複習教材內容而後作題，若遇較難的題目，還應給學生作必要的提示。

（三）應在整個的教學過程中，認真貫徹教育部所發佈的“關於減輕中、小學學生過重負擔的指示”，為進一步提高教育質量而努力。

目 錄

總說明	1
第一單元 聯合与二項式定理	1
I 聯合	1
II 牛頓二項式定理	11
第二單元 複數	18
第三單元 不等式	27
I 不等式的基本性質和同解不等式	27
II 不等式的証明和一次不等式的解法	30
附錄	35

第一單元 聯合與二項式定理

(見“高中代數”第三冊 43—58 頁, § 146—§ 157.)

本單元總的教學目的

(一) 教給學生聯合(排列、組合)的概念, 及排列與組合的主要公式; 二項式定理, 及其通項公式。

(二) 要求學生對聯合有明確認識, 並能正確地使用公式解決實際問題; 熟悉二項式定理的展開法則, 及其通項公式的應用。

(三) 通過講授聯合, 啟發學生的思維能力, 講授二項式定理, 培養學生觀察、分析、綜合與總結的能力。

I 聯 合

(見課本 43—50 頁, § 146—§ 153.)

一、教學目的

(一) 由簡單實例引出聯合(排列、組合)的概念, 並由概念導出其主要公式。

(二) 培養學生的思考能力, 使學生能正確地選用聯合的公式解決實際問題。

二、教材分配（共用 7 課時）

（一）第一課時

1. 教學題目 聯合的概念。

2. 教學目的

（1）通過簡單實例，使學生明確聯合的概念。

（2）使學生明確排列與組合，選排列與全排列的區別；並能進行辨別三種聯合的問題。

3. 教材 見課本 43 頁，§146.

4. 例題 詳見“其他”欄中之本課時的參考教案。

5. 習題 1222₁，1223₁，1224.

（1223₁ 僅列出以 G 為首的各種排列，為導出排列公式作準備。）

（二）第二課時

1. 教學題目 排列。

2. 教學目的

（1）使學生了解導出選排列與全排列的公式的方法，並能用公式解題。

（2）通過將簡單排列不重複地、不遺漏地列出，培養學生發現規律、歸納及總結的能力。

3. 教材 見課本 44—47 頁，§ 147—§ 150.

4. 例題 課本 46 頁，§ 148 問題 1) 2); 47 頁，§ 150 例題 1) 2)。

5. 習題 1226₂，1227₅，1232，1240，1242.

（三）第三課時

1. 教學題目 排列。

2. 教學目的

(1) 使學生學會附有簡單條件的排列問題的解法。

(2) 通過講解上述問題，引導學生深入鑽研，周密思考，以逐步提高其解題能力。

3. 教材 見下列例題。

4. 例題 課本 46 頁，§ 148 問題 3)；50 頁練習 256；補充題 1。

5. 習題 1266, 1268, 1270, 1272。

(四) 第四課時

1. 教學題目 組合。

2. 教學目的

(1) 使學生了解排列與組合的關係，及學會導出組合公式的方法。

(2) 使學生能使用公式解題。

3. 教材 見課本 47—49 頁，§ 151。

4. 例題 課本 97 頁，1259₄₎；48 頁，§ 151 例題 1) 2)。

5. 習題 1229_{2) 3)}，1234, 1241, 1246。

(五) 第五課時

1. 教學題目 組合。

2. 教學目的

(1) 使學生認識組合公式的第二種形式及其用法。

(2) 使學生了解組合的性質 $C_m^n = C_m^{m-n}$ ，並能掌握其用法。

3. 教材 見課本 49—50 頁，§ 152—§ 153。

4. 例題 1251₂₎，1260₁₎。

5. 習題 1229_{5) 6)}，1263_{1) 2)}，1251_{1) 3)}。

(六) 第六課時

1. 教學題目 組合。

2. 教學目的

(1) 使學生學會附有簡單條件的組合問題的解法。

(2) 通過講解上述問題，發展學生的思考能力。

3. 教材 見下列例題。

4. 例題 補充題 2, 3, 4, 5.

5. 習題 1269, 1271, 1274, 1276.

(七) 第七課時

1. 教學題目 關於聯合的知識的複習。

2. 教學目的 鞏固關於聯合的知識；並引導學生深入鑽研，將解題能力再提高一步。

3 教材 見下列例題。

4. 例題 1273, 1275.

5. 習題 1278 ₄₎, 1279 ₄₎, 1280 ₄₎, 1281 ₄₎.

三、教材分析

聯合（排列、組合）在代數中是個獨立的題材。它和以前的內容，無論在性質上，或在方法上的聯繫都較少，但在日常生活中，則常會遇到與聯合有關係的問題，在比較高深的數學中，如“或然率”、“行列式的性質”等都要使用聯合；而在實用的科學中，如“統計”、“保險”等又需要“或然率”的計算。因此有必要在高中階段初步地將聯合介紹出來。

聯合是排列與組合的總稱。為了便於講解及便於使學生接受，一般都從排列講起。初學者對排列與組合不易很快分清，故在導出聯合概念之後，先使學生接受排列，然後再轉入組合，是較好的辦法。更重要的是先導出排列公式就給導出組合公式帶

來很大的便利。

在中学还不是对联合深入的專題研究。規定在本單元開始時講它，有兩個主要的理由：第一，為講二項式定理作好準備，因要用組合概念整理展開式的係數；第二，根據學生的年齡特徵，現在正好藉這種需要思考力較強的題材，進一步發展學生的思惟能力。前者是將聯合與二項式定理歸在一個單元之內的原因，同時也是決定深度的關鍵。故僅僅介紹“不同物件”及“不重複取用”的聯合公式，也不講不同物件的環狀排列。（要告訴學生選排列、全排列與組合並非聯合的所有情形，而僅是其中最簡單與最重要者。）總的精神是現在不多講公式，而要求能使學生對聯合的初步知識從理論上接受並能作些簡單計算。在這樣一個基礎上，進一步發展學生的智力，使之能夠不依賴公式解出較難的問題。

培養學生獨立思惟能力，是改善數學教學方法的正確方向。學習聯合必須注意思考，且必須周密地思考。故要善於發揮本教材的特點，大力培養學生的思惟能力，這是有相當教育意義的

四、教法建議

（一）建議用第一節課在導出聯合的概念之後，集中力量練習辨別排列與組合，使學生能從“與順序有關”或“與順序無關，僅與成分有關”上區分，是比較具體的方法。詳見參考教案。

（二）用第二、三節課講排列。結合第一節課所留作業，由分析排列的規律導出 $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ 。再把這個規律一般化，即導出 $A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]$ 。再由 A_m^n 導出 $P_m = m!$ 。以上是第二節課的重點。然後通過例題講解如何將公式運用到實際問題中去。

（三）第三節課開始時，要多通過提問，檢查教學效果，如發現問題則急行補救。然後講解附有條件的排列例題，結合例題着

重指出當問題比較複雜時，必須周密思考，以防止造成錯誤。這是第三節課的重點，在此結束排列。

(四) 第四節課的重點應是組合公式的導出。要用課本§151的例，將全部排列清楚地、完整地列在黑板上，再按其成分分組，便很直觀地導出排列與組合之間的關係，從而導出組合的公式。講明實用時的直接展開方法。分析分子與分母的結構，說明 C_m^n 的值的變化情形，為講二項式定理的性質作好準備。再講簡單的应用問題，結束第四節課。

(五) 因導出組合公式比較繁難，故在第五節課開始時，應通過提問檢查教學效果。然後講授組合公式的第二形式及其應用。再講組合的性質 $C_m^n = C_m^{m-n}$ 。

習題中驗證等式及用聯合的公式組成方程及方程組的習題甚多，有複習鞏固及形成熟練技巧的雙重作用。故第五節課的重點應是通過習題使學生能對第二形式及 $C_m^n = C_m^{m-n}$ 熟練應用。要結合例題着重講明如何將含有階乘的分式化簡。

(六) 大綱中不要求講授組合的第二性質： $C_{m+1}^n = C_m^n + C_m^{n-1}$ 。只在習題中把它作一個驗證題，使學生知道這個等式就够了。故在第六節課中講授補充題2，順便令學生從實例體會它的意義。一方面使學生初步了解附有條件的組合問題，另一方面則為用數學歸納法證二項式的乘積規律作一準備，第六節課的重點應是提高學生的理解能力。

(七) 第七節課開始時，應當用提問方式作全面複習，然後作簡單概括的小結。此後則用兩個較難的實例，引起更大的學習興趣，再用綜合性的習題作鞏固工作。最後說明聯合在高等數學及應用科學中的重要性，以結束全段。（參看伯拉基斯著“中學數學教學法”第三冊“聯合”部分。）

此外還有三項建議：

1. 提問時不但叫學生給出答數，還要求能用語言清楚地講出解題的方法。

2. 書面解題時可叫學生附加簡單說明。

3. 介紹一種直觀教具。作邊長 5 寸的方形薄板五塊，一面寫 a, b, c, d, e ，另一面寫 1, 2, 3, 4, 5。講課時用作表演，學生易於接受。

五、其 他

(一) 注意事項

1. 在導出排列（或組合）的公式時，將全部排列完整地、整齊地寫在黑板上有直觀作用，故勿嫌繁瑣。

2. 舉例須結合日常生活。對學生不熟習的事件不宜舉出。

3. 在講 C_m^n 的值的變化時，不必引出 C_m^n 的最大的值的討論，留待結合二項式的性質再講。

4. 在聯合中 $m < n$ 無意義。在排列中 A_m^n 無意義。在組合中 $C_m^n = C_m^m = 1$ 可從定義上加以說明， C_m^m 的意義是全取， C_m^0 的意義是不取，皆可解釋為組合方法之一，故其值亦皆為 1。 $C_m^m = 1$ 又可用公式的第一種形式計算。若用 $C_m^m = \frac{m!}{m!(m-m)!}$ 計算，則須先提出 $0! = 1$ 的規定。書中習題無涉及 $0!$ 者，學生不問以不講為是。

5. 要重視伯拉基斯在數學教學法中所給的警告，必須防止學生死套公式造成形式主義。通過學習聯合應當是增進，而不是阻礙思考能力，在本段教材中要特別注意糾正死套公式的現象。

(二) 參考教案（聯合的第一課時）

1. 教學題目 聯合的概念（教材 見課本 43 頁 §146.）

2. 教學目的 （1）通過簡單實例使學生明確聯合的概念。

(2) 使學生明確排列與組合、選排列與全排列的區別；並能進行辨別三種聯合的問題。

3. 教學方法 以談話法為主，以講解法輔之。

4. 教學過程

(1) 組織教學

(2) 講新課

i. 聯合概念的引出

目的：使學生認識聯合是一個新的題材，它不是用已經學過的方法所能解決的問題，但這種問題却有解決的必要。

問：用 1, 2, 3 三個數碼能作成幾種數碼不重複的二位數？

(啓發：寫寫看)

答：六種：12, 13, 23, 32, 31, 21。

講：所得的答數是寫出來的，但寫出來不是解這一類題的好方法。例如用 1, 2, 3 … 九個數碼作五位數，寫起來已經很費時間；若問題再加複雜，例如自全班 50 個學生中任選八個坐在第一排的八個坐位上，有多少種不同坐法？寫起來便過於繁難。

代數中稱這種問題為“聯合”的問題，因為是將幾個數碼，幾個人或幾個物件，按照一定的要求“聯合”在一起，而求出所有不相同的“聯合”的數目。

我們已經認識到求出這個數目必須尋出一個簡捷的方法，因此我們便要進行研究這個題材。

在此要強調指出解聯合的題是要得到符合題意的、不遺漏的且不重複的聯合數目。

ii. 辨別排列與組合

目的：使學生認識到排列與組合是兩種本質不同的聯合；並叫學生能具體地從“順序”與“成分”上作初步的辨認。

問：自 A, B, C 三個學生中選出兩個，分別任正副班主席，有多少種不同選法？（啓發：寫出正副二字，在下邊填入字母，可寫出所求結果。）

答：六種： AB, AC, BC, BA, CA, CB 。

問：自 A, B, C 三個學生中選出兩個，出席一個會議，有多少種不同選法？（啓發：寫寫看）

答：三種： AB, AC, BC 。

問：以上兩個問題都是從三個學生中選出兩個的聯合，為什麼得不同的答數？（預料學生不能回答）

講：兩個都是聯合的問題，但前者在聯合時與“順序”有關， A 爲正 B 爲副，與 B 爲正 A 爲副，是兩種不同的選法。後者則與“順序”無關，而僅與“成分”有關， AB 或 BA 被選爲出席代表是沒有分別的。

說明前者稱排列，後者稱組合，二者都屬於聯合；並強調欲辨別二者必須從“順序”與“成分”分析。

提問下列各題，叫學生用 $a, b, c, \dots$ 代表題內的數碼、人或物件，用寫寫看的方法，從順序與成分的關係試驗辨認哪些是排列題，哪些是組合題。

坐在教室最前邊的四個學生若交換坐位，能交換成多少種不同的坐法？（排列）

自五本書裏選出三本贈給一位朋友，有多少種不同的選法？（組合）

從五人組成的籃球隊中，選出二人分別作正副隊長，有多少種不同的選法？（排列）

高三的四個班擬作排球友誼比賽，若決定班與班之間皆須比賽一次，共須比賽若干次？（組合）

四個人兩兩握手一次，共須握手若干次？（組合）

四個人互贈照片各一張，共須照片若干張？（排列）

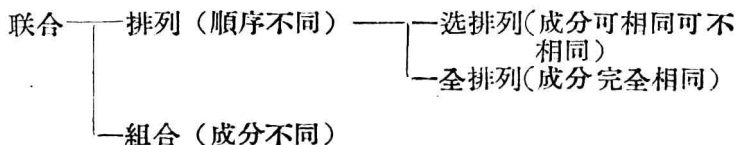
iii. 講選排列與全排列的區別

結合例題“用 1, 2, 3 能作成多少種數碼不重複的二位數？三位數？”講明排列共分兩種，一是僅用一部份元素，（在此介紹“元素”）一是用全部元素。前者稱選排列，不僅是順序不同，有的成分也不同，但都與順序有關。後者稱全排列，成分皆同，不同的是順序。

iv. 介紹 A_m^n 、 P_m 、 C_m^n 三種符號的意義

（3）鞏固知識

總結本節課的內容列成下表，再強調排列與組合必須從順序與成分區分。



說明選排列、全排列與組合僅是聯合中最簡單與最重要者。

（叫學生在課本 43 頁，末行，第三字前，加“最簡單與最重要者”八個字。）

（4）佈置作業

複習：讀課本 § 146, § 147 至 44 頁當中。（不必多讀）

作業：1222 D, 1223 D, （僅列出以 a 為首的各種排列），1224.

要求符合題意，不遺漏且不重複。

多給予啓發，訓練學生能想出有系統的列法。

II 牛頓二項式定理

(見課本 50—58 頁, § 154—§ 157.)

一、教學目的

(一) 由二項式乘積的規律, 使學生明確二項式定理的構成方法, 及其展開法則。

(二) 要求學生會使用展開公式及通項公式解題。

(三) 通過講二項式定理的性質, 啟發學生如何發現規律; 並培養其歸納與演繹的能力。

二、教材分配 (共用 7 課時)

(一) 第一課時

1. 教學題目 二項式的連乘積的規律。

2. 教學目的 使學生認出僅第二項不同的二項式的連乘積的結構規律, 及各項係數與組合的關係, 為講二項式定理作準備工作。

3. 教材 見課本 50—51 頁, § 154.

4. 例題 § 154 的例。

5. 習題 1283 1) 2) 3)。

(二) 第二課時

1. 教學題目 數學歸納法的概念。

2. 教學目的 使學生初步了解數學歸納法的概念及其証題步驟。

3. 教材 詳教法建議。

4. 作業 複習本節課的內容。

(三) 第三課時

1. 教學題目 二項式定理的展開公式。