面向21世纪高职高专规划教材

高等数学

（第2版）

程红萍　钟忠銮　主　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪高职高专规划教材

高等数学

（第2版）

程红萍　钟忠銮　主　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据教育部制订的“高职高专数学教学基本要求”，在第1版基础上，由从事多年高职高专高等数学教学工作的一线教师执笔编写.全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法，内容包括函数与极限，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何简介，多元函数微分学，二重积分与曲线积分，无穷级数等.本书共分10章，每章又分若干节，每节都有配套练习题，每章后有自测题，书末附有参考答案并附录预备知识及常用曲线与曲面等内容.

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/程红萍，钟忠銮主编.—2版.—上海：同济大学出版社，2009.6

面向21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5608-4005-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①程…　②钟…　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第050523号

面向21世纪高职高专规划教材

高等数学(第2版)

程红萍　钟忠銮　主编

责任编辑　曹　建　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　24.75

印　　数　1—5100

字　　数　495000

版　　次　2009年6月第2版　　2009年6月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-4005-5

定　　价　35.00元

前　　言

本教材自2006年出版以来，由于它在取材、体系、讲法、可读性等诸方面较为切合当前高职教育教学的改革形势以及高职院校的高等数学教学实际，而被全国许多院校所采用，深受国内高职院校的欢迎，教材使用量逐年上升.几年来，许多专家、学者对本教材给出了许多有益的建议，有的读者对印刷与编写的一些错漏逐一记录并及时反馈，这是对我们工作的鼓励和支持，也是保证再版质量不可或缺的条件.借此再版之机，向关心和支持我们工作的专家、学者和广大读者表示诚挚的感谢！

目前，许多高职院校在高等数学教学改革方面进行了积极探索，各院校特别注重对学生数学素质、计算机应用能力和创新意识的培养，对高等数学教材提出了许多新的要求.基于这些情况，我们在这次再版中，除修正初版中的某些疏漏，如文字、符号、图形外，还订正了部分印刷及习题解答中的错误.在不影响本书原有的体系、结构、格局的前提下，对某些概念表述、内容作了适当的调整，并增加了部分内容，使本书的内容更充实、更合理.例如，考虑到学生对二次曲面比较陌生，在附录中增加了一些常见的二次曲面图形.通过修订，本书质量得到了提高，将更加方便教师教学和学生自学.

这次修订工作由程红萍等人完成.本教材自出版以来深得广大读者和同行的关心支持，在此深表谢意.限于编者水平，书中难免仍有错误和不妥之处，诚恳地希望专家、学者和广大读者批评指正.

编　者

2009年5月

第1版前言

本教材是根据教育部制订的“高职高专数学教学的基本要求”，在总结国内几所学校多年来高职高专有关专业的高等数学课程教学经验的基础上，经过编者认真讨论编写而成的.全书共分10章，主要内容包括函数与极限，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何简介，多元函数微分学，二重积分与曲线积分，无穷级数等.

本书在编写过程中，充分考虑了高职高专教育改革发展的新形势和高职高专培养应用型人才的实际需要，在内容上力求突出其基础性、应用性与工具性，充分体现了它是高职各专业的基础课而不是专业课以及“服务专业，兼顾数学体系”的原则.因而对难度大的基础理论，只给出定理，不追求严格证明，适度注意数学自身的系统性与逻辑性，重点突出基础概念、基本计算和基本知识，致力于培养学生的逻辑思维能力和分析、解决实际问题的能力；对每个概念都给出了产生它的实际背景，每节后面都有配套的习题，每章后都有自测题，书末附有习题和自测题的参考答案.本教材可供高职高专有关专业使用.对于书中带有“*”号的章节，各学校可根据专业教学需要选用.

本书由钟忠銮教授、苏淑真副教授、程红萍老师编写.本书在编写和使用过程中，西安欧亚学院给予了大力支持和帮助，在此深表谢意.

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编　者

2006年8月

目　录

第一章　函数与极限

函数是对事物及变量之间相互制约、相互依赖关系进行的数量描述.函数的概念即是对事物数量特征的抽象和概括.函数是高等数学的主要研究对象,也是高等数学的基本概念.极限是研究变量的一种基本方法,也是高等数学的重要理论工具.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等概念,介绍它们的一些性质以及极限的运算法则等.

第一节　预备知识

一、实数及其几何表示

微积分主要是在实数范围内讨论问题,所以应该熟悉和了解实数的有关概念.

1. 实　数

有理数和无理数统称为实数.

形如$\frac{p}{q}$(p,q 为整数且 $q \neq 0$)的数称为有理数.由于$\frac{p}{q}$可以是整数或分数,所以也可以说整数与分数统称为有理数.有理数一定是有限小数或无限循环小数.

无限不循环小数称为无理数.例如 $\pi \approx 3.1415926$,$\sqrt{2} \approx 1.4142136$ 等.无理数不能表示为$\frac{p}{q}$(p,q 为整数且 $q \neq 0$).

2. 数　轴

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为数轴(图 1-1).

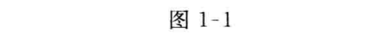

图 1-1

图 1-1 中的数轴也称为 Ox 轴.

3. 实数与数轴

有了数轴之后,任何一个实数几何上均可用数轴上的一个点来表示.反之,

数轴上任何一个点都表示一个实数. 即数轴上的点和实数之间是一一对应的关系.

应当指出的是，实数是稠密的，它充满整个数轴.

以后为方便起见，将实数和它在数轴上对应的点不加区分. 例如，实数 a 也称为点 a.

二、实数的绝对值

1. 实数的绝对值

实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示. 规定正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，即

$$|a|=\begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

例如：$|5|=5$，$|-5|=-(-5)=5$.

显然，实数的绝对值是一个非负数. 几何上，$|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离(图 1-2).

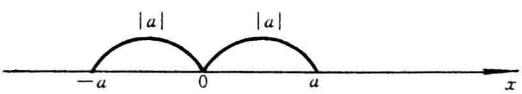

图 1-2

2. 实数绝对值的性质

设 a,b 为任意两个实数，则绝对值有以下性质：

(1) $|a| \geqslant 0$；仅当 $a=0$ 时，有 $|a|=0$.

(2) $|a|=\sqrt{a^2}$.

(3) $|-a|=|a|$.

(4) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

以上几条性质由绝对值的定义不难理解. 上述性质(2) 说明 $\sqrt{a^2}$ 是一个非负数，即为算术平方根. 如 $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$.

除上述性质外，实数绝对值还有以下运算性质：

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$；

$|a-b| \geqslant |a|-|b|$；

$|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$；

$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.

这些运算性质可以根据绝对值的性质加以证明,也可以根据绝对值的定义加以理解.

例 1 化去下列各式中的绝对值符号.

(1) $|x-1|$; (2) $2-|x-2|$.

解 根据绝对值的定义,可以去掉各式中绝对值的符号.

(1) $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x-1\geqslant 0,\\ -(x-1), & x-1<0.\end{cases}$

即 $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$

(2) $2-|x-2|=\begin{cases}2-(x-2), & x-2\geqslant 0,\\ 2-[-(x-2)], & x-2<0.\end{cases}$

即 $2-|x-2|=\begin{cases}4-x, & x\geqslant 2,\\ x, & x<2.\end{cases}$

3. 绝对值不等式

带有绝对值符号的不等式称为绝对值不等式.求解绝对值不等式时,除用到绝对值的定义外,还常用到两个绝对值不等式的等价不等式,它们分别是:

$k>0$ 时,$|a|\leqslant k \Leftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$.

$k>0$ 时,$|a|>k \Leftrightarrow a<-k$ 或 $a>k$.

这两个绝对值不等式的等价不等式由绝对值的定义不难得到,其中“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”.这里所谓等价即相同的意思.

例如,$|a|\leqslant 2 \Leftrightarrow -2\leqslant a\leqslant 2$;$|a|>3 \Leftrightarrow a<-3$ 或 $a>3$.

例 2 去掉 $|x^2-4|$ 中的绝对值符号.

解 $|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & x^2-4\geqslant 0,\\ -(x^2-4), & x^2-4<0.\end{cases}$

即 $|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & |x|\geqslant 2,\\ 4-x^2, & |x|<2.\end{cases}$

即 $|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2,\\ 4-x^2, & -2<x<2.\end{cases}$

例 3 解下列绝对值不等式.

(1) $|2x-1|\leqslant 3$; (2) $|3x-2|>4$; (3) $1<|x-3|<5$.

解 (1) $|2x-1|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant 2x-1\leqslant 3$,得 $-1\leqslant x\leqslant 2$.
所以,不等式的解为 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

(2) $|3x-2|>4 \Leftrightarrow 3x-2<-4$ 或 $3x-2>4$,

得　$x < -\dfrac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

所以,不等式的解为 $x < -\dfrac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

(3) $1 < |x-3| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 1 \\ |x-3| < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < -1 \text{ 或 } x-3 > 1, \\ -5 < x-3 < 5. \end{cases}$

这是一个不等式组,解得 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$. 所以不等式的解为 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$.

三、区间与邻域

具有某种属性的元素 x 的全体称为一个集合,记为 A,x 称为集合的元素,记 $A = \{x \mid x$ 所具有的特征$\}$.

例如,由不等式 $1 \leqslant x \leqslant 5$ 表示的实数集合记为 $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$.

集合也可以用其他大写的英文字母表示. 如果 x 是集合 A 中的元素,记为 $x \in A$. 否则,记为 $x \notin A$ 或 $x \overline{\in} A$.

由全体实数构成的集合记为 **R**,由自然数构成的集合记为 **N**,整数集合记为 **Z**,有理数集合记为 **Q**,无理数集合记为 **W**. 显然 **N**,**Z**,**Q** 及 **W** 都包含于 **R** 内,故它们分别为 **R** 的子集.

1. 区　间

设 a,b 均为实数,且 $a < b$,则称 $\{x \mid a < x < b\}$ 表示的实数 x 的集合为开区间,记为 (a,b). 即 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$.

类似地,称 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为闭区间;$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 以及 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 为半开半闭区间.

以上区间分别如图 1-3(a) ~ (d) 所示.

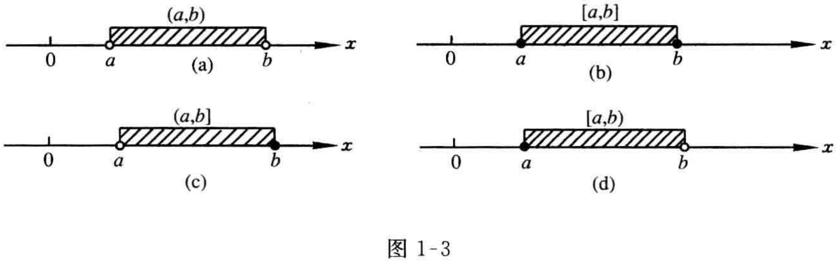

图 1-3

以上区间为有限区间,a 与 b 分别称为区间的端点,右端点与左端点的差 $b-a$ 称为区间的长度. 在讨论问题时,为方便起见也常用 I 表示上述各区间.

引入无穷大的记号 ∞,则以下各区间为无限区间:

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid x > a\}$,

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\} = \{x \mid x \geqslant a\}$,

$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\} = \{x \mid x < b\}$,

$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\} = \{x \mid x \leqslant b\}$,

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,即表示全体实数的集合.

应当注意的是,∞ 是一个记号,并不表示一个很大的数,且不能参与运算.

有了区间的概念之后,不等式或不等式组的解常用区间来表示.

2. 邻　域

设 $\delta > 0$, x_0 是一个实数,称集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$. 即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.
其中,x_0 为邻域的中心,δ 为邻域的半径.

在数轴上,点 x_0 的 δ 邻域表示以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,如图 1-4(a) 所示.

如果 x 在 x_0 的 δ 邻域内变化但不能取 x_0,即 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$,则称此邻域为点 x_0 的去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0, \delta)$, 即 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$,如图 1-4(b) 所示. 相应地,称 $U(x_0, \delta)$ 为点 x_0 的有心邻域.

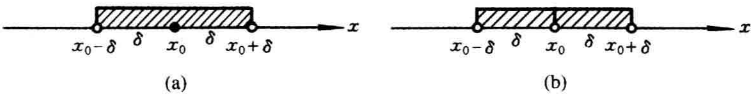

图 1-4

例如,3 的 0.01 邻域,就是满足不等式 $|x - 3| < 0.01$ 的实数 x 的集合,即 $2.99 < x < 3.01$. 也就是开区间(2.99,3.01).

又如,满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的集合,就表示点 -2 的去心邻域,半径也是 0.01. 该邻域即开区间$(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

其中符号 $\cup$ 是集合运算的一种符号,表示两个集合的并集,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

习题 1-1

1. 化去下列各式绝对值的符号.

(1) $|x - 3|$;　　　　(2) $|3x - 7|$;

(3) $1-|x-3|$；　　　　(4) $|16-x^2|$.

2. 用区间表示满足下列不等式的变量 x 的变化范围.

(1) $1 \leqslant x < 3$；　　　　(2) $x^2 < 9$；

(3) $|x-1| > 1$；　　　　(4) $(x-1)(x+2) < 0$；

(5) $|2x+3| \leqslant 1$；　　　　(6) $0 < |x-a| < \delta\ (\delta > 0)$.

3. 用不等式表示下列各区间.

(1) $[-1, 0]$；　(2) $(-3, 3]$；　(3) $[2, +\infty)$；　(4) 点 -2 的 0.001 邻域.

第二节　函数的概念与性质

一、常量与变量

任何事物都具有某些能够表现其多少、大小、长短、高低、轻重、快慢等可以进行比较和测定的属性. 比如长度、体积、温度、速度、距离、产量、成本、价格等. 这些都称为量，量的具体表现是数. 人们在对事物和现象的数量特征进行研究和定量分析时看到，有些量在考察和研究的过程中保持不变，只取某个固定的数值，这种量称为常量；有些量在研究过程中不断变化，可以取不同的数值，这种量称为变量.

例如，考察从甲地飞往乙地的客机. 旅客人数、行李重量、票价与航空公司的收入等都是常量，而消耗的汽油、飞行中客机与甲、乙两地的距离等则是变量.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况而定. 例如，三角形的内角和、圆周率 π 总是常量，而我国总人口数、一天中的温度则总是变量. 银行储蓄存款的利率，总的来说是有调整变化的，是个变量，但在每一个稳定时期则是固定不变的常量.

常量通常用字母 $a, b, c, \cdots$ 表示. 变量通常用字母 $x, y, z, \cdots$ 表示.

我们在微积分中讨论的量，只在实数范围内取值. 由于实数与数轴上的点有一一对应的关系，因此，常用数轴上的定点表示常量，而用数轴上的动点表示变量. 变量的取值和变化总有一定的范围，常用区间来表示这个范围.

初等数学研究的主要对象是常量，而高等数学研究的主要对象则是变量.

二、函数的概念

1. 函数关系

在研究任何事物或现象的同一过程中，出现的变量都不止一个. 这些变量之间有些具有确定的相互依赖的某种数量关系，而有些则没有确定的依赖关系，考察下面几个例子.

例 1　用混凝土修建一个长方体水池，显然容积 V 与水池的长 x、宽 y、高 z

之间有确定的依赖关系 $V = xyz$，其中 $x > 0, y > 0, z > 0$. 对任一组 x, y, z 的值，都能确定对应的水池容积 V 的值.

例 2 一个人进行投掷硬币实验，掷币次数 n 与国徽面出现的次数 m 两个量之间不能说没有关系. 实验表明，n 越大 m 也越大，但 n 与 m 之间没有确定的依赖关系. 比如，$n = 100$ 时，人们无法确定 m 到底等于多少.

如果在某一过程中，变量之间存在着某种确定的依赖关系，即一些变量的变化和取值决定着另一变量的变化和取值，就说存在这种依赖关系的变量之间有某种函数关系. 如例 1 中的 V, x, y, z 之间有函数关系 $V = xyz$，而例 2 中的 n 和 m 之间则没有函数关系.

2. 函数的定义

对于两个有函数关系的变量进行进一步讨论，不难发现，一定存在着某种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在允许的范围内任意取定一个值时，另外一个变量总有确定的值与之对应. 这正是两个变量间的函数关系的实质.

定义 1 设 x, y 为两个变量，如果当 x 在其允许的取值范围 D（D 为实数集合）内任意取定一个实数值时，按照一定的规则 f，y 总有唯一确定的实数值与之对应，则称 y 是定义在 D 上的函数. 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域.

由于只有一个自变量，也称 $y = f(x)$ 为一元函数.

如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义，则将 f 施行于 x_0 所确定的因变量 y 的值为 y_0，称 y_0 是自变量 x_0 所对应的函数值，记作

$$y_0 = f(x_0) \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

当 x 在定义域 D 内取遍所有数值时，对应的函数值构成的集合称为函数的值域，记为 R_f.

函数 $y = f(x)$ 中，表示对应规则的记号 f，也可以改用其他字母，例如 φ, ψ 等. 这时函数就记作 $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ 等.

$f(x)$ 既可以表示抽象、未知的函数，也可以表示具体、已知的函数. 但是，如果同时考察几个不同的函数，就要用不同的函数符号. 如 $y = \varphi(x), y = g(x)$ 等. 有时也用 $y = y(x), u = u(x)$ 等表示某个函数. 这时等号右端的 y, u 不是因变量，而只表示函数的对应规则.

例 3 设 $f(x) = 2^x$，$g(x) = x^2 + 1$，求 $f(-1), f(2)$，$g(-1)$，$g(2)$ 和 $f(1-x)$，$f[g(x)]$ 及 $g(1-x), g[f(x)]$.

解 $f(-1) = \frac{1}{2}$，$f(2) = 4$，$f(1-x) = 2^{1-x}$，$f[g(x)] = 2^{x^2+1}$. $g(-1) = 2$，$g(2) = 5$，$g(1-x) = (1-x)^2 + 1$，$g[f(x)] = 4^x + 1$.

例 4 设 $f(x+1)=x^2-1$,求 $f(x)$,$f(1)$,$f(0)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,代入原函数中,得

$$f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t.$$

于是得

$$f(x)=x^2-2x,\quad f(1)=-1,\quad f(0)=0,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}.$$

由函数的定义可以看出,对应规则 f 和定义域 D 是函数的两个要素.对应规则和定义域完全相同的函数实质上是同一个函数.例如,函数 $y=x^2-2x+1$ 与 $y=(x-1)^2$ 是同一个函数;$y=\sqrt{x-1}$ 与 $s=\sqrt{t-1}$ 是同一个函数,因为它们的对应规则及定义域完全相同.而函数 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 不是同一个函数,因为它们的定义域不同.

例 5 讨论 $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否为同一函数.

解 由于 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$,所以,当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x.$$

当 $(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x.$$

因此,虽然两个函数的定义域相同,均为 $(-\infty,+\infty)$,但由于它们的对应规则不同,故不是同一个函数.

3. 函数的表示方法与图形

函数的表示方法一般有三种:公式法,表格法和图示法.

(1) 公式法(解析法).就是用数学式子来表示因变量与自变量之间的对应关系.例如 $y=2x^2+\cos x$,$S=\pi r^2$ 等.这种方法显示了由自变量确定因变量的规则,简明准确,便于理论研究,是应用最多的一种方法,但缺乏直观性.

(2) 表格法(列表法).就是将自变量及其对应的函数值列成表格来表示变量之间的函数关系.例如,日常用到的平方表、常用对数表、三角函数表以及经济分析中的各种统计报表等,都是用表格法表示的函数.表格法的优点是可以迅速确定部分函数值,但不便于理论研究.