

材料力學簡明教材

下 冊

交通大學
南京工學院
西安航空學院

金 懋
梁 治明
胡 沛泉

熊 樹人
丘 侃
崔 振源

徐 世鉅
陸 耀洪
周 建功

合 編

西安航空學院印刷廠

1956年12月

編 者 自 序

簡明教材的下冊的分工如下：（1）南京工学院担任17—18章（丘 侃編17章，陸耀洪編18章，墨綫圖系南工教材繕印科所繪）；（2）交通大学担任19—22章（熊樹人編19章，徐世鈺編20章，金懋編21—22章墨綫圖系交大教材供應科繪圖組所制）；（3）西安航空学院担任23—27章（周建功編23—24章，崔振源編25章，胡沛泉編26—27章，陈鑫根繪制墨綫圖）。

初稿完成后，于1956年6月初在上海開会討論，相互提出修正意見。各校自己修正后，將改正的稿件交由西安航空学院負責進行最后修訂，使前后內容連貫、体裁一致。

最后的修訂工作由航院胡沛泉、崔振源及周建功共同負責進行。圖的修改由陈鑫根及崔振源負責。校对工作則由胡沛泉、吳富民、崔振源及周建功共同担任。

下冊共印6300本。由于低廉的紙張買不到，被迫采用高級道林紙，以致于成本較高，加重學生的負擔。此外，印刷字体的改進尙不能達到預期的水平。關於以上兩點，西安航空学院材料力学教研組感覺十分抱歉，决心在今后的工作中力求改進。

采用這本簡明教材的校有上海造船学院、太原工学院、華中工学院、重慶大学、合肥礦業学院、南京航空学院。希望各校師生，特別是以上六校对這本教材的缺點多多予以指出，以便再版時能提高教材的質量。

南京工学院	力学教研組
交通大学	材料力学教研組
西安航空学院	

1956年12月

下 冊 目 錄

編者自序

第七篇 超靜定梁 位能

第十七章 超靜定梁	245
§ 17.1 一般概念	245
§ 17.2 變形比較法	247
§ 17.3 圖解解拆法及初參數法的應用	248
§ 17.4 多余反力及靜定基的選擇	252
§ 17.5 連續梁 三彎矩方程	257
§ 17.6 連續梁的反力計算及Q圖與M圖的作法	262
§ 17.7 具有外伸臂的連續梁	268
§ 17.8 具有固定端的梁	272
第十八章 位能概念和對求變形的應用	276
§ 18.1 概說	276
§ 18.2 變形能的計算	277
§ 18.3 卡氏定理	281
§ 18.4 引用附加力的方法	288
§ 18.5 功的互等定理和位移互等定理	290
§ 18.6 馬克斯威爾——馬爾定理	292
§ 18.7 維力沙金法	294
§ 18.8 按變形能法計算簡單超靜定剛架	302

第八篇 復合抗力 曲桿

第十九章 復合抗力	305
§ 19.1 概述	305

§ 19.2 力在桿上作用的普遍情況	305
§ 19.3 斜彎曲	308
§ 19.4 大剛度桿件的彎曲與拉壓的合成	315
§ 19.5 扭轉與彎曲的聯合作用	321
第二十章 曲桿平面彎曲	332
§ 20.1 概述	332
§ 20.2 曲桿截面上的內力素	332
§ 20.3 純彎曲時截面上正應力的分布	334
§ 20.4 不同形狀截面中性軸位置的確定	338
§ 20.5 曲桿的應力計算和強度檢查	344
§ 20.6 平面假設的結果與高勞文的準確解法之間的比較	346
§ 20.7 曲桿應力計算的例題	346
§ 20.8 曲桿的變形	349
§ 20.9 曲桿變形計算的例題	351

第九篇 厚壁圓筒

第二十一章 厚壁圓筒	355
§ 21.1 厚壁圓筒的應力計算	355
§ 21.2 厚壁筒的強度（塑性材料）	359
§ 21.3 組合厚壁筒	360

第十篇 壓桿的穩定

第二十二章 壓桿的穩定	365
§ 22.1 穩定平衡與不穩定平衡的概念	365
§ 22.2 臨界載荷 P_K 之確定 歐拉公式	367
§ 22.3 桿端不同約束情況的影響	370
§ 22.4 (一) 歐拉曲線 (二) 臨界應力超過比例極限時喪失穩定的概念 (三) 雅興斯基的貢獻	374
§ 22.5 (一) $(\sigma_K - \lambda)$ 全圖 (二) 壓桿材料的選擇	377
§ 22.6 按照許用應力、折減系數的壓桿計算	378

§ 22.7 压桿設計計算的一般程序·····	380
§ 22.8 压桿承受偏心截荷的計算·····	383
§ 22.9 縱橫彎曲·····	385
§ 22.10 穩定計算的意义及其發展·····	387

第十一章 動載荷

第二十三章 慣性力与振動的計算·····	390
§ 23.1 緒論·····	390
§ 23.2 等加速運動的桿件應力的計算·····	391
§ 23.3 旋轉圓环（飛輪輪緣）的應力計算·····	392
§ 23.4 平行桿和連桿的應力計算·····	394
§ 23.5 共振对應力的影响·····	398
§ 23.6 振動時應力的計算·····	399
§ 23.7 彈性体系質量的考慮对自由振動頻率的影响·····	403
§ 23.8 蘇聯学者在振動理論上的貢獻·····	403
第二十四章 冲擊時的應力·····	405
§ 24.1 基本原理·····	405
§ 24.2 冲擊變形及應力的意义 動荷系数·····	407
§ 24.3 梁的冲擊應力·····	410
§ 24.4 扭轉冲擊時的應力·····	411
§ 24.5 軸向冲擊時變截面桿內的應力·····	413
§ 24.6 从上面所得結果推出的实用結論·····	414
§ 24.7 被冲擊系統質量的影响·····	416
§ 24.8 直到破坏的冲擊試驗·····	417
§ 24.9 各种因素对冲擊韌度之影响·····	418
§ 24.10 蘇聯学者在冲擊抗力研究方面的貢獻·····	420
第二十五章 在重复應力下材料的强度計算·····	422
§ 25.1 關於重复截荷对材料强度的影响的基本概念·····	422
§ 25.2 在重复應力情况下的强度校核·····	423
§ 25.3 在对称循环時持久極限的求法·····	424
§ 25.4 不对称循环時的持久極限·····	427

§ 25.5 合种因素对持久極限的影响·····	429
§ 25.6 應力集中的影响·····	431
§ 25.7 零件尺寸对持久極限的影响·····	434
§ 25.8 許用應力的確定·····	435
§ 25.9 確定〔 σ_r 〕的方法的改進·····	439
§ 25.10 確定許用應力的步驟·····	440
§ 25.11 在重复應力及复雜受力状态下的强度校核·····	442
§ 25.12 几种防止重复應力下破坏的实用方法·····	442
§ 25.13 苏聯学者对于重复截荷理論的貢獻·····	443

第十二篇 蠕滑計算 結束語

第二十六章 蠕滑計算的基礎·····	445
§ 26.1 高温刃金屬的机械性質的影响·····	445
§ 26.2 蠕滑及松弛現象·····	446
§ 26.3 蠕滑及松弛曲綫·····	447
§ 26.4 蠕滑計算時的許用應力·····	454
第二十七章 結束語·····	459
§ 27.1 概述·····	459
§ 27.2 彈性后效·····	459
§ 27.3 薄壁構件的穩定性·····	460
§ 27.4 材料力学的現代問題及發展方向·····	461

第七篇 超靜定梁 位能

第十七章 超靜定梁

§ 17.1. 一般概念

在前面几章里我們討論了靜定梁，靜定梁的反力是僅由靜力學的平衡條件就能決定的。如果梁所受約束的數目超過了維持平衡所必需的數目，則單憑靜力學的平衡條件將不能決定其反力，這種梁就稱為超靜定梁。

在超靜定梁中，那些超過維持平衡所必需的約束，常被稱為多余約束，相應的反力常被稱為多余反力（有時亦稱為附加約束及附加反力）。不過這裏的所謂「多余」，嚴格地說起來是不很恰當的：雖然就保持剛體平衡的必要性的觀點來說，在超靜定梁中，有些約束是多余的；但是從工程技術的觀點來看，這些約束，不但并非「多余」而且往往很為有用，甚至是必需的。例如，為了減小肱梁（圖17.1a）的變形，可在其自由端加一支座（圖17.1b）；為了減小雙支梁（圖17.2a）的跨度，可增加一個中間支座（圖17.2b）。像這樣對於靜

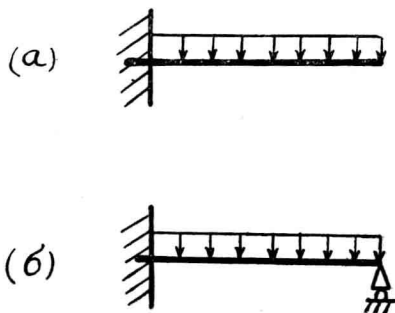


圖 17.1

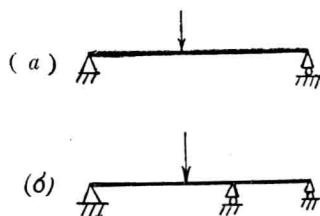


圖 17.2

定梁增加了約束，往往可以減小梁的最大彎矩，因而可以節省材料。

對於超靜定梁，為了強度校核，須要畫出剪力圖及彎矩圖，因此必須求出反力；求出了反力以後，就和靜定梁一樣，可以繪制剪力圖和彎矩圖，校核強度或計算變形了。本章將介紹解超靜定梁反力的基本方法。

在第四章中我們業經看到：解拉伸與壓縮的超靜定問題時，可以根據結構的變形諧調條件，列出所需的補充方程。這裡，不難想到，在解超靜定梁時，也可以採用同樣的辦法；亦即根據梁的變形諧調條件，列出足夠的補充方程，連同靜力學的平衡方程，就能求出全部的反力。

現在，就圖 17.3a 中所示的超靜定梁 A B 來說明如何根據變形諧調條件列出補充方程。這個梁共有四個反力，但靜力學的平衡方程只有三個，也就是說

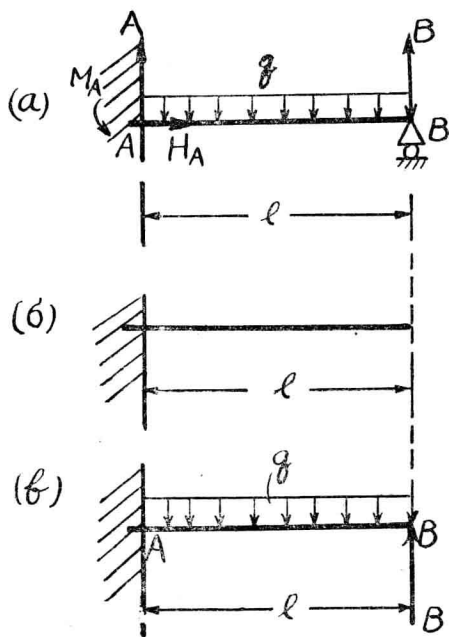


圖 17.3

有一个多余反力。如果以反力 B 为多余，就是認為圖 17.3a 中的超靜定梁是由圖 17.3b 中的靜定梁加了一个附加支座而成的；這樣去掉了多余約束而得到的靜定梁，称为原來超靜定梁的靜定基。就圖 17.3 中的梁而論，要想求出超靜定梁的反力，須要在靜定基上加上均布載荷 q 及多余反力 B (圖 17.3c)，使它成为与原有超靜定梁 (圖 17.3a) 相符的体系。但是這还不够；在圖 17.3a 中的 B 點不能沿着垂直于梁軸的方向移動，現在圖 17.3c 中的梁尚有這種可能；為了使這兩

个梁完全一致地工作，必須对后者加上一個限制的條件，即靜定基在載荷 q 及

B的作用下，截面B的撓度等于零：

$$y_B = 0。$$

這就是用來決定多余反力B的補充方程。在這里所根據的變形諧調條件是梁端B不離開支座。

可以用幾種方法來解這補充方程。

§ 17.2 變形比較法

由迭加原理知圖 17.36 中靜定基的截面B的撓度等于僅由均佈載荷 q 所引起的撓度 y_{Bq} 與僅由集中力B所引起的撓度 y_{BB} 之和，因此，上節的補充方程可寫成

$$y_{Bq} + y_{BB} = 0。 \quad (1)$$

當靜定基僅受均佈載荷 q 時（圖 17.4a），由表 14.1* 可知截面B的撓度為

$$y_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EJ}；$$

靜定基僅受集中力B時（圖 17.4b），

$$y_{BB} = +\frac{Bl^3}{3EJ}。$$

代入方程，得

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0；$$

由此即得

$$B = \frac{3}{8}ql。$$

在這個方法中，我們先給靜定基在載荷 q 作用下以變形的可能，然後選擇外力B把截面B推回，即使B所引起的撓度與 q 所引起的撓度數值相等而方向

*此表原應放在上冊十四章內，後因制鋅板來不及而放於下冊此章內。

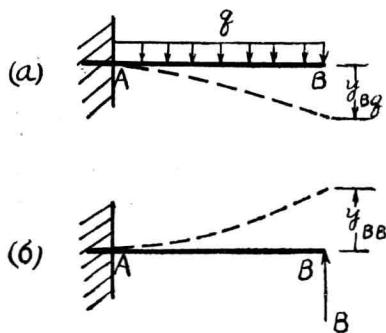


圖 17.4

相反。這種方法稱為變形比較法。

多余反力 B 求出以後，其餘的反力由平衡方程即可求得：

$$A = -\frac{5}{8}ql, \quad H_A = 0, \quad M_A = -\frac{1}{8}ql^2。$$

取任一截面的右側部分來研究（圖 17.5a），即得剪力及彎矩方程如下：

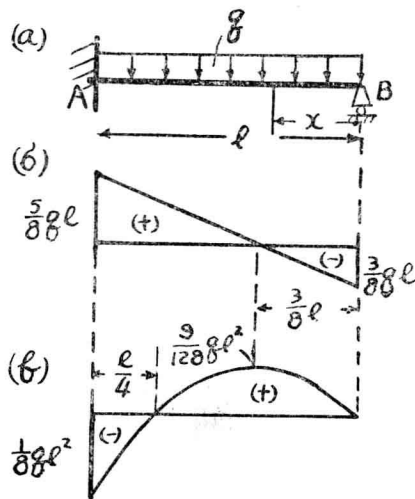


圖 17.5

$$Q = -B + qx = -\frac{3}{8}ql + qx,$$

$$M = \frac{3}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2。$$

在 $x = \frac{3}{8}l$ 處， $\frac{dM}{dx} = Q = 0$ ，

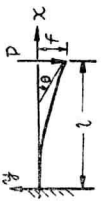
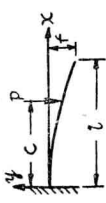
$$M_{\max} = \frac{3}{8}ql \times \frac{3}{8}l - \frac{q}{2} \left(\frac{3}{8}l \right)^2 = +\frac{9}{128}ql^2。$$

由此可以畫出這梁的剪力圖及彎矩圖（如圖 17.5b 及 17.5c）。

§ 17.3 圖解解析法及初參數法的應用

前述補充方程，可應用圖解解析法來解。例如為了解上節中所舉的超靜定

表 14-1

支 承 及 載 荷 情 况	自 由 端 斜 率	彈 性 曲 線 方 程	最 大 撓 度
	$\theta = -\frac{Pl^2}{2EJ}$	$y = -\frac{Px^2}{6EJ}(3l-x)$	$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$
	$\theta = -\frac{Pc^2}{2EJ}$	$y = -\frac{Px^2}{6EJ}(3c-x), 0 \leq x \leq c$ $y = -\frac{Pc^2}{6EJ}(3x-c), c \leq x \leq l$	$f = \frac{Pc^2}{6EJ}(3l-c)$
	$\theta = -\frac{ql^3}{6EJ}$	$y = -\frac{qx^2}{24EJ}(x^2+6lx-4lx)$	$f = -\frac{ql^4}{8EJ}$
	$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ}$	$y = -\frac{qx^2}{120EJ}(10l^2-10lx^2+5lx^2-x^3)$	$f = \frac{ql^4}{30EJ}$
	$\theta = -\frac{Ml}{EJ}$	$y = -\frac{Mx^2}{2EJ}$	$f = \frac{Ml^2}{2EJ}$

支 承 及 載 荷 情 况	梁 端 斜 率	彈 性 曲 綫 方 程	最 大 撓 度 及 中 點 撓 度
	$\theta_1 = -\theta_2 = -\frac{Pl^2}{16EJ}$	$y = -\frac{Px}{12EJ}(\frac{3l^2}{4} - x^2), 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	$f = -\frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\theta_1 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6^2EJ}$ $\theta_2 = \frac{Pab(l+a)}{6^2EJ}$	$y = -\frac{Pbx}{6^2EJ}(l^2 - x^2 - b^2), 0 \leq x \leq a;$ $y = -\frac{Pbx}{6^2EJ}((l^2 - b^2)x - x^3 + \frac{1}{6}(x-a)^3),$ $a \leq x \leq l.$	在 $x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{3}$ 处, $f = -\frac{\sqrt{3}Pb^2(l^2 - b^2)}{27^2EJ};$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, 若 $a > b$, $f_2 = -\frac{Pb}{48EJ}(3l^2 - 4b^2).$
	$\theta_1 = -\theta_2 = -\frac{ql^3}{24EJ}$	$y = -\frac{qx}{24EJ}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$f = -\frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\theta_1 = -\frac{Ml}{6EJ}$ $\theta_2 = \frac{Ml}{3EJ}$	$y = -\frac{Mlx}{6EJ}(1 - \frac{x^2}{l^2})$	在 $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 处, $f = -\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ};$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, $f = -\frac{Ml^2}{16EJ}.$
	$\theta_1 = -\frac{Ml}{3EJ}$ $\theta_2 = \frac{Ml}{6EJ}$	$y = -\frac{Mx}{6^2EJ}(l-x)(2l-x)$	在 $x = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})l$ 处, $f = -\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ};$ 在 $x = \frac{l}{2}$ 处, $f = -\frac{Ml^2}{16EJ}.$

梁，可畫出虛梁及虛載荷如圖 17.66，那么變形諧調方程 $y_B = 0$ 也就是這裏虛梁的平衡方程 $\Sigma M_{Bf} = 0$ ，亦即

$$\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot Bl \right) \cdot \frac{2l}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{q}{2} l^2 \right) \cdot \frac{3l}{4} = 0;$$

由此可得

$$B = -\frac{3}{8} ql_0$$

多余反力 B 求得后，其余的反力求法同前。

應用初參數法也可以求出超靜定梁的多余反力。例如上面所舉的超靜定梁，若以反力 B 为多余，可取支點 B 为座標原點，并取座標軸如圖 17.7 所示，于是任一截面的偏轉角及撓度的一般方程各为

$$-EJ\theta = -EJ\theta_0 + B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{3}; \quad (1)$$

$$EJy = EJy_0 - EJ\theta_0 \frac{x}{1} + B \frac{x^3}{3} - Q \frac{x^4}{4}. \quad (2)$$

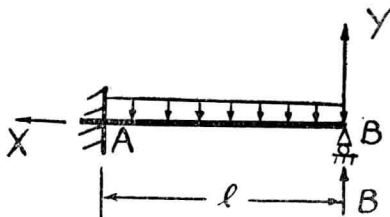


圖 17.7

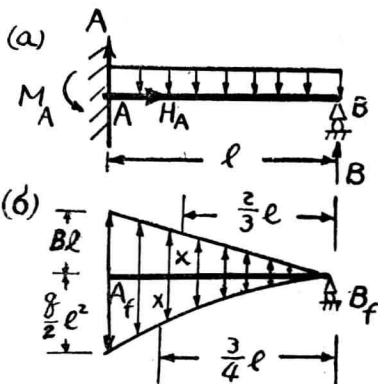


圖 17.6

前述的諧調條件，在這里就是

$$y_0 = 0.$$

梁端 A 的边界条件为：

$$x = l, \theta_A = 0 \text{ 及 } y_A = 0.$$

將边界条件分別代入式 (1) 及 (2)，即得：

$$0 = -EJ\theta_0 + B \cdot \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6}; \quad (3)$$

$$0 = -EJ\theta_0 \cdot l + B \cdot \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24}. \quad (4)$$

消去上二式中的 θ ，即得多余反力

$$B = -\frac{3}{8}ql。$$

其余的反力求法同前。

綜上所述，可以看出当靜定基僅受一种載荷所產生的變形（如圖 17.4 中的 y_{Bq} 及 y_{BB} ）已經求得時，變形比較法尚屬便利，否則將不如圖解解析法或初參數法簡便。

§ 17.4 多余反力及靜定基的選擇

在超靜定梁中，那些反力是多余反力，本無一定；解題時多余反力的選擇，可根據解題的便利來決定。對於同一問題，如所選的多余反力不同，當然相應的靜定基必定不同，於是補充方程也將隨之而異。

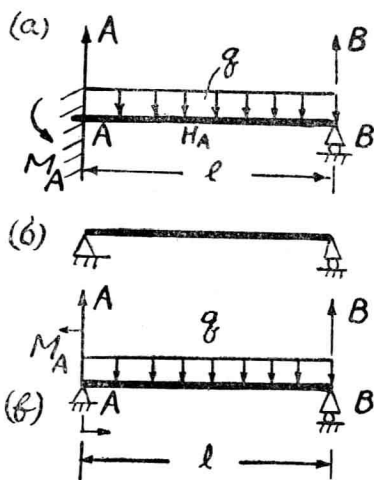


圖 17.8

例如，在前述的一端固定一端鉸支的超靜定梁中，共有四個反力，如不以反力 B 為多余，就可以取反力偶 M_A 為多余。

這個反力偶 M_A 的產生，是由於梁在 A 端受了阻止截面轉動的約束；如果去掉這個多余約束并保留其余的原有約束，顯然相應的靜定基在 A 端可以轉動但仍不能移動，應該是一個不動鉸鏈支座； B 端仍照原樣，足見靜定基是一簡梁（圖 17.86）。為了使靜定基與原有超靜定梁成為相符的體系，須在靜定

基上加上均佈載荷 q 及力偶 M_A ；不难看出，現在根據變形諧調條件列出的補充方程將是

$$\theta_A = 0。 \quad (1)$$

參看圖 17.9 可見上式可寫成

$$\theta_A = \theta_{Aq} + \theta_{AM} = 0。 \quad (2)$$

由表 14.1 查得

$$\theta_{Aq} = -\frac{ql^3}{24EJ}；$$

$$\theta_{AM} = +\frac{M_A l}{3EJ}。$$

代入方程(2)，則得

$$-\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{M_A l}{3EJ} = 0；$$

$$M_A = +\frac{1}{8}ql^2。$$

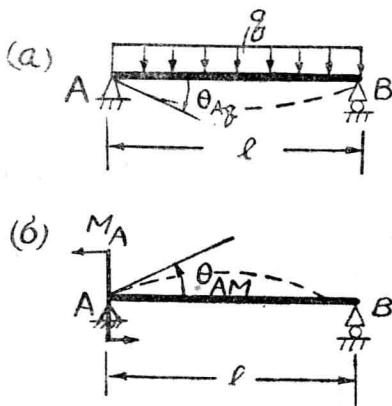


圖 17.9

這裡的正號表示所得的 M_A 與圖 17.8 及圖 17.9 中所設的方向一致。求出多余反力偶 M_A 以後，其餘的反力就可用平衡條件來決定了。

○這裡用圖解解析法，很容易求出多余反力偶 M_A 。繪出虛梁及虛載荷，如圖 17.10 δ ，由虛梁的平衡條件 $\Sigma M_{Bf} = 0$ ，我們得到

$$\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot M_A\right) - \frac{2}{3}l - \left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{8}ql^2\right) - \frac{l}{2} = 0；$$

由此，即得

$$M_A = -\frac{1}{8}ql^2。$$

○若取 A 為多余反力，則須考慮這個反力的產生是由于梁在 A 端受了阻止上下移動的約束；除去了這個多余約束，靜定基在 A 端可沿豎向移動，但仍不能沿水平方向移動，亦不能轉動，相應的支座如圖 17.11 所示，即梁的 A 端有一滑塊，可在光滑的槽里作豎向滑動。採用圖 17.11 中這樣的靜定基時，變形協調條件當為

$$y_A = 0。$$

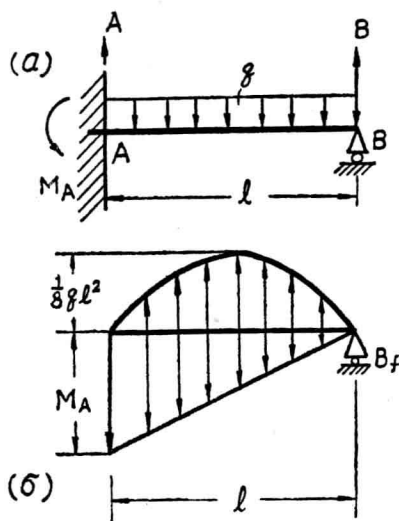


圖 17.10



圖 17.11

选取這樣的靜定基，應用前述方法當可求出超靜定梁的反力，但是顯然不及取 B 或 M_A 為多余反力計算簡便，因為這個靜定基不是常見的梁，初學者對它很不熟悉。

由原超靜定梁平衡條件 $\Sigma X = 0$ ，即得 $H_A = 0$ ，足見不能取 H_A 為多余反力。

現在再用下面的幾個例題，來說明多余反力及靜定基的選擇。

例17.1 梁ABC，支于三個支座，受均佈荷載 q 作用，如圖 17.12a；求作剪力圖及彎矩圖。

這梁有 H_A 、 A 、 B 及 C 等四個反力。由平衡條件 $\Sigma X = 0$ 得 $H_A = 0$ ；顯然不能取 H_A 為多余反力。

若取 A 或 C 為多余反力，則所得靜定基是一個外伸梁；若取 B 為多余反力，則靜定基為一簡梁，如圖 17.12b。

選擇多余反力，須同時考慮到解超靜定梁時打算採用的方法。不难看出在這一題中若用初參數法，則取 A 、 B 或 C 為多余反力，計算煩簡似乎差不多；若用圖解解析法，則取 B 為多余反力，較為便利，因為靜定基的 M 圖畫起來較為簡單。若參看表 14.1，顯然本題當以取 B 為多余反力而採用變形比較法最便。

根据圖17.126

中的靜定基，本題
的補充方程为

$$\begin{aligned} y_B &= y_{Bq} + y_{BB} \\ &= 0. \end{aligned}$$

查表 14.1 代入上
式，即得

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{384} \cdot \frac{q(2l)^4}{EJ} \\ & + \frac{1}{48} \cdot \frac{B(2l)^3}{EJ} \\ & = 0. \end{aligned}$$

解之，即得

$$B = \frac{5}{4} ql.$$

由原梁的靜力平衡
条件，即可求得

$$A = C = \frac{3}{8} ql.$$

剪力圖及彎矩圖如圖 17.126 及 17.127。

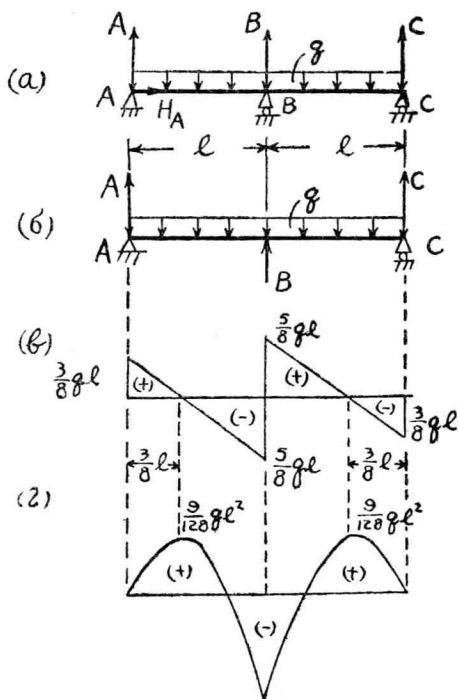


圖 17.12

例17.2 試求圖17.13a中的超靜定梁的反力。

本題如用圖解解析法，若取 M_A 为多余反力偶，則靜定基为一簡梁，由圖17.136可見虛載荷圖的面積及形心計算較煩；当不如取 B 为多余反力，得虛梁如圖17.13e。由 $\sum M_{Bf} = 0$ ，得

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2Ba \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 2a \right) = \left(\frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} qa^2 \right) \left(a + \frac{3}{4}a \right);$$

$$B = \frac{7}{64} qa.$$