拟正则映射与A-调和方程

高红亚　褚玉明　著

科学出版社

拟正则映射与 $\mathcal{A}$-调和方程

高红亚　褚玉明　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

作为高维空间拟共形映射理论的推广与发展，高维空间的拟正则映射理论及相关$\mathcal{A}$-调和方程的研究目前已成为高维空间几何函数论和非线性分析的重要课题. 本书主要讲述高维空间的拟正则映射理论、Beltrami 方程组以及相关$\mathcal{A}$-调和方程的若干问题. 内容包括预备知识、拟正则映射、Beltrami 方程组、$\mathcal{A}$-调和方程等. 书中大部分内容是作者及其合作者近年来的研究成果.

本书适合高等学校数学与应用数学专业的本科生、研究生、教师及相关专业的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

拟正则映射与$\mathcal{A}$-调和方程/高红亚，褚玉明著. —北京：科学出版社，2013.3

ISBN 978-7-03-036777-8

Ⅰ. ①拟… Ⅱ. ①高… ②褚… Ⅲ. ①正则映射–研究②次调和函数–研究 Ⅳ. ①O174.52②O174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 036527 号

责任编辑：王丽平 李梦华／责任校对：赵桂芬
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张：14 1/4
字数：280 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高维空间的几何函数论主要考虑单复变函数论中的几何与函数论性质在 $\mathbf{R}^n$ 空间，或更一般的 Riemann 流形上的推广. 这种推广目前仍为人们所关注，主要原因是它在研究过程中的新思想、新方法和得到的新结果在其他领域中有应用价值，而且这种应用是本质的、重要的.

复变函数论在力学、物理学以及工程技术中有着重要的应用. 如何拓广它的应用范围一直是人们关注的. 单叶解析函数在平面上的一个自然的拓广为平面上的拟共形映射，它作为平面上 Beltrami 方程的同胚解，已经被 Ahlfors 和 Bojarski 等数学家研究. 拟正则映射去掉了拟共形映射的同胚性要求. 早在 20 世纪五六十年代，平面上的拟正则映射理论已经被研究，主要结果是平面上 Beltrami 方程的任何解，都可以表示为一个解析函数与一个拟共形映射的复合. 这样，解析函数恰好是伸张系数为 1 的二维拟正则映射. 另外，Liouville 定理断言，非常数的 1- 拟正则映射是 Möbius 变换，即空间的共形映射非常少. 因此，研究空间拟共形映射与拟正则映射是必要的. 空间拟正则映射与平面拟正则映射在研究方法上有很大的不同，需要较多用到其他数学分支的理论与方法. 空间拟正则映射的研究需要用模与模不等式方法、偏微分方程、Sobolev 空间、微分几何、调和分析等多个学科的方法与结果. 反过来，拟正则映射的研究方法也对这些分支的研究与发展提供新的思路. 例如，Gehring 在拟共形映射理论研究中得到的逆 Hölder 不等式 (Gehring, 1973)，现在已被应用于偏微分方程的正则性理论研究；n 维空间拟共形映射理论已被应用于具有广义导数的函数理论 (Vodopyanov et al., 1975, 1976, 1980) 和具有常负曲率的紧 Riemann 空间 (Mostow, 1968). 这说明，空间拟正则映射的研究具有广泛的应用前景.

空间拟正则映射的研究也具有物理、力学意义. 例如，拟共形映射和拟正则映射与力学中的有限变形有内在联系 (Fang, 1997).

20 世纪 60 年代末，苏联数学家 Reshetnyak 开始了空间拟正则映射 (Reshetnyak 称为具有有界伸张的空间映射) 理论的研究，建立了空间拟正则映射的离散性和开集性等重要性质，见 Reshetnyak(1989) 的专著. 稍后的几年里，Martio 等 (1969, 1970, 1971) 利用研究拟共形映射的传统方法，即曲线族的模和模不等式等方法，建立了高维空间拟正则映射的正规族理论、值分布理论等. 空间拟正则映射是 Beltrami 方程组的广义解，而 Beltrami 方程组的强非线性、超定性、非一致性给研究工作带来了极大的困难. 20 世纪 90 年代初，Iwaniec(1992), Martin 等 (1993) 在

Donalson 等 (1989) 工作的基础上, 将奇异积分的 Calderón-Zgymund 理论、微分几何中的 Hodge 分解 (现称为 Iwaniec-Hodge 分解) 理论、Grassman 代数和 Sobolev 空间的分析方法引入空间拟正则映射的研究, 建立了偶数维及任意维数下拟正则映射的正则性与可去奇异性等结果, 取得了突破性进展, 并使得拟正则映射的理论与应用问题的研究成为当代国际热门课题.

空间拟正则映射属于多个分支的交叉学科, 它的研究需要综合用到基础数学中许多学科的研究方法与结果. 平面情形下的拟正则映射理论, 经过 Ahlfors、Bojarski、Gehring 等数学家几十年的研究, 使得这一方向的诸多研究结果以相当完美的形式出现. 空间拟正则映射的研究刚刚开始, 可以预见, 这一方向有良好的发展前景.

本书主要讲述高维空间的拟正则映射与 $\mathcal{A}$- 调和方程的近期进展. 全书共分 4 章: 第 1 章是预备知识, 主要介绍 Sobolev 空间、外代数、外微分形式和一些常用的引理; 第 2 章讲述拟正则映射理论, 包括拟正则映射、弱拟正则映射以及退化的拟正则映射等; 第 3 章是与拟正则映射理论密切相关的高维空间的 Beltrami 方程组; 第 4 章介绍 $\mathcal{A}$- 调和方程及障碍问题的近期进展.

本书的大部分内容是作者及合作者近年来的研究成果, 同时参考了其他作者的文献. 本书稿曾作为研究生的选修课在河北大学使用过. 由于本书是从大量的文献中整理出来的, 书中出现疏漏和不足在所难免, 作者真诚地欢迎读者批评指正.

作者感谢上海交通大学方爱农教授多年来的指导与帮助. 感谢审稿专家提出的有益建议. 本书整理过程中得到了乔金静博士的帮助, 一并致谢.

高红亚 褚玉明

2012 年 8 月 31 日

目 录

第 1 章　预 备 知 识

作为预备知识, 本章讲述一些本书中常用的函数空间和 Sobolev 空间的基本知识、外代数和外微分形式以及一些常用的引理. 重点放在第 2~4 章将要用到的一些结论上. 函数空间与 Sobolev 空间的系统理论参见 Adams (1975) 的著作. 外代数和外微分形式的系统理论参看陈省身等 (2002) 的著作.

1.1　Hölder 空间与 L^p 空间

1.1.1　一些记号

记 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 为 n 维 Euclid 空间. 两个向量 $x=(x_1, \cdots, x_n), y=(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ 的内积记为 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. 向量 x 的模为 $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. 记 $e_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 为 $\mathbf{R}^n$ 中的标准正交基.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的集合. 定义函数

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

为集合 Ω 的特征函数. 若 Ω 为可测集, 则记 $|\Omega|$ 为 Ω 的 n 维 Lebesgue 测度.

函数 $f: \Omega \to \mathbf{R}$ 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}(f) = \Omega \cap \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

用 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上具有紧支撑的无穷次可微函数 $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 所形成的代数. 引入 n 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 这里 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是非负整数, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. α 次微分算子为

$$\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

D^α 可作用于充分光滑的函数上. 约定 $0 = (0, \cdots, 0)$ 为 0 重指标, D^0 为恒等算子. 当 k 为非负整数时, 记 $D^k = \{D^\alpha\}_{|\alpha|=k}$.

对 $x \in \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$, 定义 x 到 A 的距离为

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|.$$

A 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(A)=\sup_{x,y\in A}|x-y|.$$

对任意 $A,B\subset\mathbf{R}^n$, A 与 B 的距离为

$$\operatorname{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|.$$

设 $r>0$, $x\in\mathbf{R}^n$. 分别用

$$B(x,r)=B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|<r\},$$

$$\overline{B}(x,r)=\overline{B}_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|\leqslant r\}$$

和

$$S(x,r)=S_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|=r\}$$

表示以 x 为心, 以 r 为半径的球、闭球和球面.

下面计算 $\mathbf{R}^n$ 中单位球 $B(0,1)$ 的体积 Ω_n 和单位球面 S_n 的表面积 ω_n, 这两个值在本书中会经常用到. 考虑函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2},\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

因为函数 $f(x)$ 只与 $|x|$ 有关, 所以引入球坐标: $x_1'=\cos\varphi_1$, $x_2'=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$, $\cdots$, $x_{n-1}'=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$, $x_n'=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$, 这里 $0\leqslant\varphi_k\leqslant\pi(k=1,2,\cdots,n-2)$, $0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi$, $x'=(x_1',x_2',\cdots,x_{n-1}')\in S_n$. 设 $r=|x|$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}(\sin\varphi_1)^{n-2}\cdots\sin\varphi_{n-2}r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi_1\cdots\mathrm{d}\varphi_{n-1}\\
=&\frac{1}{2}\omega_n\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{n/2-1}\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{2}\omega_n\Gamma\left(n/2\right).
\end{aligned}$$

又因为

$$\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x=\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_k^2}\mathrm{d}x_k=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n=\pi^{n/2},$$

所以

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)}.$$

此外,

$$\Omega_n = \int_{|x|\leqslant 1} \mathrm{d}x = \int_{S_n}\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x' = \frac{\omega_n}{n},$$

于是

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

这里利用了 $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m),\ m>0$.

1.1.2 Hölder 空间

记 $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ 为所有在 Ω 上连续的函数的全体. 设 k 为非负整数, 可能为无穷, $m\geqslant 1$ 为整数. 记

$$C^k(\Omega) = \{f:\Omega\to\mathbf{R} : \partial^\alpha f\in C^0(\Omega), 0\leqslant|\alpha|\leqslant k\}.$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega)\cap\{f:\mathrm{supp}f \text{ 紧, 且} \subset\Omega\}.$$

$$C^k(\Omega,\mathbf{R}^m) = \{f=(f^1,\cdots,f^m):\Omega\to\mathbf{R}^m : f^i\in C^k(\Omega), i=1,\cdots,m\}.$$

设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为给定的函数. 若 $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足下列条件:

(1) ω 非减;

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+}\omega(t)=0$;

(3) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\omega(|x-y|). \tag{1.1.1}$$

则称 ω 为 f 的连续模.

若 $\omega(t)=Kt^\alpha,\ 0<K<\infty,\ 0<\alpha\leqslant 1$, 则称 f 满足具有常数 K 和指数 α 的 Hölder 条件. 此时

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|^\alpha. \tag{1.1.2}$$

当 $\alpha=1$ 时, 称 f 满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件.

用符号 $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m),\ 0<\alpha\leqslant 1$, 表示所有满足指数为 α 的 Hölder 条件的映射 $f:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 的集合. 即

$$C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m) = \{f:|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|^\alpha\}.$$

称映射 f 属于 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)$, 其中, $k\geqslant 1$ 为整数, $0<\alpha\leqslant 1$, 若 $f\in C^k(\Omega,\mathbf{R}^m)$, 且 f 的所有小于等于 k 阶的偏导数属于 $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^n)$. 即

$$C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m) = \{f:\partial^\alpha f\in C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m), 0\leqslant|\alpha|\leqslant k\}.$$

$C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ 在范数

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)} = \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha f(x)| + \sup_{|\alpha|=k}\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

下成为 Banach 空间.

1.1.3　L^p 空间

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. $L^p(\Omega)$ 定义为在 Ω 中的所有 p 次可积的可测函数 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 的集合, 即

$$L^p(\Omega)=\left\{f(x):\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

而

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)=\left\{f(x):\int_V|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty,\forall V\subset\subset\Omega\right\},$$

即 Ω 中所有局部可积的函数的集合. 这里 $V\subset\subset\Omega$ 意味着 $\overline{V}\subset\Omega$.

当 $1\leqslant p<\infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{1.1.3}$$

给出, 当 $p=\infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{\infty,\Omega}=\mathrm{ess\,sup}_\Omega|f(x)| \tag{1.1.4}$$

给出. 在不至于引起混淆的情况下, $\|f\|_{p,\Omega}$ 简写成 $\|f\|_p$.

当 f 是向量或矩阵时, 仍用式 (1.1.3), 式 (1.1.4) 表示 f 的 p 范数, 这里 $|f(x)|$ 理解为向量或矩阵的范数. 例如, $f=(f^1,f^2,\cdots,f^m)$ 时,

$$|f|=\left(\sum_{i=1}^m|f^i|^2\right)^{1/2}.$$

此时式 (1.1.3) 成为

$$\|f\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^m|f^i|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

严格来说, $L^p(\Omega)$ 中的元素不是函数, 而是函数的等价类. 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 称为等价的, 如果除去一个零测集外它们相等.

设 $a,b>0$, p,q 为 Hölder 共轭的, 即 $p,q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 引入文献 (Zimer, 1989) 中的不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

取 $\varepsilon>0$. 将上面不等式中的 a 换为 $\varepsilon^{1/p}a$, b 换为 $\varepsilon^{-1/p}b$, 就得到 Young 不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}b^q}{q}. \tag{1.1.5}$$

当 $p=q=2$ 时式 (1.1.5) 即为 Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2. \tag{1.1.6}$$

设 $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p\geqslant 1$, 则有 Hölder 不等式

$$\int_\Omega fg\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p\|g\|_q. \tag{1.1.7}$$

当 $p=q=2$ 时, Hölder 不等式成为 Schwarz 不等式

$$\int_\Omega fg\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

L^p 空间中的三角不等式, 即 Minkowski 不等式, 叙述如下: 设 $f,g\in L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, 则

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p.$$

引入函数 f 在 Ω 上的积分平均

$$f_\Omega = \fint_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1.8}$$

由 Hölder 不等式可以推出: 当 $1\leqslant p\leqslant q$, $|\Omega|<\infty$ 时,

$$\left(\fint_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\fint_\Omega |f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \tag{1.1.9}$$

事实上, 由 Hölder 不等式推出

$$\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^{p\cdot\frac{q}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_\Omega \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{q}} = |\Omega|^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_\Omega |f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}.$$

两端除以 $|\Omega|$ 并开 p 次方, 得到不等式 (1.1.9).

因此, 如果用

$$[f]_p = |f|_\Omega = \left(⨍_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

表示 f 的 L^p 范数, 则 $p \mapsto [f]_p$ 非减.

Hölder 不等式可以推广到 k 个函数情形. 设 $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 且 $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_k} = 1$. 则有

$$\int_\Omega f_1 f_2 \cdots f_k \mathrm{d}x \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

上式两端同除以 $|\Omega|$ 得

$$⨍_\Omega f_1 f_2 \cdots f_k \mathrm{d}x \leqslant [f_1]_{p_1} [f_2]_{p_2} \cdots [f_k]_{p_k}.$$

设 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$, $u \in L^r(\Omega)$. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 取 $\alpha = \lambda q$, $\beta = (1-\lambda) q$. 由 Hölder 不等式 (1.1.7) 得

$$\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^\alpha |f|^\beta \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{\alpha y} \mathrm{d}x\right)^{1/y} \left(\int_\Omega |f|^{\beta z} \mathrm{d}x\right)^{1/z},$$

这里 $y = \dfrac{p}{\lambda q}$, $z = \dfrac{r}{(1-\lambda) q}$. 由此推出

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}. \tag{1.1.10}$$

显然当 $\lambda = 0, 1$ 时, 式 (1.1.10) 也成立.

称函数 $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸的, 若对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\Phi[(1-t)x_1 + t x_2] \leqslant (1-t)\Phi(x_1) + t\Phi(x_2).$$

若 $\Phi(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 凸, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界可测, $f \in L^1(\Omega)$, 则有 Jensen 不等式

$$\Phi\left(⨍_\Omega f(x) \mathrm{d}x\right) \leqslant ⨍_\Omega \Phi[f(x)] \mathrm{d}x.$$

当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间; 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 它是可分的; 当 $1 < p < \infty$ 时, 它是自反的, 此时 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间为 $L^q(\Omega)$, 其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1.2 Schwartz 分布与 Sobolev 平均核

1.2.1 Schwartz 分布

分布或广义函数的概念是由物理学家 Dirac 和 Schrödinger 于 1933 年首次使用, 1936 年 Sobolev 以明确的现在所接受的形式提出.

定义 1.2.1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, $\mathbb{V}$ 是有限维内积空间. 称定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上取值于 $\mathbb{V}$ 中的线性泛函

$$f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{V}$$

为 Schwarz 分布, 简称分布, 若对于每个 $X \subset\subset \Omega$ 和任意的试验函数 $\varphi \in C_0^\infty(X)$ 都有估计

$$|f[\varphi]| \leqslant C(X) \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup|\partial^\alpha \varphi|. \tag{1.2.1}$$

所有定义在 Ω 上取值于 $\mathbb{V}$ 的分布构成的空间记为 $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$.

一般地, 式 (1.2.1) 中的整数 k 依赖于 X. 否则, 称 f 在 Ω 中具有有限阶, 使式 (1.2.1) 成立的最小整数 k 称为 f 在 Ω 上的阶. $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$ 与 $\lambda \in C^\infty(\Omega)$ 的乘积定义为 $(\lambda f)[\varphi] = f[\lambda\varphi]$.

设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{V})$. 定义

$$f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2.2}$$

对任意 $X \subset\subset \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(X)$, 有

$$|f[\varphi]| = \left| \int_\Omega \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x \right| = \left| \int_X \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \|f\|_{1,X} \sup|\varphi|.$$

这样, f 为 Ω 上的零阶分布. 因此

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{V}) \subset \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V}).$$

定义 1.2.2 称 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{V})$ 中的函数为正则分布.

对于 Dirac delta 函数 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 有 $\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$. 它是零阶分布, 但不是正则分布.

定理 1.2.1 $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{V})$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$ 中稠密.

证明 见文献 (Iwaniec et al., 1993)中的引理 4.1.1.

1.2.2 Sobolev 平均核

Sobolev 空间理论中经常用到平均核的概念.

定义 1.2.3 函数 $\omega:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为平均核, 若 ω 在 $\mathbf{R}^n$ 是有界可积的, 其支撑含于球 $\overline{B}(0,1)$, 且

$$\int_{\mathbf{R}^n}\omega(x)\mathrm{d}x=1. \tag{1.2.3}$$

平均核 ω 称为 Sobolev 平均核, 若 ω 非负且属于 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

例 1 取

$$\omega_1(x)=\begin{cases} c_1(n)\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

这里选择 $c_1(n)$ 使 $\omega_1(x)$ 满足式 (1.2.3). $\omega_1(x)$ 为 Sobolev 平均核.

例 2 取 $\omega_2(x)=c_2(n)\varphi\left(|x|^2-\dfrac{1}{4}\right)$, 这里

$$\varphi(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^{1/t}, & t<0,\\ 0, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

选择 $c_2(n)$ 使 $\omega_2(x)$ 满足式 (1.2.3). $\omega_2(x)$ 为 Sobolev 平均核.

1.3 Sobolev 空间与嵌入定理

1.3.1 Sobolev 空间的定义

对于 $f\in C^\infty(\Omega,\mathbb{V})$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 成立分部积分公式

$$\int_\Omega\varphi(\partial^\alpha f)=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega(\partial^\alpha\varphi)f.$$

当 $f\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{V})$ 时, 定义

$$(\partial^\alpha f)[\varphi]=(-1)^{|\alpha|}f[\partial^\alpha\varphi].$$

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为区域, $\mathbb{V}$ 是有限维内积空间, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k=1,2,\cdots$. 定义 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{V})$ 由下面的分布组成: $f\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{V})$, 且 $\partial^\alpha f(|\alpha|\leqslant k)$ 能够由 $L^p(\Omega,\mathbb{V})$ 中的函数表示.

Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{V})$ 中的范数为

$$\|f\|_{k,p}=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega|\partial^\alpha f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \displaystyle\max_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_\infty, & p=\infty.\end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中, $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{V})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 在上述范数下是 Banach 空间.

局部 Sobolev 空间 $W^{k,p}_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{V})$ 定义为

$$W^{k,p}_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{V})=\{f:f\in W^{k,p}(\Omega',\mathbb{V}),\forall\Omega'\subset\subset\Omega\}.$$

空间 $W^{k,p}_0(\Omega,\mathbb{V})$ 定义为 $C_0^\infty(\Omega,\mathbb{V})$ 相对于范数 (1.3.1) 的闭包. $W^{k,p}_0(\Omega,\mathbb{V})$ 也可说成在 Sobolev 意义下边界值为零.

定理 1.3.1 $C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbb{V})$ 在 $W^{k,p}_{\rm loc}(\mathbf{R}^n,\mathbb{V})(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 中稠密.

1.3.2 嵌入定理

定义 1.3.1 称区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为关于球 $B(a,r)\subset\Omega$ 的星形区域, 如果对任意 $x\in\Omega$ 和 $y\in B(a,r)$, 有 $[x,y]\subset\Omega$. 称 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为 S 类区域, 如果 Ω 有界, 且可表示为关于某个球的有限个星形区域的并集.

显然, $\mathbf{R}^n$ 中的球、方体和任何开凸集为星形区域.

定义 1.3.2 连续线性泛函 $L:W^{1,p}(\Omega)\to\mathbf{R}(p\geqslant 1)$ 称为投影, 如果当 $f\equiv 1$ 时, $L(f)=1$.

例 1 设 $f\in W^{1,1}(\Omega)$, 则由

$$L(f)=f_\Omega=\fint_\Omega f\mathrm{d}x$$

定义的连续线性泛函 $L:W^{1,1}(\Omega)\to\mathbf{R}$ 为投影算子.

例 2 设 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 且 $\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x=1$. 对 $f\in W^{1,1}(\Omega)$, 由

$$L_\varphi(f)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

定义的连续线性泛函 $L_\varphi:W^{1,1}(\Omega)\to\mathbf{R}$ 为投影算子.

以下取 $\mathbb{V}=\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$. 下面的 3 个定理可在 Martio 等 (1969, 1970, 1971) 的文章中找到.

定理 1.3.2 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为 S 类区域, $1\leqslant p\leqslant n$. 取

$$q\begin{cases}<\dfrac{n}{n-p}, & p<n,\\ \text{为任意数}, & p=n.\end{cases}$$

则 $W^{1,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, 且存在常数 $C_1=C_1(n,p,q,\Omega)$ 使得对任意函数 $f\in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|f\|_{q,\Omega}\leqslant C_1\|\nabla f\|_{p,\Omega}.$$

对任一投影连续泛函 $L:W^{1,p}(\Omega)\to\mathbf{R}$,

$$\|u-Lu\|_{q,\Omega}\leqslant C_2\|\nabla u\|_{p,\Omega},\tag{1.3.2}$$