

• 惯性技术丛书 •

惯性系统陀螺传感器 热漂移的数学模型

[俄] 维·埃·扎希托夫 弗·米·潘克拉托夫 著

王同庚 赵克勇 译

奚伯齐 校



中国宇航出版社

惯性技术丛书

惯性系统陀螺传感器 热漂移的数学模型

[俄] 维·埃·扎希托夫 著
弗·米·潘克拉托夫 译
王同庚 赵克勇 校
奚伯齐 校

 中国宇航出版社

·北京·

Математические модели теплового дрейфа гироскопических датчиков инерциальных систем, / ©В. Э. Джапитов, В. М. Панкратов /Под общей редакцией академика РАН В. Г. Пешехонова. С. – Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2001, ISBN 5 – 900780 – 30 – 9.

本书中文简体字版由著作权人授权中国宇航出版社独家出版发行, 未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

著作权合同登记号:图字:01 – 2012 – 0597 号

版权所有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

惯性系统陀螺传感器热漂移的数学模型 / (俄罗斯)扎希托夫, (俄罗斯)潘克托夫著; 王同庚, 赵克勇译. -- 北京: 中国宇航出版社, 2012.2

ISBN 978 – 7 – 5159 – 0153 – 4

I. ①惯… II. ①扎…②潘…③王…④赵… III. ①惯性传感器 – 数学模型
IV. ①TP212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 015530 号

责任编辑 阎 列 责任校对 王 妍 封面设计 京鲁图文

出 版 中国宇航出版社

社 址 北京市阜成路 8 号
(010)68768548

邮 编 100830

网 址 www.caphbook.com

经 销 新华书店

发行部 (010)68371900

(010)88530478(传真)

(010)68768541

(010)68767294(传真)

零售店 读者服务部

北京宇航文苑

(010)68371105

(010)62529336

承 印 北京画中画印刷有限公司

版 次 2012 年 8 月第 1 版

2012 年 8 月第 1 次印刷

规 格 880 × 1230

开 本 1 / 32

印 张 4.75

字 数 132 千字

书 号 ISBN 978 – 7 – 5159 – 0153 – 4

定 价 38.00 元

本书如有印装质量问题, 可与发行部联系调换

《惯性技术丛书》策划委员会

总 策 划 薛晓军 王祖尧 倪志飞
策划人员 陈 坚 李欣欣 王 海 齐振恒
王 东 许玉明 王常虹 姜殿元

《惯性技术丛书》编辑部

主 任 许玉明
副 主 任 王常虹 姜殿元
成 员 伊国兴 李清华

前 言

这是一本关于什么的书

现代人对近地轨道上的宇宙飞船，在惯性空间完成复杂运动的机器人控制器，以及发射后按给定轨迹飞行的导弹都很熟悉。但是，你想过吗，导弹、直升机、飞机、飞船、潜艇和其他运动载体是如何按给定程序自动运动的呢？

由工作舱和对接舱组成的、结构复杂的空间站是用什么方式在惯性空间保持自己的方位，并完成必要的机动呢？

所有这一切都是由安装在运动载体上的控制系统来决定的，而控制系统的核心是惯性传感器和陀螺仪表。

什么是惯性信息

对“惯性信息”这个专用术语，我们理解为下列信息数据的总和，即关于运动载体运动的信息数据和运动载体角位置的信息数据，以及关于运动载体质心相对惯性坐标系运动和位置的信息数据，或者相对与运动载体质心相连的某一个已知计算坐标系运动和位置的信息数据的总和。

在运动载体上自主获得惯性信息的传感器，即根据物理定律反映载体运动的传感器叫做惯性信息传感器或惯性传感器。

应当指出，惯性传感器是极其重要的传感器，但并不是运动载体控制系统唯一的传感器。它们同其他元器件（其中包括非自主式元器件）和仪表组合在一起，完成多种任务。

这些任务包括导航（计算和确定运动载体质心的运动和地理位置）、定位（计算和确定运动载体的角位置和绕其质心的运动）和控制（在给定的位置保持稳定，按给定程序运动，进入给定区域等）。

惯性传感器还可以作为非自主系统（例如卫星导航系统）中的

辅助信息源或备用信息源使用。最典型的实例是美国的全球定位系统 GPS (Global Position System) 和俄罗斯的全球导航卫星系统 GLO-NASS (Глобальная Навигационная Спутниковая Система)。这两个系统都用于确定运动载体在地球表面坐标系的位置。

按其功能特点,所有的惯性传感器可分为两类。

第一类是构成特殊方位的仪表,即构成所谓的基准坐标系的仪表。在运动载体上,利用这些仪表模拟与惯导系统对应轴平行的坐标轴。无论运动载体如何运动,这些轴都能保持自己在惯性空间的定位。运动载体位置的确定,是通过与载体固连的读数系统的角位置与所建基准坐标系的角位置进行比较实现的。

第二类是测量用陀螺。在这些惯性传感器中,运动载体在地理坐标系中(或其他基准坐标系中)不保持固定不变的位置。陀螺的运动部件与壳体相连,再通过壳体用弹性或准弹性部件与安装了陀螺的运动载体相连。也可以通过连接产生与相对速度成正比的力矩或与载体绕某个测量轴的转角成正比的力矩。这种连接保证陀螺与载体一起旋转。在这种情况下,载体与陀螺部件之间的相对失调角与运动载体的被测参数(转角或角速度)成正比。

现代精密仪表制造业(包括运动载体导航、定位和控制系统使用仪表的制造业)最重要的发展方向之一,就是完善使用高速旋转转子的“经典”陀螺和研制新型惯性传感器,并在它们的基础上建立高精度的惯性仪表和惯导系统。

在这一工作中,现有惯性传感器的完善和新型惯性传感器的创建都最大限度地采用了各种物理原理和过程,以及它们的组合。这也是该项工作的最基本特征。

这些传感器包括采用动压液浮和静压液浮支承、电磁定心及多级和多区域温控的液浮惯性传感器,转子振动动力调谐惯性传感器,具有高速旋转球形转子的无接触支承静电陀螺,半球谐振陀螺,微机械陀螺,光纤陀螺等惯性传感器,以及许多其他类型的陀螺和系统。

陀螺的工作效率和精度在很大程度上取决于各种物理过程(机

械的、弹性的、热弹性的、流体力学的、电磁的、静电的、光学的和热学的等物理过程)的相互影响,正是这些物理过程决定了陀螺的功能。

另一个特点是,对陀螺传感器及惯性导航和定位系统的精度要求越来越高。例如,对现代高精度系统漂移的要求为每小时百分之几度,千分之几度,甚至更小[比较一下,地球自转角速度为 $15(^{\circ})/h$]。

生产如此精密的陀螺传感器,必须进行深入的、综合性的理论研究,研究机理不同的各种物理过程的相互影响及其特点,考虑这些陀螺传感器工作所处的外部环境对其性能的影响。其中,一个非常重要的影响陀螺传感器和系统精度及工作效率的因素就是:复杂的、无规则的、随机的温度作用。

在解决生产和完善、分析与综合多种类型惯性传感器、精密陀螺仪及运动载体导航、定位和控制系统的问题时,必须充分考虑温度的作用,制定一个统一的概念和方法,并通过数学算法和程序软件加以实现,这是一个非常重要和有意义的过程。

在陀螺系统非线性扰动理论中,研发一种新的途径具有相当重要的意义。这种新途径就是,在飞行器的有序运动中,确定陀螺系统输出信号中可能产生的无规则现象,从这一点出发,进一步研究陀螺系统。

本书研究的对象

·各种初始惯性信息精密陀螺传感器(液浮陀螺、动力调谐陀螺、静电陀螺、半球谐振陀螺、光纤陀螺、微机械陀螺及其他类型陀螺),陀螺装置,航天器、飞行器、舰艇及潜艇的导航、定位和控制系统。

·发生在这些惯性传感器、陀螺装置和系统中的相互影响的物理过程(力学的、弹性的、热弹性的、流体动力学的、电磁的、静电的、光学的、热学的和其他的过程),以及它们之间的相互影响及其特点。

读完这本书后,你将知道些什么

你将获得最先进的陀螺传感器概念。它们的作用原理是建立在各种物理原理及力学、电气机械学、弹性理论、热弹性理论、光学和非线性动力学等定律基础上的。

你将获得研究其工作的方法和手段，并考虑其工作介质的影响（其中包括复杂的温度作用及其影响）。

最终，你将获得惯性信息陀螺传感器非线性动态温度干扰系统的理论和概念。这是一个新课题，也是一种新途径。这种新途径是从热分析的角度研究这些系统，即在系统中测定由温度扰动引进的不规则误差的大小。

本书的特点

本书针对处于不同工作介质中的各种陀螺传感器，阐述了对其进行综合热分析方法的科学理论。温度的作用在本书中不像通常那样以某种限定的方式给出，而是以各种惯性传感器特有的、相互关联的热过程和物理过程的形式给出。

不同工作原理的惯性传感器其结构的复杂性，传感器内部物理过程的多样性与相互关联性，传感器构成零部件的多样性，以及各不相同的外部工作环境和工作频带，决定了这本书需具备超强的综合性能。本书论述的惯性传感器理论的研究方法、计算方法和性能分析方法具有广泛的实用价值。

在本书撰写过程中，作者力图做到现代数学的形式化，不仅不会使问题变得复杂化，相反，能够最显著、最大限度地反映在惯性传感器、陀螺装置和惯导系统中发生的物理过程及其本质。

书中内容的论述方式是：先阐述物理作用原理各异的陀螺传感器数学模型建模和研究的一般途径和原则；然后，把所阐述的途径和方法应用于各种类型陀螺传感器温度扰动数学模型的建立和研究。这些陀螺包括液浮陀螺、动力调谐陀螺、球形转子无接触静电陀螺、半球谐振陀螺、微机械陀螺和光纤陀螺。

本书是作者另一部著作^[2]的补充和发展。为了保持本书的完整性和论述的连续性，在本书的某些章节，引用了参考文献[2]相应的内容。

目 录

第 1 章	与机械运动、热质交换、热弹性、流体力学和光学等物理过程有关的各类陀螺传感器的数学模型	(1)
1.1	建立数学模型的问题和解决问题的构思	(1)
1.2	惯性系统陀螺传感器中热过程的研究方法及其数学模型	(5)
1.3	惯性系统陀螺传感器机械运动过程的研究方法和数学模型	(14)
1.4	研究惯性系统陀螺传感器应力变形状态的热弹性理论方法和数学模型	(17)
1.5	惯性系统陀螺传感器流体力学过程的研究方法和数学模型	(20)
1.6	惯性系统陀螺传感器光纤通道中光学过程的研究方法和数学模型	(23)
第 2 章	工作原理不同的各类惯性传感器	(28)
2.1	液浮惯性传感器的工作原理、数学模型和研究课题	(28)
2.2	转子振动动力调谐惯性传感器的作用原理、数学模型和研究课题	(38)
2.3	静电陀螺惯性传感器的作用原理、数学模型和研究课题	(47)
2.4	半球谐振惯性传感器的作用原理、数学模型和研究课题	(53)

2.5	微机械惯性传感器的作用原理、数学模型和研究课题	(64)
2.6	光纤惯性传感器的作用原理、数学模型和研究课题	(101)
2.7	惯性传感器温度扰动数学模型的系统化	(111)
第3章	建立和研究惯性传感器热扰动数学模型的特殊任务	(119)
3.1	用常规方法判定受扰动非线性陀螺系统中的无规则误差	(119)
3.2	判定受温度干扰的光纤惯性传感器中的无规则误差	(129)
第4章	结论	(139)
	参考文献	(141)

第 1 章 与机械运动、热质交换、热弹性、流体力学和光学等物理过程有关的各类陀螺传感器的数学模型

许多东西我们不理解，并不是因为我们的理解力差，而是因为这些东西没进入我们的视野。

1.1 建立数学模型的问题和解决问题的构思

在建立和研究陀螺传感器的温度扰动数学模型时，产生两个基本问题^[2]：

1) 通常情况下，要计算和分析的陀螺传感器的温度场是一个三维的、不稳定的和不均匀的温度场。

2) 要建立和研究的数学模型是一个相互关联的数学模型，既是陀螺传感器工作的数学模型(包括机械运动方程的推导)，也要考虑陀螺传感器的温度干扰因素和热漂移(温度误差)。

对上述问题的分析表明^[2]，它们之间存在一定的相互联系，这使我们可以构思一个统一的、所有不同类型和级别的陀螺传感器通用的、解决这些问题的方法。

研究工作按等级原则从陀螺或者系统的基本结构开始，从高到低进行(从陀螺的系统、部件，到组成它们的组件、零件)。

在建立陀螺传感器及其零部件中热过程的数学模型时，应考虑热过程的特点及其发生的物理过程。一般情况下，在给定的计算点，陀螺仪表的温度场是三维的、不均匀的和不稳定的，这一点在计算和

分析时必须加以考虑。

根据惯性传感器的种类、工作原理及它们的物理现象和物理过程的特点，建立干扰因素和热漂移的数学模型。在数学模型中温度场的性能是输入数据。

利用方法的、数学的、算法的和程序软件，进行计算机仿真实验，对所建数学模型进行自动化的、直观的、定性的和定量的分析。

在这一分析的基础上，必要时，按温度漂移最小化的原则，解决综合问题。进行有效的结构变化，采用算法补偿，实现惯性传感器参数或温控系统的最优化。

根据综合的结果，提出对惯性传感器及其零部件和温控系统的改进意见。

上述构思和研究方法可以用图 1-1 表示。

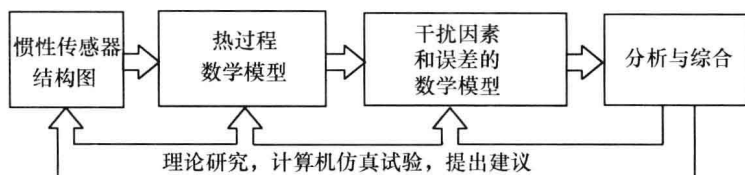


图 1-1 构思和研究方法

这样一种解决问题的综合方法，在惯性传感器温度扰动理论中许多是新内容。这是必要的，因为现代仪表制造技术包含了各种各样的传感器、仪表和系统^[1-2, 6, 11, 13-14]。它们的工作原理不同，在其内部发生的物理过程又是相互关联的。

简单讨论一下上述研究方法的几个特点。问题的复杂性和相互关联性决定了除采用传统的惯性传感器、陀螺仪表和陀螺系统研究方法外^[7]，还必须采用热状态计算方法、弹性理论和热弹性理论方法、流体力学、振动理论和光学等方法。

特别是陀螺系统温度扰动的非线性，在其内部发生的物理过程本质的多样性，以及这些物理过程之间的相互联系，决定了必须采用以前研究惯性传感器时从来没有采用过的一些方法，例如，动态系统无规则信号判定通用理论方法。

研究作用原理不同的陀螺传感器在力学、热质交换、流体力学和热弹性过程中相互作用的广义命题可采用下列表示方式。

可以把惯性传感器看成一个复杂的动态系统，该动态系统是由数量有限的零件和介质以某种方式组成的。在这个系统中，热交换过程具有可判定随机的、复杂的传导对流和辐射性能。

描述这种具有分布参数系统机械运动和热交换过程的数学模型，在其物理过程的特点确定的情况下，通常为普通代数方程组、微分方程组和偏导数方程组。

惯性传感器机械运动方程组为

$$\dot{X} = A(T_i)F(X) + B(X, T_i, \dots) \quad (1-1)$$

能量(热质传递)方程组为

$$c_{ij}\rho_{ij} \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + k_1 \mathbf{V}_j \nabla T_i \right) = \nabla (\lambda_{ij} \nabla T_i) - k_2 (3\lambda_i^* + 2\mu_i^*) \cdot \alpha_{Ti} T_{0i} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + k_3 Q_i^{\text{MC}} + Q_i^{\text{Y}} \quad (1-2)$$

在奥韦尔别克—布西内斯克逼近时(当仅在质量力中考虑参数与温度的关系时)，描述不可压缩黏稠介质不等温运动的纳维—斯托克斯方程组为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \nabla) \mathbf{V}_j = - \frac{\nabla P_j}{\rho_{0ij}} + \nu_j \nabla^2 \mathbf{V}_j + \mathbf{g} \beta_{Ti} T_i \quad (1-3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_j = 0 \quad (1-4)$$

运动中的热弹性动态方程组为

$$\rho_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_i}{\partial t^2} = \mu_i^* \nabla^2 \mathbf{U}_i + (\lambda_i^* + \mu_i^*) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{U}_i - (3\lambda_i^* + 2\mu_i^*) \alpha_{Ti} \mathbf{grad} (T_i - T_{0i}) \quad (1-5)$$

状态方程为

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}(T_i, P_j) \quad (1-6)$$

式中 $X, \dot{X}$ ——传感器或系统力学状态的 m 维矢量和它们的时间导数, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\dot{X} = \{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m\}$;

$T_i(x, y, z, t) (i=1, \dots, N)$ ——陀螺零件和热量携带者(介质)的温度场;

$V_j(x, y, z, t) (j=1, \dots, N_*)$ ——热量携带者(介质)的速度矢量场;

$U(x, y, z, t)$ ——陀螺零件变形时的位移矢量场;

$P_j(x, y, z, t)$ ——介质—热量携带者的压力场;

$A(T_i)$ ——表征陀螺传感器、陀螺仪表和陀螺系统散逸性、弹性、惯性、几何参数和其他性能的系数矩阵;

$B(X, T_i, \dots)$ ——作用在陀螺传感器、陀螺仪表和陀螺系统上的 m 维输入干扰矢量;

$c_{ij}, \rho_{ij}, \lambda_{ij}, \nu_j, \alpha_{Ti}, \beta_{Ti}$ ——材料和介质的热物理参数(比热容, 密度, 导热系数, 运动黏度系数, 温度线膨胀系数, 温度体膨胀系数);

ρ_{0ij}, T_{0i} ——介质—热量携带者和传感器零件的额定密度和额定温度;

λ_i^*, μ_i^* ——拉梅系数;

t ——时间;

g ——重力加速度;

$Q_i^{\text{MC}}, Q_i^{\text{Y}}$ ——散热元器件和温控系统热源的折算功率;

k_1, k_2, k_3 ——反映发生在作用原理不同的惯性传感器和惯性系统中的各种物理过程相关性能的系数, 通常为 0 和 1;

∇ ——那勃勒线性算子, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$;

∇^2 ——拉普拉斯算子, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

对标量函数 F , $\text{grad} F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k}$;

对矢量函数 $\mathbf{F}$, $\text{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ 。

在研究具体的惯性传感器时,需要在式(1-1)~式(1-6)中补充初始条件和边界条件,并考虑其安装固定特点和它们与外部的热交换,还要补充表征惯性传感器作用原理的特殊方程和关系式。

虽然不可能用解析方法解决如此复杂的问题,但我们推荐的广义命题,使我们在建立和分析作用原理不同的惯性传感器的热过程数学模型、温度干扰因素数学模型和温度误差数学模型时,可以采用一个统一的方法和途径。

对于现代导航和定位系统,要保证 $0.1 \sim 0.0001(^{\circ})/h$ 的精度指标,必须解决一系列问题,例如,惯性传感器类型的选择,传感器的具体结构设计和生产,在满足性能要求的同时,还要考虑传感器的工作介质。

解决这些问题,需要对许多因素进行分析,并使仪表误差最小化。对于高精度惯性传感器而言,最重要、最复杂的问题是最大限度地克服温度干扰。

1.2 惯性系统陀螺传感器中热过程的研究方法及其数学模型

在建立导航系统的最初阶段,惯性传感器被看做是简单的力学转换器,只考虑它们的运动关系。现在,为了让运动载体的导航和定位系统顺利工作,并满足精度要求,考虑所有因素的细节变得非常紧迫和必要。必须把惯性传感器看做是一个复杂的动态系统,在这个系统中进行着性质不同的相互关联的物理过程(电学的、力学的、弹性的、光学的和热学的等)。这种系统包括许多分系统,主要的分系统是动力系统和信息系统。

动力分系统具有许多特点,其中主要的特点是进入传感器的能量大部分转变成了热量。作用在陀螺敏感元件上的、造成温度场不均匀和不稳定的那部分力和力矩是不利的,正是这些力和力矩导致陀螺仪误差的产生。

正如参考文献[2]指出的那样,有些类型精密惯性传感器的温度

误差可以占到总漂移的 30%~40%，甚至更高。此外，即使生产工艺相当理想的陀螺仪，不采用专门的恒温系统也不可能使其温度误差减小。

热过程作为精密传感器动力分系统所进行的物理过程的一部分，其特殊意义在于，它在很大程度上不仅决定了传感器的精度，而且决定了它的一些重要参数，例如寿命和准备时间。从影响惯性传感器精度和准备时间的角度看，陀螺内部温度梯度的数量级达到 0.1~1℃，不同零件的温度稳定性水平达到 0.01~0.1℃，具有重要的意义。

因此，在建立和研究惯性传感器的温度扰动数学模型时，最迫切的任务之一，就是以相当高的精度确定传感器的温度场。通常情况下，在计算和分析传感器的不稳定三维温度场时产生的边值问题的复杂性(需要考虑不同的热交换类型、热源的不对称性及紧固件的特点等)，不允许我们采用在传热任务中常用的传统的和新的精确的解析方法。

用近似的数字解析方法也无法解决这个问题。由于问题的复杂性，这种级别惯性传感器温度场的计算任务可利用现代计算机，采用数值方法^[2, 4]解决。

在温度场的现代数值计算方法中，最适合该目的和要求的(要求实现起来简单、可靠、精度高和通用性等)是有限元法和有限差分法。

在古典有限差分法中，微分方程和边界条件用差分关系式近似，在此基础上，建立计算机算法。

有限元法实质上是解决边界问题的变分法。因为它是建立在边界问题两者之中必择其一的基础上的，不是以微分方程组的形式，而是以相应函数极值变分问题的形式存在。

所以，在解决上述类型的稳定问题时，有限元法的应用相当广泛。但是，正如参考文献[2]中指出的，在解决不稳定的三维问题时，优先使用有限差分法，或者将有限元法和有限差分法组合使用。这里还应当指出，在应用有限元法和有限差分法解决多维问题时，差分方程组的阶次很高。一般情况下，要解这样的方程组，没有在一维任

务中使用的那种有效算法,这种情况使得不稳定方程组的解变得特别复杂,因为在采用隐性差分法时,在时间的每一步长都要与高阶线性方程组(相对未知温度)打交道。而时间步长的数量在实际问题中可达数千个。

本书建议,采用近似数值法^[2]计算惯性传感器的三维不均匀不稳定温度场。这是一种改进的元素平衡法方案。

选择这种方法是基于研究这种级别的惯性传感器任务的复杂性、物理现象的多样性和物理过程的相关性,以及其他一些特点。

为建立热平衡,我们运用下面一些热交换的基本定律^[2, 4, 10]。

1) 能量守恒定律

$$\int_F Q_n^* dF = \frac{\partial E^*}{\partial t} = \int_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (1-7)$$

2) 傅里叶定律

$$Q_n^* = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1-8)$$

3) 牛顿定律

$$Q^* = \alpha(T - T_c) \quad (1-9)$$

4) 斯忒藩—玻耳兹曼定律

$$E = \epsilon \sigma_0 T^4 \quad (1-10)$$

式中 Q_n^* —— 垂直于表面单元 dF 的热流的总和;

F —— 某个容积 Ω 的表面积;

E^* —— 包含在容积中的被表面积 F 包围的介质内部的能量;

c —— 容积中的比热容;

Q^* —— 单位热流;

T —— 容积温度;

T_c —— 周围介质的温度;

α —— 物体表面单位传热系数;

E —— 积分辐射密度;

ϵ —— 表面黑度;