算學叢書

簡要實用微積術

柯勞什著
李協譯

436

算學叢書

第六種

簡要實用微積術

德國柯勞什原著
李協譯述

商務印書館發行

中華民國十六年三月初版
中華民國二十一年十一月國難後第一版

(58134)

算學叢書 簡要實用微積術一冊
Differential-Und Integralrechnung

每冊定價大洋壹元肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 F. Kohlrausch

譯述者 李協

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

六四九三上

簡要實用微積術

譯者附言

F. Kohlrausch 於近今物理學多所闡發伊著.是書.頗具深意.其原序云.今世所行微積教科書.非不多且博矣.然學者.窮年孜孜.畢盡算學能事.而與以物理工業等題.則對之仍覺茫然.是弊余在帝國電信試驗場.頗能覺之.故特著是編.令學者以短少光陰.能探微積學之蘊.且立能施之於實用.故多設實用之題.而詳述其解法.

譯者昔在北京事學時.卽購是書.以爲自行研究之資.兩月餘而竟其業.後遊伯林.讀 *Scheffers* 及 *Serret* 關乎微積學等著.已無隔閡.再習力學及靜力學之艱深者.皆迎刃而解.所得益於是書者多也.

著是書者爲電信試驗場教授.故書中之題.多偏重於電學.然於他各工業物理等部.亦非省略.

是書之便有三.一已供職各項工業.而微積學識未完足者.得是書.可速補其缺陷.二欲習專門算學.而苦於微積無門徑者.得是書.可驟窺堂奧.三已曾學過高深算學.而臨用時不免遺忘.或未習於實用等題者.得是書,可爲良助.以是之故.是書在德國.不特在職之人多購用之.而大學及工科大學之學生.購用者亦甚衆.

吾國算學傳來已古.而工業一途.今始萌芽.顧算學爲工業之基礎.夫人知之.然今之習算學者.多牢於工業隔閡太甚.

而習工業者.又多缺乏算學智識.兩俱不能進步.職是故也.譯者.切望是書之得爲吾國人注意.使知算學之用在工業.而工業非算學.無以致其造境也

譯者譯是書所用名詞.力擇吾國普通所習用者.然間有新創.則以舊者爲失當也.如 *Differential Quotient* 舊譯微係數.然 *Quotient* 之義.本爲商非係數也.故改譯微商.*Moment* 或譯爲能率.則以爲未盡其義.不如譯爲冪.一以諧其音.--因普通 *Moment* 之義.多指力與距離之積.恰合算學中冪之義也.又 *Rational* 及 *Irrational Function* 舊譯爲有理的及無理的函數.今改爲理函數及劇函數.

凡人名地名及量名之爲萬國公定者如 *Meter, Ampere, Volt* 等.皆書原文而附其讀法於括弧內.

譯者於書內間有以己意改竄之處.以求吾國學者讀之易解.

學術語之下.附以英文.蓋是書雖譯自德文而吾國識英文者良多.故特附之以資考證.

凡習理科或工業者用是書省較用他譯本或英文原本爲得切要而省時力.習專門算學者用是書易於得門徑而進窺堂奧.是則所敢介紹於吾國學者.

民國五年一月十五日李協誌

省文釋義

m	義爲	*Meter*	(讀米突)	＝公尺
cm	,, ,,	*Centimeter*	(讀生的米突)	＝公分
mm	,, ,,	*Milimeter*	(讀密里米突)	＝公厘
km	,, ,,	*Kilometer*	(讀啟羅米突)	＝公里
□*cm*	,, ,,	cm^2	(讀平方生的米突)	＝平方公分
□*mm*	,, ,,	mm^2	(讀平方密里米突)	＝平方公厘
❐*cm*	,, ,,	cm^3	(讀立方生的米突)	＝立方公分
❐*mm*	,, ,,	mm^3	(讀立方密里米突)	＝立方公厘
l	,, ,,	*Liter*	(讀立脫)	＝公升
g	,, ,,	*Gram*	(讀格蘭姆)	＝公兩
hg	,, ,,	*Kilogram*	(讀啟羅格蘭姆)	＝公斤
sec	,, ,,	*Second*	(義爲秒)	
g	,, ,,	地重力 (*Acceleration of earth or Gravity*)		
C. G. S. 系	,, ,,	*Centimeter-Gram-Second-System*		
sin	,, ,,	*Sine*		＝正弦
cos	,, ,,	*Cosine*		＝餘弦
tan	,, ,,	*Tangent*		＝正切
cot	,, ,,	*Cotangent*		＝餘切
arc	,, ,,	弧		
h	,, ,,	點鐘		

目 錄

卷 一

微分算法緒論

卷 二

微分算法

卷三

積分算法

附　　卷

簡要實用微積術

卷一

微分算法緒論

§1. 函數之義及其分類

今夫物之由空墜下也.其終點速率 $u=\sqrt{2gh}$. 式中 g 爲地重力.在地球上各處各爲一定之不變數. h 爲物墜下所經之路. h 若異.則 u 亦相殊.按上式 u 之值與 h 之平方根爲正比.

凡數之不變者名曰恒數.變者名曰變數.此數變而彼數因之而變者.則前者爲自變數.後者爲因變數.如上式 h 爲自變數. u 爲因變數.今欲表 u 爲關繫於 h 之數.亦可命 u 爲 h 之函數而書之爲"$u=f(h)$".

茲再以電學之理喻之.如左圖 E 爲蓄電池之電動力[1]. A 爲 *Ampermeter* (讀曰安培米突)[2]. W 爲白熾電燈之阻力[3].在封合導圈中電流之強[4] J 因電燈之阻力不變.故但關繫於電動力 E. 設電池之數增加.則電流之強 J 亦增加.與電動力 E 爲正比

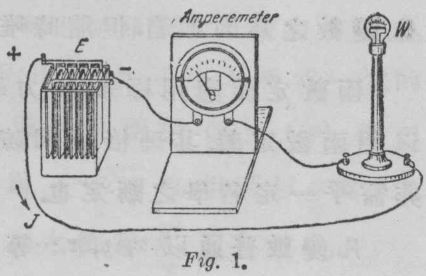

Fig. 1.

(1) *Electromotive Force.*
(2) 量電流強弱之表以 *Amper* 爲單位.
(3) *Resistance.*
(4) *Intensity of Current.*

(Ohm定律: $J=E/W$). 但於 *Ampermeter* 視針之所指卽可以知之. 在此例中任以一值與 E 而察 J 之變. 故 E 爲自變數. J 爲因變數. 按上例亦可命 J 爲 E 之函數而書之爲"$J=f(E)$".

但 E 與 J 之相關係按之 *Ohm* 定律. 乃交互的. 亦可任以多寡電流輸入電燈. 令 J 隨意增減(如 *Fig.* 2). 而以 *Voltmeter* (讀華特米突)[1] 量電動力之變. 設於此電燈之阻力仍爲不變. 則 E 隨 J 而增卽與之爲正比. 故 E 爲因變數而 J 爲自變數. 書之爲"$E=f(J)$".

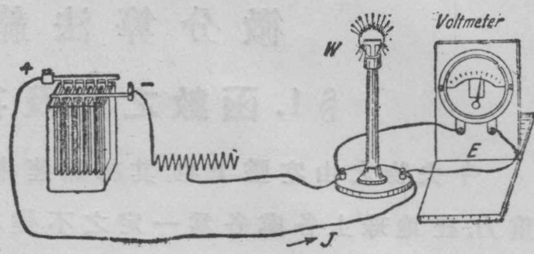

Fig. 2.

篇首所舉第一例. u 與 h 之相關係. 若欲得相異之終點速率 u. 則 h 自必變. 故其關係亦爲交互的. 又若貨物爲人需索之多寡. 視其價之昂低. 故需索之數. 可命爲物價之函數. 然亦可云物價爲需索數之函數. 因需索愈多. 其貨自易以廉價貿易也. 變數之爲因與自. 但隨時唯人所命耳.

函數定義應用極多. 如力學電學. 實業及一切算數科學皆以用函數定義. 其理倍覺明瞭. 此種定義本乎人之推解力. 而非需乎一定名學之斷定也.

凡變數普通以 $x, y, z,\cdots$ 等字母代之. 恒數以 $a, b, c,\cdots$ 等字母代之. 上所舉力學電學等關係. 可普通書之爲 $y=f(x)$ 名之曰函數方程式. $f(\ )$ 爲函數符號. 函數方程式亦可書之爲

(1) 量電動之表以 Volt 爲單位.

$f(x, y)=0$. 蓋一方程式如 $y^2=2px$ 亦可書之爲 $y^2-2px=0$ 也.設有數不相同之函數則可任用 $f, F, \phi, \psi, z,\cdots$ 等字母以爲區別.

電流之強.若精確論之.則亦爲阻力之函數.蓋電燈之阻力.因溫度之增而減也.命電力之值不變.而以 x 代電燈之阻力.則其與電流之關係.可以 $y=\phi(x)$ 或 $\phi(x, y)=0$ 表之.若欲表示電流之強.同時與兩變數之關係.以 y 代電流之強.以 x 代阻力.以 z 代電動力.則 $y=f(x, z)$

函數之義.不限於兩未知數.未知數爲任何多俱可.

函數之分類不一.其要者如下:

I. 在 $y=f(x)$ 函數式中.若 x 爲實數而得 y 之值亦爲實數則其函數名曰實函數.反是若 x 爲實數而得 y 之值爲虛數者則名曰虛函數.如 $y=x\sqrt{-4}$ 是也.凡數無論爲正爲負.爲整爲分.爲劇 (*Irrational*) 爲越 (*Transcendental*). 舉爲實數.數之以實數虛數合成者.名曰雜數函數.以實數虛數合成者名曰雜函數.

II. 在函數式 $y=f(x)$ 中.每以一值代 x 而得 y 之值只有一者.則其函數爲一解的.每以一值代 x 而得 y 之值有多個者.則其函數爲多解的. 例如 $J=E/W$ 式中. J 及 E 皆爲一定的函數.但有一解.而 $y^2=2px$. 以 y 爲 x 之函數. 卽 $y=f(x)$. 有二解.因 y 之值可爲 $+\sqrt{2px}$. 亦可爲 $-\sqrt{2px}$ 也.但若以 x 爲 y 之函數.卽 $x=f(y)$. 則只有一解.因 x 之值爲 $\dfrac{y^2}{2p}$ 只有一也.

III. 函數若依運算法分別之.則如下.

1. 凡函數但由四則算法成者.名曰理函數(*Rational Function*).

(*a*) 凡函數式但用加減及乘號者.名曰理整函數 (*Rational Integral Function*). 如

$$y=a+bx-cx^2=\phi(x)$$

(*b*) 凡函數式並有除號者.名曰理分函數(*Rational Fractional Function*). 如

$$y=\frac{a+bx-cx^2}{a_1+b_1x-c_1x^2}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

理分函數與理整函數之別.其顯然者.在 x 若為可盡值.而若 $\psi(x)=0$ 則 y 爲無限值也.

2. 凡函數有方根號者.名曰劇函數(*Irrational Function*).如

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

3. 越函數 (*Transcendental Function*) 別之如下:

(*a*) 對數式: $y=log\,x$ 及指數式: $y=a^x$;

(*b*) 三角函數式: $y=sin\,x\cdots cos\,x\cdots tan\,x\cdots cot\,x$;

(*c*) 弧函數: $y=arc\,sin\,x\cdots$.

1. 及 2. 下所述諸函數.亦可總名曰代數函數.以其式中運算不出乎代數也.

§2. 圖示法及經緯坐標定義

上款所論.已從算學根本法定函數之義矣.但函數之義.尚有他法可以定之.茲分舉如下.

1. 列表法. 由 $y=f(x)$ 式中任取 x 之值而求 y 值之變.列之爲表.如三角函數表對數表是也.但所取 x 之值大有限制.而 y 之值.亦僅能算得幾位小數.非能準確無差也.

2. 圖示法. 表函數之變化.按 x, y 之坐標.作曲線於紙上.但此法亦非能眞正準確.因作圖之事難以確切也.

圖示法雖未能得眞確之結果.然事物變化之法則情狀.以數言之.或紛劇而無章.以圖表之.則顯明而易瞭.蓋此法使變數之關係盡包括於一幾何圖內.而能令人一目瞭然也.解析幾何之基礎.卽本於是.

經緯軸系

作二無限直線於一平面上.其交角可以任意爲之.但常用者多爲直角相交之二直線(*Fig.* 3).其交點爲 O. 平衡者號爲 $X'X$. 名曰 X 軸.垂直者號爲 $Y'Y$ 名曰 Y 軸.於圖紙平面上取一點 P. 由 P 作平行於 OX 及 OY 之直線.交 Y 軸 X 軸於 R 點及 Q 點. OQ 名曰 P 點之緯坐標. OR 名曰 P 點之經坐標.緯坐標之長命爲 x. 經坐標之長命爲 y.

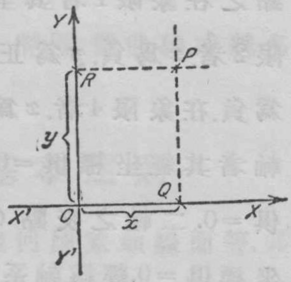

Fig. 3.

x 及 y 總名曰 P 點之坐標.在上圖中 $x=1.5\,cm.$, $y=2\,cm.$

用此法可定他一切點於圖紙平面上.每一點皆有一定之經緯坐標.反言之.每經緯坐標皆有相當之一定點.如欲表示一點 P_1 其緯經坐標 $x=3\,cm.$, $y=4\,cm.$ 則由 O 點起向右度 3 於 X 軸上.向上度 4 於 Y 軸上.由所度端點 3 與 4 起.作二軸之直交線.相交於一點卽 P_1 是也.但由 O 點起於 X 軸.向左亦可度 3.於 Y 軸向下亦可度 4. 則所得者似不止一點.而有四點 P_1, P_2, P_3, P_4. 但若令二軸分正負二向.則此歧端可免 (*Fig.* 4). 今命

與 O 之距離.順箭端之方向者爲正.反對之者爲負.則四點之坐標.可分別之如下:

	x	y
P_1	$+3,$	$+4$
P_2	$-3,$	$+4$
P_3	$-3,$	-4
P_4	$+3,$	$-4.$

如是則每一經緯坐標.僅有相當之一定點.不致與他點混淆矣.在右圖紙面上以二軸分爲四象限.點之在象限1者其坐標 x,y 俱爲正.在象限2者.x 爲負.y 爲正.在象限3者.x,y 俱爲負.在象限4者.x 爲正.y 爲負.點之在 X 軸者其經坐標俱 $=0$.在 Y 軸者其緯坐標俱 $=0$.二軸之交點 O 名曰原點.其經緯坐標俱 $=0$.經緯軸系.爲用甚廣且極重要.可以表示物理定律.三角術中.用之尤富.

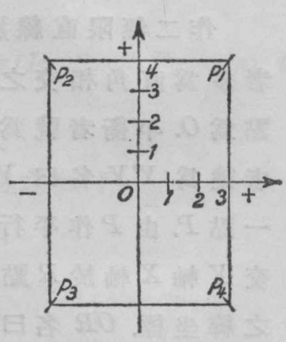

Fig. 4.

玆舉一例以示函數之用途.按 *Mariotte* 定律.氣體容積與其壓力之變易.常有一定的關係.卽其容積與壓力之相乘積常爲一恆數.命壓力爲 p.容積爲 v.卽 $pv=C=1$.今以圖示此定律如下.

命 p 任意變易而以 v 爲 P 之函數.卽 $v=f(P)$ 而求其與 P 相當之值.

命	$p=0.1$	0.2	0.5	1	2	4
則	$v=10$	5	2	1	0.5	0.15

以此諸值度於右圖之經緯軸系上.則得許多之點.可聯之爲一曲線(*Fig.* 5). 此曲線即可以表函數式 $v=f(p)$ 之狀態.但此法須算出許多數.始可以作曲線.殊覺困難.但此困難可以免之.蓋按解析幾何.$pv=1$. 乃爲一定之曲線.即雙曲線也.故可按一定之法作圖.不必一一求其點也.解析幾何者.敎人以因方程式以作圖.亦因圖以求其方程式也.下款所論.即解析幾何中最重要者.

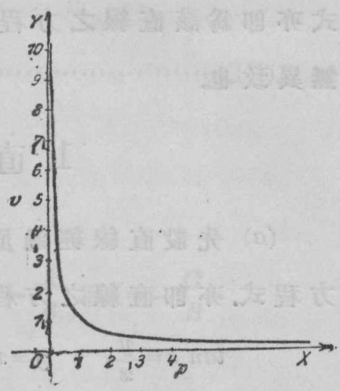

Fig. 5.

求各平面圖之方程式.如直線.圓.拋物線.橢圓.雙曲線.或總名之曰圓錐曲線.

§3. 平面解析幾何之基本定則

平面解析幾何者.所以研究簡單之幾何圖象如線面等.其成立守一定之法則者也.如圓之成立.爲用一規取一定距離爲半徑.繞一定點旋轉而得者也.故圓上各點.距此定點(即中心點)俱相等.

本是則圓上一切點之成立.俱依同一之定則.故任取圓上一點(取其最普通者)而求其成立定則.則可以之馭圓上一切點.依此定則.立一方程式.則亦即爲全圓之方程式.因圓上一切點之成立與所取一點無異致也.

以下所討論直線及圓錐曲線.其成立之定則.俱設爲已知者.

任取直線上一點.而求其成立定則以立方程式.則此方程式亦卽爲該直線之方程式.因直線上各點之成立與所取之點無異致也.

1. 直線之方程式

(*a*) 先設直線經過原點者.按圖卽可得直線上一點 P 之方程式.亦卽直線之方程式:

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\qquad y=x\tan\alpha.$$

α 角爲正軸 X 順圖中箭端之方向轉至 OP 位置而生者.圖中箭端方向.爲時表針之反向.名曰正轉向.直線之正方向亦以箭端誌之.

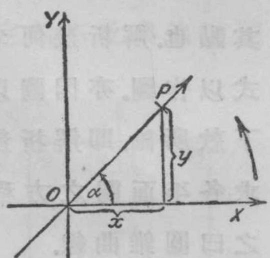

Fig. 6.

(*b*) 直線對原點之位置爲任意者.設直線截 Y 軸一段 $OG=b$. 截 X 軸一段 $OF=a$(*Fig.* 7). 則由三角形 FOG. 得

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

任取直線上一點 P. 則由三角形 GQP. 得

$$\tan\alpha=\frac{y-b}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

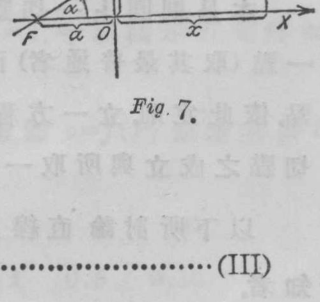

Fig. 7.

由(I),(II)兩式卽得

$$y=\frac{b}{a}x+b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

此式爲含 x 及 y 之第一級方程式.凡第一級方程式.普通書之爲

$$Ax+By+C=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

變此式與(III)式相當.則得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

此式卽爲一直線方程式.其 $\tan\alpha=-\frac{A}{B}$ 而 $b=-\frac{C}{B}$.

設有二直線.其方程式爲

1. $y=x\tan\alpha+b$

2. $y=x\tan\beta+b'$

每一方程式.皆有無數之 x 及 y 與之相合.二直線上各點之 x, y. 各不能相同.但有一對值 x_1, y_1 則可兼合乎二方程式 (*Fig.* 8). 卽二直線交點之緯經坐標也.聯立兩個第一級方程式含二未知數者之解法.無他.卽求二直線之交點而已.

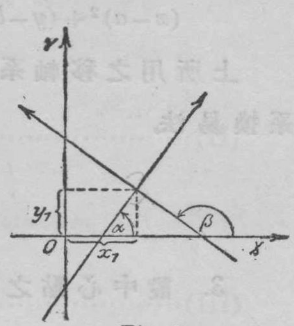

Fig. 8.

練　習　題

1. 問直線 $x-3y-7=0$ 是否通過他二直線 $2y-3x=8$ 及 $4x-7y=1$ 之交點.

2. 求二直線 $6x-7y+5=0$ 及 $56y=40+48x$ 之交點.

2. 圓之方程式