二元齐次对称多项式与二项式定理

唐祐华 著

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \begin{bmatrix} n-2s \\ k-s \end{bmatrix} a_s (x+y)^{n-2k} (xy)^k$$

$$a_k = a_{n-k} \ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

二元齐次对称多项式与二项式定理

唐祐华 著

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k = \sum^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \begin{bmatrix} n-2s \\ k-s \end{bmatrix} a_s (x+y)^{n-2k} (xy)^k$$

$$a_k = a_{n-k} \ (k=0,1,2\cdots n)$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

二元齐次对称多项式与二项式定理/唐祐华著. —杭州：浙江大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-308-10113-4

Ⅰ.①二… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①对称多项式②二项式定理 Ⅳ.①O174.14②O122.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 132877 号

二元齐次对称多项式与二项式定理

唐祐华 著

责任编辑 许佳颖

出版发行 浙江大学出版社

（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷 浙江省邮电印刷股份有限公司

开　　本 880mm×1230mm 1/32

印　　张 8.25

字　　数 206 千

版 印 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-10113-4

定　　价 29.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

内 容 简 介

十七世纪著名的英国天才数学家、物理学家、力学家、天文学家牛顿(Newton,1642—1727)于1676年发现：任意一个二项式的任意次方幂的展开式的系数全是组合数，即

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}\left(\left|\frac{x}{y}\right|<1\right).$$

这就是著名的牛顿二项式定理. 其中 α 是实数，$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. 其后300多年来未见二项式定理有什么值得称道的新发展；然而科学实验、生产实践的发展却从不停滞，客观现实也都希望二项式定理能发挥更大的作用，但现状总难于改观.

为使二项式定理系列能涵盖更多的内容，扩大其使用的范围，笔者独辟蹊径，从对称多项式基本定理出发，由考虑二元齐次对称多项式与二项式定理间的关系入手，取得了可喜的进展.

众所周知，二元齐次对称多项式的一般形式为：

$$\sum_{k=0}^{n}a_{k}x^{n-k}y^{k}\quad(a_{k}=a_{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

二元齐次对称多项式的全体构成的无穷集合为

$$S=\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{k}x^{n-k}y^{k}\,\middle|\,a_{k}=a_{n-k}\right\}.$$

将 S 中的每个多项式的初等表达式都写出后，便得到无穷多个恒等式，这无穷多个恒等式构成的集合记作 B，即

$$B=\left\{\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sum_{S=0}^{k}(-1)^S\begin{bmatrix}n-2S\\k-S\end{bmatrix}a_S(x+y)^{n-2k}(xy)^k\,\Bigg|_{a_k=a_{n-k}}\right\}.$$

我们要指出下面的结论：

(1) 已经将二项式定理推广成非常一般的形式；

(2) 集合 B 是由二项式定理和它的全部等价公式所构成的一个无穷集合；

(3) 无穷集合 S 与 B 的元素之间存在一一对应关系；

(4) 集合 S、B 的元素是完全平等的，无主次之分、无贵贱之别；

(5) 主要应用：将二项式定理的等价公式应用到算术、代数、三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数等方面，不仅能导出数以百计（远多于一百）的新的数学公式；特别应用到组合计数问题上，彻底地将历史遗留下来的解的大量不合情理的、不可理喻的表达形式，作了“根除术”后，恢复了本来面目.

由于微分学上的莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）公式（定理）的展开式的系数与代数学上的二项式定理（公式）的展开式的相应系数完全一致，这又诱导我们在微分学上做了与代数学上完全平行的工作.即推广了莱布尼兹定理，建立了由莱布尼兹公式及它的无穷多个等价公式所构成的一个无穷集合：

$$L=\left\{\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(n-k)}g^{(k)}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sum_{S=0}^{k}(-1)^S\begin{bmatrix}n-2S\\k-S\end{bmatrix}a_S\left(f^{(k)}g^{(k)}\right)^{(n-2k)}\,\Bigg|_{a_k=a_{n-k}}\right\}.$$

莱布尼兹定理的等价公式也有多方面的应用，在此我们仅指出：将它们应用到某些不定积分的计算上，能将求不定积分的运算转化成求导的运算，这是一件令人难以置信的事.

考虑到本书的总结与提高，在全书的最后安排了第九章，简单介绍了一个代数系统——线性空间.线性空间的基本概念，在科技领域内已可以算得上是常识性的内容（概念）了，熟悉这一重要而又基本的概念是非常必要的.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

前　言

二项式定理是初等代数学中最基本、最重要的定理之一. 它虽属初等代数学范畴，但其应用范围之广在数学中是不多见的. 这就确定了它在整个数学中的重要作用与地位. 学过初等代数的朋友对它都有一定程度的了解、熟悉，但是对二项式定理有些什么等价公式，能否再推广？关心这类问题的人相对地少了. 然而对于如此重要的定理，确有研究一番的必要，由此萌生了写作本书的想法.

笔者有幸，在退休前的约 20 年里，有机会连续从事数学系的高等代数教学工作，从而有条件重新接触、重温高等代数的内容及有关材料. 由对称多项式基本定理出发，首先为二项式定理建立了几个常用的重要等价公式，并给出了它们在各方面的简单应用，获得了一大批新的数学公式，并为历史上无数经典公式的不可理喻的表达形式，提供了改造成为理想的表达形式的具体方法；进而从最一般的二元 n 次齐次对称多项式出发，将二项式定理推广成非常一般的情形，它的涵盖面更为宽广，遂确立了由二项式定理的全部等价公式构成的一个无穷集合 B，并且证明此集合构成一个代数系统——线性空间，且与由全部二元 n 次齐次对称多项式构成的无穷集合 S 间不仅存在一一对应，且它们成为同构的线性空间.

由于二项式定理与微分学中的莱布尼兹定理(公式)的相应系数完全一致，这样，在微分学上也作了一些与前面完全平行的工作，即推广了莱布尼兹定理，建立了由全部莱布尼兹定理等价公式构成的一个无穷集合 L，并证明此无穷集合亦构成一个线性空间，

且与线性空间 B、S 同构.这就为分析数学与代数学这两门不同的学科之间搭建了一座相互联系的桥梁.

为了对本书的中心内容进行总结与提高,特别安排了第 9 章,用来简略介绍在科技领域特别在数学上几乎成为通俗概念的“线性空间”.它对部分读者将来接受抽象概念时,也有一定的启蒙、开阔眼界的作用.

笔者谨在此向我国当代著名数学家,我的老同事、老朋友耿济教授表示衷心的感谢,对于本书的写作,他给予作者真诚的、竭尽全力的帮助、关心与鼓励.

在写作本书的漫长过程中,已故夫人段黄云女士给予了作者多方面的关心与无微不至的照顾,她的这些默默无闻的贡献是无法看到的,谨以此寄托对故人永恒的哀思.

对于本书的出版,笔者的家人给予了极力的支持.唐康宁、唐乐宁、唐长宁除参与策划外,还帮助做了许多具体工作、提供了方便的条件;唐琥、唐珑、唐瑭在百忙中勇敢地承担了封面设计工作,为本书增色不少,在此一并致谢.

本书内容新颖,然理论又不深奥,仅需具备中学代数中的部分知识,就能顺利读懂并掌握书中主要内容.本书可以作为大学理、工科学生关于莱布尼兹定理(公式)、对称多项式的应用以及线性空间概念等的补充读物;也可供部分成绩优良的高中学生及具有同等学力的数学爱好者阅读;作为中学理科教师及大学理、工科教师的教学参考资料,也很合适的.

笔者才疏学浅,有不妥、错误之处,敬请批评、指正.

唐祐华

2011 年 12 月

目　录

第一篇　预备知识

第二篇　二元齐次对称多项式与二项式定理

第三篇 交代式 轮换式 反轮换式

第四篇　莱布尼兹定理(公式)的等价公式的建立、应用和推广

第五篇　线性空间的基本概念

第一篇　预备知识

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第1章　对称多项式基本定理简介

对称多项式基本定理是本书所论问题的出发点,又是主要结论的依据.因此,首先简略地介绍对称多项式的基本概念,着重介绍对称多项式基本定理.并以对称多项式基本定理为基础,分析、处理初等代数中大家都熟悉的一些典型问题,借以展示对称多项式基本定理的重要作用,达到确立、加强对称多项式基本定理重要性,为后面的讨论作准备.

1.1　对称多项式的基本概念

在初等代数里,经常讨论多项式的许多有关问题.多项式又有一元多项式与多元多项式之分.例如 ax^2+bx+c 为一元多项式,而 $ax^2+bxy+cy^2$ 与 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ (a, b, c 为确定的常数)则分别为二元与三元多项式.当然还有四元、五元甚至 n 元多项式.二元及二元以上的多项式统称为多元多项式.

在多元多项式中,有一类形式特殊、应用极广的多项式,即对称多项式.究竟什么样的多元多项式是对称多项式呢,它在表达形式上又有什么特别的地方呢?要回答这个问题,最好按先特殊后一般的次序来进行介绍.为此,让我们通过对两个具体多元多项式的结构进行分析,来发现它能区别于非对称多项式的特征所在吧!

考虑下面两个多元多项式:

$$f(x,\ y)=x^2+bxy+y^2+cx+cy+d;$$
$$g(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

其中 x, y, z 为文字,b, c, d 为确定的常数.将第一个多项式

$f(x, y)$中的 x, y 互换,除了多项式中某些项的先后次序有所改变外,别无任何其他改变. 多项式中项的先后次序的改变,不是本质上的改变,是无关紧要的,即可以认为多项式 $f(x, y)$没有发生变化. 同样,在第二个多项式 $g(x, y, z)$中,互换其中任意两个文字(互换时第三个文字保持不变),结果多项式 $g(x, y, z)$也没有发生本质上的变化. 多元多项式的这一重要特征,是值得注意并加以利用的. 事实上,有些多元多项式之所以会有较广泛的应用,就是因为它具有如此重要的特征.

下面陈述对称多项式的基本概念.

定义 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为一个 n 元多项式,若互换其中任意两个文字 x_i 与 x_j,多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$保持不变,即

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

$(i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$,则称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是关于 n 个文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式,简称 n 元对称多项式,或对称多项式.

根据这个定义,容易知道多项式 $f(x, y)$及 $g(x, y, z)$,分别是关于 x, y 及 x, y, z 的对称多项式. 对称多项式是存在的,但并非每一个多元多项式都是对称多项式. 例如,多项式

$$h(x, y, z) = xy - xz + yz,$$

就不是对称多项式. 若将任意两个文字如 x 与 y 互换后,

$$h(y, x, z) = yx - yz + xz \neq h(x, y, z).$$

同样,互换 y 与 z 后,得到

$$h(x, z, y) = xz - xy + zy \neq h(x, y, z),$$

故 $h(x, y, z)$不是对称多项式. 可见,不是对称多项式的多项式同样也是存在的. 通过对以上三个多项式 $f(x, y)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$的分析、对比,确切地指出了对称多项式区别于非对称多项式的结构特征所在,是符合客观实际的.

对称多项式概念的重要来源之一及其应用的一个重要方面，是研究一元高次代数方程的根. 例如，设一元二次代数方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的两个根为 x_1 与 x_2，即

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)=0\ (a\neq 0),$$

于是，根据方程的根与系数的关系的维特(F. Vieta，1540—1603)公式，有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

易知这里的 x_1+x_2 与 x_1x_2 就是两个最简单的二元对称多项式. 若把这一结果推广到一元 n 次代数方程上去，就有下面的结论：

设一元 n 次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq 0)$$

的 n 个根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，即

$$\begin{aligned} &a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\ =\ &a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0\ (a_0\neq 0). \end{aligned}$$

根据方程的根与系数之间的关系，就有

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}; \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}; \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

记

$$\begin{cases}\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n; \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n; \\ \cdots\cdots \\ \sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.\end{cases}$$

易见，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 就是 n 个最简单的 n 元对称多项式. 由于它们的结构简单，形式别致，因此称它们为 n 元初等对称多项式（简称初等对称多项式）. 初等对称多项式在研究对称多项式的表达问题上，具有特别重要的作用. 为了说明这种作用，再讨论三个多项式 $f(x, y)$，$g(x, y, z)$，$h(x, y, z)$中对称多项式 $f(x, y)$，$g(x, y, z)$在表达形式上，较之非对称多项式 $h(x, y, z)$的独特之处.

通过简单的计算，容易为对称多项式 $f(x, y)$及 $g(x, y, z)$找出下面的表达式：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + bxy + y^2 + cx + cy + d \\ &\equiv (x+y)^2 + (b-2)xy + c(x+y) + d; \\ g(x, y, z) &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &\equiv (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+xz+yz). \end{aligned}$$

注意两个恒等式的右边都是初等对称多项式的多项式. $f(x, y)$右边的表达式是 x, y 的初等对称多项式$(x+y)$，(xy)的多项式；$g(x, y, z)$右边的表达式是 x, y, z 的初等对称多项式 $x+y+z$，$xy+xz+yz$ 的多项式. 因此，称右边的表达式为它们的初等表达式. 多项式 $h(x, y, z) = xy - xz + yz$，是肯定不可能写成 $x+y+z$，$xy+xz+yz$ 的多项式的. 这就是非对称多项式$h(x, y, z)$与对称多项式 $f(x, y)$，$g(x, y, z)$的本质差异. 每一个 n 元对称多项式都可以写成 n 元初等对称多项式的多项式，而且具体写出的过程也是有确定程序可依的.

对称多项式基本定理： 对于任何一个 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在唯一的 n 元多项式 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，

使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n),$$

$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的初等表达式.

此定理是本书几乎所有问题的出发点和主要结论的依据.

定理的证明本书不再赘述.有兴趣的读者朋友可以参阅相关介绍了对称多项式的《高等代数》教程.

对称多项式基本定理是一个很重要的定理,是本书的基础.下面,就大家熟悉的初等代数范围内举几个浅显的例子.

1.2　几个简单例子

例 1-1　分解多项式 $x^4+(x+y)^4+y^4$ 成因式.

解　此多项式是关于 x, y 的二元(齐次)对称多项式,即多项式的各个项的次数很整齐,本例的多项式为四次齐次对称多项式.根据对称多项式基本定理知,它一定可以写成$(x+y)$, xy 的多项式,且可设

$$x^4+(x+y)^4+y^4 \equiv a_0(x+y)^4+a_1(x+y)^2(xy)+a_2(xy)^2,$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数.只要确定了待定常数 a_0, a_1, a_2,就找到了它的初等表达式.因此,在所设的恒等式中令 $x=0$,于是得到 $a_0=2$,将 $a_0=2$ 代入后再令 $x=-y$,又得到 $a_2=2$,将 $a_2=2$ 代入后再令 $x=y=1$,最后得到 $a_1=-4$. 于是有

$$\begin{aligned}x^4+(x+y)^4+y^4 &= 2(x+y)^4-4(x+y)^2(xy)+2(xy)^2\\&= 2[(x+y)^4-2(x+y)^2(xy)+(xy)^2]\\&= 2[(x+y)^2-(xy)]^2\\&= 2(x^2+xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

若硬要把$(x+y)$也看成一个新的、与 x, y“无关”的独立的文字 z,则多项式在形式上就变成为三个文字 x, y, z 的三元对称多项式 $x^4+y^4+z^4$ 了.根据对称多项式基本定理,按类似上述的方法,可设

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com