代　　数

二

高級中學課本 代數第二冊目錄

習 題 目 錄

本書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學8——10年級代數教科書編譯的. 原書爲蘇聯吉西略夫(А.П.КИСЕЛЁВ)所著, 1949年,莫斯科出版.

第四章　不等式

I　一次不等式

63. 引言　在比較兩數的大小時，我們常用‘大於’和‘小於’的說法(參照初中代數 § 24)，這兩種說法所代表的意義是：若 a 大於 $b(a>b)$，則 $a-b$ 的差是正數；若 a 小於 $b(a<b)$，則 $a-b$ 的差是負數.

64. 不等式的基本性質　兩數或兩代數式之間，用不等號 $>$ 或 $<$ 聯結起來所組成的式子叫做不等式. 不等式被不等號分爲兩部分，卽左邊和右邊.

以文字 a 和 b 分别代表不等式的左邊和右邊，則不等式的基本性質如下：

1) 若 $a>b$，則 $b<a$；例如：$-2>-3$，$-3<-2$.

2) 若 $a>b$ 和 $b>c$，則 $a>c$；例如：$-2>-3$ 和 $-3>-4$，此時 $-2>-4$.

3) 若 $a>b$ 和 $c=d$，則 $a+c>b+d$ 和 $a-c>b-d$；卽不等的兩個數同時加上或減去相等的數，不等號不變（卽大數仍大）；例如：$2>-3$；兩邊加上或減去 -10，可得：

$$2+(-10)>-3+(-10)，卽\ -8>-13;$$

$$2-(-10)>-3-(-10)，卽\ 12>7.$$

4) 若 $a>b$ 和 $c>d$，則 $a+c>b+d$；

同樣，若 $a<b$ 和 $c<d$，則 $a+c<b+d$.

例如，有二不等式：$-7>-10$ 和 $-3>-4$，相加可得 $-10>-14$.

若 $2<8$ 和 $-4<-2$，相加可得 $-2<6$.

5) 若 $a>b$，而 $c<d$，則 $a-c>b-d$；若 $a<b$，而 $c>d$，則 $a-c<b-d$.

例如:

$$-\begin{cases}-8>-10\\ \ \ 2<\ \ 3\end{cases}\quad\overline{-10>-13};\qquad -\begin{cases}7<\ \ 12\\ 8>-\ 2\end{cases}\quad\overline{-1\ \ <14}.$$

如果二不等式中的不等號相同,或同爲>或同爲<,則此二不等式是同向不等式;如果二不等式中的不等號相反,一式爲>而他式爲<,則此二不等式是異向不等式. 由此,第四和第五性質又可敍述如下:

同向的二不等式,可以相加,而不等號不變;異向的二不等式可以相減,所得式的不等號,與被減式的不等號相同.

6) 若 $a>b$, 且 m 爲正數, 則 $am>bm$; $a\div m>b\div m$.

不等式兩邊用同一正數去乘或除,不等號不變.

例如,以 $+4$ 乘不等式 $-5>-7$ 的兩邊,則得不等式 $-20>-28$; 以 $+4$ 除不等式 $-5>-7$ 的兩邊,則得不等式 $-\frac{5}{4}>-\frac{7}{4}$.

7) 若 $a>b$, 且 m 爲負數,則 $am<bm$; $a\div m<b\div m$.

不等式的兩邊用同一負數去乘或除不等號變爲反向.

例如,用 -1 乘不等式 $-5>-7$ 的兩邊,則得不等式 $5<7$.

65. 關於不等式的問題 關於含有文字不等式的問題(如同等式一樣),可分爲以下兩類:

1) 解含有未知數的不等式,也就是求出未知數在怎樣的數值條件下能滿足於這不等式.

2) 證明不等式的成立, 卽在式中文字的一切可能數值範圍內, 最低限度要在題設文字所代表的數值範圍內,來證明不等式的正確性.

解這兩類問題,須根據不等式的幾種性質,這與解方程時須根據方程的性質相同.

66. 同解不等式 若兩個不等式含有同一未知數,且能滿足於其中一個不等式的未知數之所有數值也必滿足於他一個不等式時,這樣的兩個

不等式,叫做同解不等式,例如 $3x+2<x+10$ 和 $3x<x+8$ 就是同解不等式,因爲以小於 4 的任何數值代替 x,兩個不等式都正確,而除此以外,兩式各自也沒有其他的解.

現在證明一些關於同解不等式的定理,這些定理和同解方程的同類定理極相似.

67. 定理 1. 若在不等式(含有未知數的)的兩邊加上(或減去)相同的數,則得一與其同解的不等式.

設含有未知數的不等式的左邊爲 A,右邊爲 B,又 m 爲任意一數;現在來證明下列二式爲同解不等式:

$$A>B, \tag{1}$$

$$A+m>B+m. \tag{2}$$

假設當不等式(1)中的文字取某些數值時成立.也就是取這些數值中的任一個代替不等式(1)中的文字,則數值 A 大於數值 B;但此時,根據 §64 基本性質 3),當式中文字取上述數值中的任一個時,都能得到數值 $A+m$ 的和大於數值 $B+m$ 的和,因爲在不等式的兩邊,同時加上相等的數,其不等號不變.這也就是說,不等式(1)的所有解都滿足不等式(2).

反之,如果當式中文字取某些數值中的任一個時,數值 $A+m$ 的和大於數值 $B+m$ 的和,則當式中文字取這些數值中的任一個時,數值 A 大於數值 B(在不等式的兩邊同時都加上 $-m$,其不等號不變);所以不等式(2)的所有的解都滿足於不等式(1).也就是這兩個不等式同解.

因爲減法可以看作正負相反的數的加法,所以不等式的兩邊,各減同一數時,則得一與其同解的不等式.

推論:不等式內的任意一項,可由不等式的一邊移到另一邊,但須改變該項的符號.

例如,在不等式 $A>B+C$ 的兩邊,各加 $-C$,即得 $A-C>B$.

68. 定理 2 若將不等式(含有未知數)的兩邊用同一正數去乘(或

除),則得一與其同解的不等式.

現在證明下列二式爲同解不等式:

$$A>B, \tag{1}$$

$$Am>Bm, \tag{2}$$

式中 m 僅爲正數.

假設,當式中各未知數取某組數值時,數值 A 大於數值 B; 則當式中各未知數仍取這組數值時,必能得到數值乘積 Am 大於數值乘積 Bm, 因爲不等式的兩邊,用同一正數去乘時,其不等號不變. 也就是,不等式(1)的所有解都滿足於不等式(2).

反之,如果當式中各文字取某組數值時, 數值 Am 大於數值 Bm, 則當式中各文字仍取這些數值時,必能得到數值 A 大於數值 B, 因爲不等式的兩邊用同一正數去除時,其不等號不變.

〔注意〕 根據以上的證明,允許用來乘或除不等式兩邊(使其不等號不變)的正數,其形式可爲文字式,並且其中也可以含有該不等式中含有的未知數. 但此時須特別注意,我們用來乘或除不等式兩邊的文字式,當其中文字取其所有的數值時,都必須爲正數.

例如,用$(x-5)^2$乘不等式 $A>B$ 的兩邊;

$$A>B \tag{1}$$

$$A(x-5)^2>B(x-5)^2 \tag{2}$$

因式$(x-5)^2$,除去 $x=5$ 以外,代入 x 的任何數值皆爲正數. 也就是,如果不等式(1)的解內不含有 $x=5$ 時,則不等式(1)與(2)同解;反之,不等式(2)的所有解雖然都滿足不等式(1),但在不等式(1)的解內較不等式(2)的解多了一個解 $x=5$ (這個解不滿足不等式(2),否則此時不等式(2)就變成等式).

推論: 若在不等式的兩邊,各含有一正量公因式時,則可用此因式除不等式的兩邊.

原书缺页

原
书
缺
页

$$x>\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

若 $a-a_1<0$，便得

$$x<\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

由此知解一元一次不等式時，就是要求出未知數的數值界限，這些數值的界限可以用上限($x<m$)表示，或用下限($x>m$)表示.

〔例題〕 試解不等式：$2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$.

脫去括號：

$$4x^2-10x-27<4x^2+4x+1.$$

移項整理：

$$-14x<28.$$

用 -14 除不等式的兩邊：

$$x>-2.$$

72. 一元一次聯立不等式 設有以下聯立不等式：

$$\begin{cases} ax+b>a'x+b', \\ cx+d>c'x+d'. \end{cases}$$

這兩個不等式，可分別求解，各解有其一定的界限，分以下三種情形討論：

1) 同向的界限. 這時可根據題意取其中之一適當者作爲解，例如：$x>7$ 和 $x>12$，則只取 $x>12$，因爲如若 $x>12$，則必然 $x>7$. 再舉一例：$x<5$ 和 $x<8$ 則只取 $x<5$ 卽可，因爲若 $x<5$ 則必 $x<8$.

2) 異向的界限. 例如：$x>10$ 和 $x<15$，在此情形下，不等式的解，是在 x 的兩個界限的中間.

3) 互相矛盾的界限. 例如：$x<5$ 和 $x>7$. 在此情形下，沒有解.

〔例題〕 試解兩個不等式：$0.3x+5<0.5x$ 和 $5x<60+2x$. 解第一不等式得 $x>25$，第二不等式得 $x<20$. 因此，若這兩個不等式是由同一個

問題的條件得來的，則這問題沒有解.

練　習

試解以下各不等式:

107. $x-7<2x+5$; $9x-8+3(x-2)<2(x+3)$.

108. $\frac{2}{5}x+4>x-\frac{1}{2}$; $x+2b<16-3(x-2b)$.

109. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab}$; $10-\frac{5x}{2}>0$.

110. 若 $a>b$ 和 $c=d$, 是否永遠 $ac>bd$?

111. 若 $a>b$, 是否永遠 $a^m>b^m$?

112. 若 (1) $ab>0$, 或 (2) $ab<0$, 關於 a 和 b 能有什麼結論?

113. 若在 $\frac{a}{b}$ 的分子和分母上加以相同的正數時，則在什麼條件下其分數值增加（a 和 b 皆爲正數）?

第五章　級數

I　等差級數

73. 問題　欲掘一井，計劃在第一米時給工資三千元，第二米給五千元，這樣繼續，每米增加兩千元，若掘井十米需付出工資多少？

爲解此題，須求下列各數的和：

$$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21.$$

欲求此和，我們可用比普通加法較簡便的方法．設和爲 S，便可寫出以下二式：

$$S=3+5+7+9+11+13+15+17+19+21,$$

$$S=21+19+17+15+13+11+9+7+5+3.$$

第二列與第一列的各數完全相同，僅順序相反；因此，其和相等．加此二式得：

$$2S=24+24+24+24+24+24+24+24+24+24,$$

即　$$2S=24\times10=240,$$

所以　$$S=\frac{240}{2}=120.$$

故知全工程應付出工資 12 萬元．

在此題中我們得到一列數，由第二數起每個數以相同的數遞增，這樣的一列數叫做等差級數或算術級數．

74. 定義　等差級數是一列數，由第二數起，每個數都等於其前一數加上同一常數（正或負）．

例如，兩列數：10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46 和 6, 4, 2, 0, −2, −4, −6 各組成一等差級數，因爲由第二數起其中的每個數，都等於其前

有些書裏用 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 表示級數的各項，用 r 表示公差．

一數加上同一常數，此常數在第一列是正數 4，在第二列是負數 -2.

組成等差級數的每個數叫做項. 欲求級數的某一項時，須在其前一項上加上一個或正或負的常數，此常數叫做等差級數的公差.

由級數的首項起遞增的級數叫做遞升級數，遞減的級數叫做遞降級數，遞升級數的公差是正數；遞降級數的公差是負數.

通常，等差級數的首項用 a、末項用 l、公差用 d、全部項數用 n 與全部項數之和用 S 表示.

75. 等差級數任意項的公式

設有等差級數：10, 14, 18,（公差為 4）.

則第 2 項 $=10+4=14$;

第 3 項 $=10+4+4=10+4\times 2=18$;

第 4 項 $=10+4+4+4=10+4\times 3=22$, 等等.

所以

第10項 $=10+4\times 9=46$;

第20項 $=10+4\times 19=86$, 等等.

又設有等差級數：6, 4, 2, ……（公差為 -2），則得

第 2 項 $=6+(-2)=4$;

第 3 項 $=6+(-2)+(-2)=6+(-2)\times 2=2$, 等等.

所以

第10項 $=6+(-2)\times 9=-12$.

一般的，設有等差級數 $a, b, c, \cdots\cdots$（公差為 d）. 則得

第 2 項 $=a+d$;

第 3 項 $=a+d+d=a+2d$;

第 4 項 $=a+d+d+d=a+3d$, 等等.

所以，第 10 項是 $a+9d$, 第 15 項是 $a+14d$, 一般的，第 m 項是 $a+d(m-1)$，故得：

等差級數的每項等於其首項加上公差乘其前一項的項數.

等差級數的末項等於其首項加上全部項數減 1 與公差之積,

即:

$$1 = a + d(n-1). \qquad (1)$$

〔例題 1〕 試求等差級數 60, 75, 90, …… 的第 10 項.

因爲公差是 15, 所以第 10 項是

$$60 + 15 \times 9 = 195.$$

〔例題 2〕 試求等差級數 40, 37, 34, …… 的第 12 項.

因爲公差是 −3, 所以第 12 項是

$$40 + (-3) \times 11 = 40 - 33 = 7.$$

〔例題 3〕 求奇數等差級數 1, 3, 5 …… 的第 n 項.

因爲公差是 2, 所以第 n 項等於

$$1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

推論: 若等差級數的首項爲 a, 公差爲 d, 全部項數爲 n, 則等差級數可以表示如下:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots, a+d(n-1).$$

76. 等差級數各項和的公式 我們先討論以下等差級數的性質:

在等差級數中, 與兩端等距的二項之和, 等於首項加末項.

例如在等差級數 3, 7, 11, 15, 19, 23 中:

$$3 + 23 = 26; \qquad 7 + 19 = 26; \qquad 11 + 15 = 26.$$

這是因爲: 這些和的第一加數 (即 3, 7, 11) 逐次增以 4, 而第二加數 (即 23, 19, 15) 逐次減以 4; 所以每對的和都相等.

又如在遞降等差級數 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4 中:

$$8 + (-4) = 4; \qquad 6 + (-2) = 4; \qquad 4 + 0 = 4.$$

2 是當中的一項, 其本身與兩端等距, 故得 2 + 2 = 4. 每個和不變的原因與上相同: 加數 8, 6, 4, 2 逐次減以 2, 而加數 −4, −2, 0, 2 逐次增

以 2.

現在我們研究任意等差級數各項和的公式．根據 § 73 問題中的求和的方法也可求出任意等差級數各項之和．我們可寫出下列二等式:

$$S=a+b+c+\cdots\cdots+i+k+l,\ (\text{項數爲 } n)$$

$$S=l+k+i+\cdots\cdots+c+b+a.$$

相加,得

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\cdots\cdots$$
$$+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

但知

$$a+l=b+k=c+i=\cdots\cdots=l+a,$$

所以

$$2S=(a+l)n,\ \text{由此}\ S=\frac{(a+l)n}{2} \qquad (2)$$

等差級數所有項的和,等於首末兩項的和與項數乘積的一半.

因此,在 § 73 的例題中,若用此公式求和,則與用前法求得之和相同,卽:

$$S=[(3+21)\times10]\div2=120.$$

〔例題 1〕 試求自然數由 1 至 n 之和.

自然數 1, 2, 3, ……n, 爲等差級數,其首項是 1, 公差也是 1, 項數是 n, 末項也是 n; 故得

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

如:

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6(6+1)}{2}=21.$$

〔例題 2〕 試求自然數中前 n 個奇數的和.

我們由前一節知,第 n 個奇數等於 $2n-1$; 因此

$$S=\frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2}=n^2.$$