高等学校规划教材·物理学
PROGRAMMING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

数学物理方法

姚文静 编著

西北工业大学出版社

· 013033477

O411.1-43
28

高等学校规划教材·物理学

数学物理方法

姚文静　编著

北京航空航天大学
藏书
图书馆

O411.1-43
28

西北工业大学出版社

北航　C1640489

【内容简介】 本书内容由复变函数和数学物理方程两部分组成，共 17 章。主要包括复变积分、无穷级数、解析函数及其局域性展开、二阶线性常微分方程的幂级数解法、留数定理及其应用、积分变换、特殊函数、定解问题的建立、分离变量法、球函数、柱函数、格林函数法等。

本书可作为高等学校物理专业本科生和研究生教材，也可供广大工程技术人员和从事理论物理研究的科研人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/姚文静编著．—西安：西北工业大学出版社，2012.12
ISBN 978-7-5612-3551-5

Ⅰ．①数… Ⅱ．①姚… Ⅲ．①数学物理方法 Ⅳ．①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 312032 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平报社印刷厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：15
字　　数：362 千字
版　　次：2013 年 1 月第 1 版　　2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：32.00 元

前　言

数学物理方法是一门介绍如何使用数学语言描述物理现象，以及借用各种数学方法求解物理问题的课程，是物理专业必修的一门专业基础课。

笔者在承担数学物理方法课程的教学工作之前，特意前往清华大学、北京大学、北京科技大学、北京航空航天大学，以及西安交通大学、西北大学、西安电子科技大学等校的物理专业，进行了这门课程的调研，了解各校对于这门课的教学安排、学时安排、大纲要求、教学内容等；并且针对教学内容中的部分疑惑，特意请教了给清华大学和北京大学两校讲授数学物理方法的吴崇试先生。综合以上各校的调研结果并结合自身的具体教学现状，对原先分两学期讲授、共120学时的数学物理方法课程进行了改革，将其压缩为一学期90学时。

本书内容分为两大部分，第一部分是这门课程涉及的数学知识：复变函数和特殊函数；第二部分是数学物理方程。全书重点强调这门课程的灵魂内容——如何使用数学语言描述物理现象，以及借用各种数学方法求解物理问题。

本书具有以下特色：

(1)针对性。本书是针对应用物理系各本科专业开设的专业基础课——数学物理方法——编写的。已有的通用教材分为120学时和48学时两类，均不适用于90学时的课程设置。因此，本书是在综合各类通用教材的基础上，按照后续各个专业课的知识衔接需求，有选择地编写的。

(2)科学性。本书重在各章节之间的知识连贯性，注重提高学生的思考能力，培养学生使用数学工具解决物理问题的综合素质。

(3)实用性。本书内容选材适合作为物理系各专业本科生必修的专业基础课教材，由复变函数和数学物理方程两部分组成。通过本书的学习，学生可学会由物理现象出发，利用数学语言对提出的物理问题进行描述，然后运用各种数学方法求解，使问题得到合理的物理解释。

(4)可读性。本书文字简洁，条理清晰，可读性强，能够激发学生学习与思考的积极性，提高思考能力，建立相应的逻辑思维。

在本书编写过程中，笔者得到了北京大学吴崇试先生的悉心指导和建议，在此表示衷心的感谢。

在编写过程中，虽然努力做到一丝不苟、正确无误，但由于水平有限，书中不妥之处，请各位同行、读者指正。

编著者

2012年9月

目　　录

第一部分　复变函数

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第二部分　数学物理方程

第一部分　复变函数

第1章　复数和复变函数

1.1　基本概念

定义1　设有一对有序实数(a,b),遵从

(1) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$;

(2) $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

则称这一对有序实数(a,b)定义了一个复数α,且$\alpha=(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$,$a$为$\alpha$的实部,$b$为$\alpha$的虚部,记作

$$a=\mathrm{Re}\,\alpha,\quad b=\mathrm{Im}\,\alpha$$

两个复数相等指这两个复数的实部和虚部分别相等.

复数不能比较大小.

定义2　实数集$\mathbf{R}$是复数集$\mathbf{C}$的一个子集.实数a(当然可以称作复数a)记为

$$a\equiv(a,0)\equiv a(1,0)$$

$$\alpha=(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$$

$(1,0)$代表实数1,$(0,1)$称作虚单位,记作i,即$\mathrm{i}=(0,1)$.

复数乘法法则　$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$,即$\mathrm{i}^2=-1$.

定义3　$\alpha^*=a-\mathrm{i}b$与$\alpha=a+\mathrm{i}b$互为共轭,$(\alpha^*)=\alpha$.

共轭复数相乘,有

$$\alpha\cdot\alpha^*=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=(a^2+b^2,-ab+ab)=a^2+b^2$$

在此基础上,有

$$\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)}=\frac{(ac+bd)+\mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

即为复数除法法则.

定义4　复数与复平面上的点一一对应.

用矢量表示复数,a,b分别表示这个矢量在x,y轴上的投影,如图1-1所示.

复数加法满足平行四边形法则(或称作三角形法则).

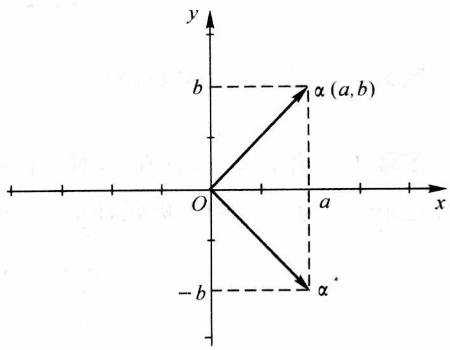

图　1-1

定义5　α用极坐标表示为$\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,$r$为$\alpha$的模,$\theta$为$\alpha$的辐角,即

$$r=|\alpha|,\quad \theta=\arg\alpha$$

有

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

三角函数具有周期性，θ 不是唯一的$(\theta+2n\pi)$，辐角具有多值性．$(-\pi,\pi]$ 之间的辐角值称为辅角的主值，即

$$\begin{aligned}\alpha_1\cdot\alpha_2 &= r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=\\ &r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]=\\ &r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)r_2(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\\ &\frac{r_1[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2)]}{r_2}=\\ &\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\end{aligned}$$

乘法 —— 模相乘，辐角相加．

除法 —— 模相除，辐角相减．

定义 6　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\frac{1}{r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

复数的表示方法见表 1－1．

表 1－1　复数的表示方法

复数 α 的表示方法	运算	复平面坐标系
$\alpha=a+\mathrm{i}b$	加减法	平面直角坐标系
$\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$	乘除法	平面直角坐标系、极坐标系
$\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	乘除法	平面直角坐标系、极坐标系

1.2　复数序列

定义 1　记$\{z_n\}$为复数序列，$z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$，$n=1,2,3,\cdots$ 它等价于两个实数序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$．

定理 1　给定$\{z_n\}$，存在 z，对于任意 $\varepsilon>0$，满足 $|z_n-z|<\varepsilon$，则 z 为$\{z_n\}$的聚点(极限点)．记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 为$\{x_n\}$的上极限，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 为$\{x_n\}$的下极限，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

定义 2　给定$\{z_n\}$，若存在 $M>0$，使任意 n 都满足 $|z_n|<M$，则$\{z_n\}$有界，否则无界．

定义 3　给定$\{z_n\}$，若存在复数 z，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$|z_n - z| < \varepsilon$，称 $\{z_n\}$ 收敛于 z，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

一个序列的极限必然是此序列的聚点，而且是唯一的聚点.

定理 2　序列极限存在（序列收敛）的柯西充要条件：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使对于任意正整数 P，有 $|z_{N+P} - z_N| < \varepsilon$.

思考　一个无界序列能收敛吗？试证明之.

1.3　复变函数

定义 1　若以某一点为圆心作一个圆，只要半径足够小，使圆内所有点属于该点集，称此点为点集的内点.

定义 2　区域 —— 同时满足下列两个条件的点集.

(1) 全部都由内点组成；

(2) 具有连通性，点集中任意两点都可以用一条折线连接起来，这线上的点全都属于此点集.

例 1　判断图 1-2 中阴影部分是否为区域.

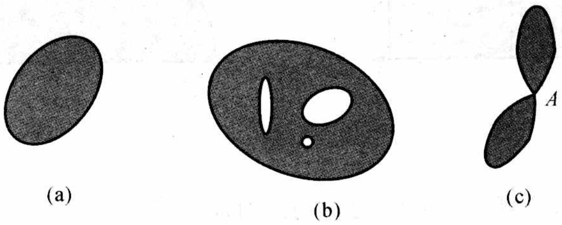

图　1-2

图 1-2(a) 和图 1-2(b) 是区域，图 1-2(c) 不是区域，因为点 A 不是内点.

相关概念：(1) 边界点：不属于区域，但以它为圆心作圆，不论半径如何小，圆内总含有区域的点.

(2) 边界：边界点的全体.

(3) 边界的方向：区域恒保持在边界的左方，此走向为边界的正向.

例 2　图示下列复数 z 的取值范围，指明边界的正方向，并判断其是否为区域.

(1) $|z| < R$；　(2) $|z| > r$；　(3) $R_1 < |z| < R_2$；

(4) $\theta_1 < \arg z < \theta_2$；　(5) $\operatorname{Im} z > 0$；　(6) $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

解　(1) $|z| < R$，如图 1-3 斜线部分所示，是区域，边界方向为逆时针.

(2) $|z| > r$，如图 1-4 阴影部分所示，是区域，边界方向为顺时针.

(3) $R_1 < |z| < R_2$，如图 1-5 斜线部分所示，不是区域，内边界方向为顺时针，外边界方向为逆时针.

(4) $\theta_1 < \arg z < \theta_2$，如图 1-6 斜线部分所示，是区域.

(5) $\operatorname{Im} z > 0$，如图 1-7 阴影部分所示，是区域，边界方向为横轴正向.

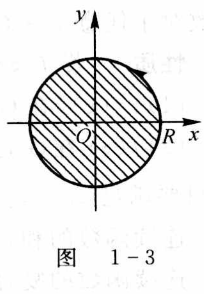

图　1-3

(6) $|z|<R$, $\mathrm{Im}z>0$,如图 1-8 阴影部分所示,是区域,边界方向为逆时针.

区域 G + 边界 c = 闭区域 $\overline{G}$.

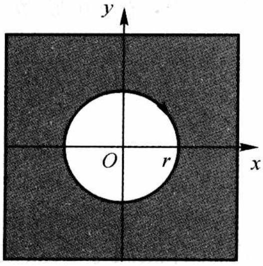

图 1-4

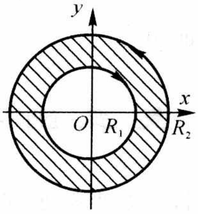

图 1-5

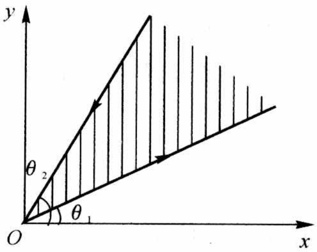

图 1-6

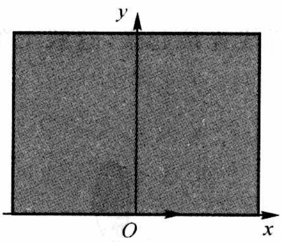

图 1-7

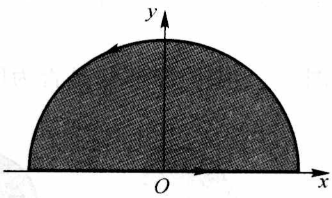

图 1-8

定义 3 设 $G\in\mathbf{C}$,若对于 $z\in G$,$\exists w$ 与之对应,w 为 z 的函数 —— 复变函数.记为 $w=f(z)$,定义域为 G,有

$$z=x+\mathrm{i}y,\quad w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

1.4 复变函数的极限和连续

定义 1 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内有意义,若存在复数 A,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,则称当 $z\to z_0$ 时,$f(z)$ 存在极限 A,记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

定义 2 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内有意义,且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,即对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$,则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.若函数对于任意 $z\in G$ 连续,称 $f(z)$ 在区域 G 内连续.

性质 若 $f(z)$ 区域 $\overline{G}$ 上连续,则

(1) $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 上有界,并达到它的上、下界;

(2) $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致连续(对于任意 $\varepsilon>0$,存在与 z 无关的 $\delta(\varepsilon)>0$,使对于任意 $z_1,z_2\in\overline{G}$,只要满足 $z_1-z_2<\delta$,就有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$).

连续函数的和、差、积、商(分母不为零的点)仍为连续函数.

连续函数的复合函数仍为连续函数.

1.5　无穷远点

定义 1　无界序列的聚点 —— 无穷远点“∞”(模大于任何正数,辐角不定).

定义 2　$\overline{\mathbf{C}}$,扩充了的复平面 = 复平面 $\mathbf{C}+\infty$,复平面上只有一个无穷远点.

定义 3　复数球面,过 $\overline{\mathbf{C}}$ 上 $(0,0)$ 点作 $R=1$ 的球面与 $\overline{\mathbf{C}}$ 相切,切点称为南极,过南极的直径另一端为北极,此球面为复数球面.

第2章 解析函数

2.1 可导与可微

定义 1 设单值函数 $w=f(z)\in G$，存在 $z\in G$，满足

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

则称 $f(z)$ 在 z 点可导，此极限称为 $f(z)$ 在 z 点的导数，记作 $f'(z)$.

定义 2 若 $w=f(z)$ 在 z 点的改变量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可写为 $\Delta w=A(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$，其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$，则称 $w=f(z)$ 在 z 点可微，$A(z)\Delta z$ 称为 w 在 z 点的微分，记作 $\mathrm{d}w=A(z)\mathrm{d}z$.

定理 1 $w=f(z)$ 在 z 点可导，则一定在该点可微，反之亦然，且 $A(z)=f'(z)$.

函数可导的必要条件 —— 柯西-黎曼方程（C-R 条件）.

若函数 $f(z)$ 在 $z=x+\mathrm{i}y$ 点可导，Δz 以任意方式趋近于 0，则 $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 趋近于同样值.

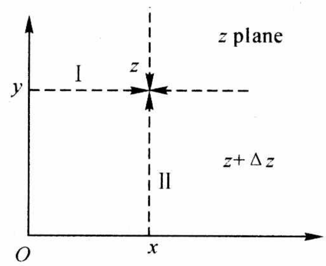

图 2-1

特殊路经一：$\Delta x\to 0$，$\Delta y=0$（平行于实轴），如图 2-1 所示.

$$\Delta z=\Delta x\to 0$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}= \qquad \text{（函数按虚部、实部分开）}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}= \qquad \text{（极限按虚部、实部分开）}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

特殊路经二：$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$（平行于虚轴），如图 2-1 所示.

$$\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}= \qquad \text{（函数按虚部、实部分开）}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}= \qquad \text{（分子、分母同乘以 }-\mathrm{i}\text{）}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\mathrm{i}u(x,y+\Delta y)+v(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}u(x,y)-v(x,y)}{\Delta y}= \qquad \text{（极限按虚部、实部分开）}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{cases}$$

此即为 C－R 条件，函数可导的必要而非充分条件.

定理 2　若 u,v 的偏导数存在且连续，C－R 条件是函数可导的充要条件.

证明　(1) 必要性：由推理过程已证.

(2) 充分性：因为 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 存在且连续，所以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可微，即

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

因为高阶无穷小量 $o(\varepsilon)$ 有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$，所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=$$

（根据 C－R 条件）

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y+\mathrm{i}\Delta x)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(\mathrm{i}\Delta y+\Delta x)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

故 $f(z)$ 可导.

导数的几何意义(见图 2－2)：

$$|\mathrm{d}w|=|f'(z)|\cdot|\mathrm{d}z|$$

$$\arg\mathrm{d}w=\arg f'(z)+\arg\mathrm{d}z$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com