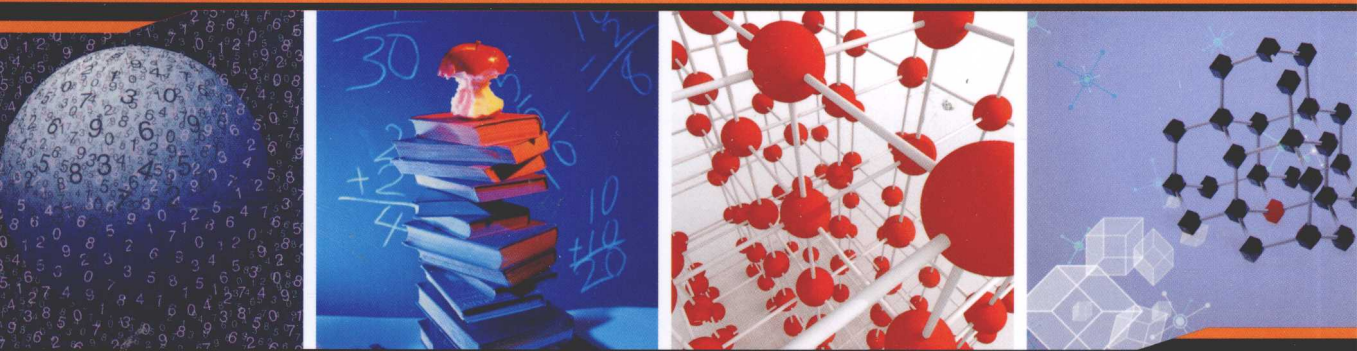


高等学校规划教材 · 物理学
PROGRAMMING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION



数学物理方法

姚文静 编著

西北工业大学出版社

013033477

0411.1-43

28

高等学校规划教材·物理学

数学物理方法

姚文静 编著



0411.1-43

28

西北工业大学出版社



C1640489

774880810

【内容简介】 本书内容由复变函数和数学物理方程两部分组成,共 17 章。主要包括复变积分、无穷级数、解析函数及其局域性展开、二阶线性常微分方程的幂级数解法、留数定理及其应用、积分变换、特殊函数、定解问题的建立、分离变量法、球函数、柱函数、格林函数法等。

本书可作为高等学校物理专业本科生和研究生教材,也可供广大工程技术人员和从事理论物理研究的科研人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/姚文静编著. —西安:西北工业大学出版社,2012.12

ISBN 978-7-5612-3551-5

I. ①数… II. ①姚… III. ①数学物理方法 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 312032 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西兴平报社印刷厂

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:15

字 数:362 千字

版 次:2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

定 价:32.00 元

前 言

数学物理方法是一门介绍如何使用数学语言描述物理现象,以及借用各种数学方法求解物理问题的课程,是物理专业必修的一门专业基础课。

笔者在承担数学物理方法课程的教学工作之前,特意前往清华大学、北京大学、北京科技大学、北京航空航天大学,以及西安交通大学、西北大学、西安电子科技大学等校的物理专业,进行了这门课程的调研,了解各校对于这门课的教学安排、学时安排、大纲要求、教学内容等;并且针对教学内容中的部分疑惑,特意请教了给清华大学和北京大学两校讲授数学物理方法的吴崇试先生。综合以上各校的调研结果并结合自身的具体教学现状,对原先分两学期讲授、共 120 学时的数学物理方法课程进行了改革,将其压缩为一学期 90 学时。

本书内容分为两大部分,第一部分是这门课程涉及的数学知识:复变函数和特殊函数;第二部分是数学物理方程。全书重点强调这门课程的灵魂内容——如何使用数学语言描述物理现象,以及借用各种数学方法求解物理问题。

本书具有以下特色:

(1)针对性。本书是针对应用物理系各本科专业开设的专业基础课——数学物理方法——编写的。已有的通用教材分为 120 学时和 48 学时两类,均不适用于 90 学时的课程设置。因此,本书是在综合各类通用教材的基础上,按照后续各个专业课的知识衔接需求,有选择地编写的。

(2)科学性。本书重在各章节之间的知识连贯性,注重提高学生的思考能力,培养学生使用数学工具解决物理问题的综合素质。

(3)实用性。本书内容选材适合作为物理系各专业本科生必修的专业基础课教材,由复变函数和数学物理方程两部分组成。通过本书的学习,学生可学会由物理现象出发,利用数学语言对提出的物理问题进行描述,然后运用各种数学方法求解,使问题得到合理的物理解释。

(4)可读性。本书文字简洁,条理清晰,可读性强,能够激发学生学习与思考的积极性,提高思考能力,建立相应的逻辑思维。

在本书编写过程中,笔者得到了北京大学吴崇试先生的悉心指导和建议,在此表示衷心的感谢。

在编写过程中,虽然努力做到一丝不苟、正确无误,但由于水平有限,书中不妥之处,请各位同行、读者指正。

编著者

2012 年 9 月

目 录

第一部分 复变函数

第 1 章 复数和复变函数	3
1.1 基本概念	3
1.2 复数序列	4
1.3 复变函数	5
1.4 复变函数的极限和连续	6
1.5 无穷远点	7
第 2 章 解析函数	8
2.1 可导与可微	8
2.2 解析函数	10
2.3 初等函数	12
2.4 多值函数	12
2.5 解析函数的物理解释——复势	16
第 3 章 复变积分	18
3.1 复变积分	18
3.2 单连通区域的柯西定理	20
3.3 复连通区域的柯西定理	22
3.4 两个有用的引理	23
3.5 柯西积分公式	24
3.6 解析函数的高阶导数	27
3.7 柯西型积分和含参量积分的解析性	28
第 4 章 无穷级数	32
4.1 复数级数	32
4.2 函数级数	33
4.3 幂级数	34
4.4 含参量的反常积分的解析性	37

第 5 章 解析函数的局域性展开	39
5.1 解析函数的泰勒展开	39
5.2 泰勒级数求法举例	40
5.3 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性	47
5.4 解析函数的洛朗展开	48
5.5 洛朗级数求法举例	50
5.6 单值函数的孤立奇点	54
5.7 解析延拓	57
第 6 章 二阶线性常微分方程的幂级数解法	59
6.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点	59
6.2 方程常点邻域内的解	60
6.3 方程正则奇点邻域内的解	65
6.4 贝塞尔方程的解	70
第 7 章 留数定理及其应用	75
7.1 留数定理	75
7.2 有理三角函数的积分	79
7.3 无穷积分	81
7.4 含三角函数的无穷积分	83
7.5 实轴上有奇点的情形	85
7.6 多值函数的积分	89
第 8 章 Γ 函数	94
8.1 Γ 函数的定义和基本性质	94
8.2 Ψ 函数	98
8.3 B 函数	100
第 9 章 拉普拉斯变换	102
9.1 拉普拉斯变换	102
9.2 拉普拉斯变换的基本性质	103
9.3 拉普拉斯变换的反演	108
9.4 普遍反演公式	116
第 10 章 δ 函数	119

第二部分 数学物理方程

第 11 章 数学物理方程和定解条件	125
11.1 弦的横振动方程	126
11.2 杆的纵振动方程	127
11.3 热传导方程	128
11.4 稳定问题	133
11.5 边界条件与初始条件	133
11.6 内部界面上的连接条件	135
11.7 定解问题的适定性	138
第 12 章 分离变量法	139
12.1 两端固定弦的自由振动	139
12.2 分离变量法的物理诠释	144
12.3 矩形区域内的稳定问题	144
12.4 多于两个自变量的定解问题	147
12.5 两端固定弦的受迫振动	149
12.6 非齐次边界条件的齐次化	159
第 13 章 正交曲面坐标系	166
13.1 正交曲面坐标系	166
13.2 圆形区域	168
13.3 亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量	170
13.4 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量	171
第 14 章 球函数	173
14.1 勒让德方程的解	173
14.2 勒让德多项式	176
14.3 勒让德多项式的微分表示(罗巨格公式)	178
14.4 勒让德多项式的正交完备性	181
14.5 勒让德多项式的生成函数	182
14.6 勒让德多项式的递推关系	184
14.7 勒让德多项式应用举例	186
14.8 连带勒让德函数	191
14.9 球面调和函数	195

第 15 章 柱函数	199
15.1 贝塞尔函数和诺依曼函数	200
15.2 贝塞尔函数的递推关系	200
15.3 贝塞尔函数的渐近展开	202
15.4 整数阶贝塞尔函数的生成函数和积分表示	203
15.5 贝塞尔方程的本征值问题	205
15.6 半奇数阶贝塞尔函数	211
15.7 球贝塞尔函数	213
第 16 章 积分变换的应用	217
第 17 章 格林函数法	220
17.1 格林函数的概念	220
17.2 稳定问题格林函数的一般性质	222
17.3 三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数	224
17.4 圆内泊松方程第一边值问题的格林函数	226
参考文献	232

第一部分 复变函数

第 1 章 复数和复变函数

1.1 基本概念

定义 1 设有一对有序实数 (a, b) , 遵从

$$(1) (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2);$$

$$(2) (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

则称这一对有序实数 (a, b) 定义了一个复数 α , 且 $\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, a 为 α 的实部, b 为 α 的虚部, 记作

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha$$

两个复数相等指这两个复数的实部和虚部分别相等.

复数不能比较大小.

定义 2 实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集. 实数 a (当然可以称作复数 a) 记为

$$a \equiv (a, 0) \equiv a(1, 0)$$

$$\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

$(1, 0)$ 代表实数 1, $(0, 1)$ 称作虚单位, 记作 i , 即 $i = (0, 1)$.

复数乘法法则 $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, 即 $i^2 = -1$.

定义 3 $\alpha^* = a - ib$ 与 $\alpha = a + ib$ 互为共轭, $(\alpha^*)^* = \alpha$.

共轭复数相乘, 有

$$\alpha \cdot \alpha^* = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2, -ab + ab) = a^2 + b^2$$

在此基础上, 有

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

即为复数除法法则.

定义 4 复数与复平面上的点一一对应.

用矢量表示复数, a, b 分别表示这个矢量在 x, y 轴上的投影, 如图 1-1 所示.

复数加法满足平行四边形法则 (或称作三角形法则).

定义 5 α 用极坐标表示为 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, r 为 α 的模, θ 为 α 的辐角, 即

$$r = |\alpha|, \quad \theta = \arg \alpha$$

有

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

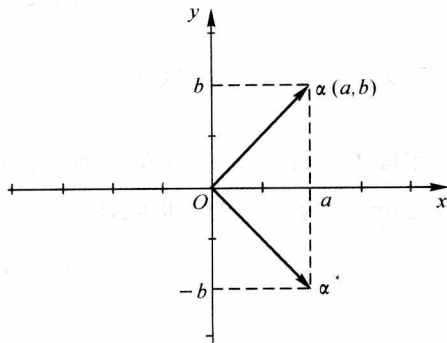


图 1-1

三角函数具有周期性, θ 不是唯一的($\theta + 2n\pi$), 辐角具有多值性. $(-\pi, \pi]$ 之间的辐角值称为辐角的主值, 即

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \alpha_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] = \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \\ &= \frac{r_1[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)]}{r_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]\end{aligned}$$

乘法 —— 模相乘, 辐角相加.

除法 —— 模相除, 辐角相减.

定义 6 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 即

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \alpha &= re^{i\theta} \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= r_1e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}\end{aligned}$$

复数的表示方法见表 1-1.

表 1-1 复数的表示方法

复数 α 的表示方法	运算	复平面坐标系
$\alpha = a + ib$	加减法	平面直角坐标系
$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	乘除法	平面直角坐标系、极坐标系
$\alpha = re^{i\theta}$	乘除法	平面直角坐标系、极坐标系

1.2 复数序列

定义 1 记 $\{z_n\}$ 为复数序列, $z_n = x_n + iy_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 它等价于两个实数序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$.

定理 1 给定 $\{z_n\}$, 存在 z , 对于任意 $\epsilon > 0$, 满足 $|z_n - z| < \epsilon$, 则 z 为 $\{z_n\}$ 的聚点(极限点). 记 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 为 $\{x_n\}$ 的上极限, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 为 $\{x_n\}$ 的下极限, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n\end{aligned}$$

定义 2 给定 $\{z_n\}$, 若存在 $M > 0$, 使任意 n 都满足 $|z_n| < M$, 则 $\{z_n\}$ 有界, 否则无界.

定义 3 给定 $\{z_n\}$, 若存在复数 z , 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$|z_n - z| < \epsilon$, 称 $\{z_n\}$ 收敛于 z , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

一个序列的极限必然是此序列的聚点, 而且是唯一的聚点.

定理 2 序列极限存在(序列收敛)的柯西充要条件: 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N(\epsilon)$, 使对于任意正整数 P , 有 $|z_{N+P} - z_N| < \epsilon$.

思考 一个无界序列能收敛吗? 试证明之.

1.3 复变函数

定义 1 若以某一点为圆心作一个圆, 只要半径足够小, 使圆内所有点属于该点集, 称此点为点集的内点.

定义 2 区域 —— 同时满足下列两个条件的点集.

- (1) 全部都由内点组成;
- (2) 具有连通性, 点集中任意两点都可以用一条折线连接起来, 这线上的点全都属于此点集.

例 1 判断图 1-2 中阴影部分是否为区域.

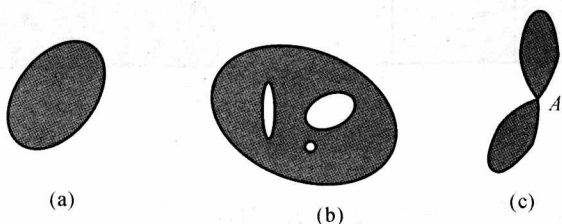


图 1-2

图 1-2(a) 和图 1-2(b) 是区域, 图 1-2(c) 不是区域, 因为点 A 不是内点.

相关概念: (1) 边界点: 不属于区域, 但以它为圆心作圆, 不论半径如何小, 圆内总含有区域的点.

(2) 边界: 边界点的全体.

(3) 边界的方向: 区域恒保持在边界的左方, 此走向为边界的正向.

例 2 图示下列复数 z 的取值范围, 指明边界的正方向, 并判断其是否为区域.

- (1) $|z| < R$; (2) $|z| > r$; (3) $R_1 < |z| < R_2$;
- (4) $\theta_1 < \arg z < \theta_2$; (5) $\operatorname{Im} z > 0$; (6) $|z| < R, \operatorname{Im} z > 0$.

解 (1) $|z| < R$, 如图 1-3 斜线部分所示, 是区域, 边界方向为逆时针.

(2) $|z| > r$, 如图 1-4 阴影部分所示, 是区域, 边界方向为顺时针.

(3) $R_1 < |z| < R_2$, 如图 1-5 斜线部分所示, 不是区域, 内边界方向为顺时针, 外边界方向为逆时针.

(4) $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, 如图 1-6 斜线部分所示, 是区域.

(5) $\operatorname{Im} z > 0$, 如图 1-7 阴影部分所示, 是区域, 边界方向为横轴正向.

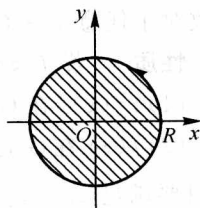


图 1-3

(6) $|z| < R, \operatorname{Im} z > 0$, 如图 1-8 阴影部分所示, 是区域, 边界方向为逆时针.

区域 G + 边界 c = 闭区域 $\bar{G}$.

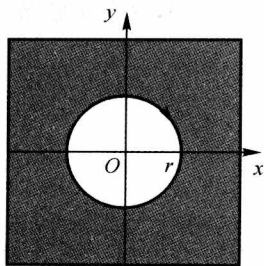


图 1-4

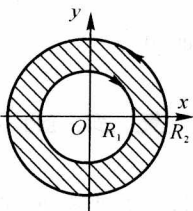


图 1-5

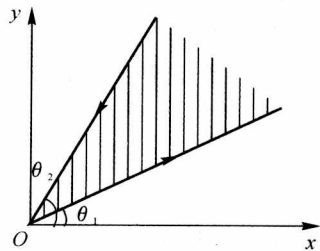


图 1-6

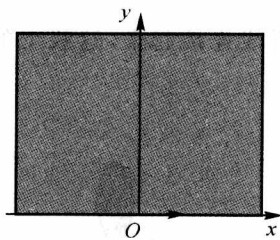


图 1-7

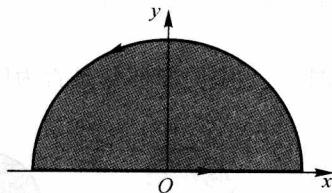


图 1-8

定义 3 设 $G \in \mathbb{C}$, 若对于 $z \in G$, $\exists w$ 与之对应, w 为 z 的函数——复变函数. 记为 $w = f(z)$, 定义域为 G , 有

$$z = x + iy, \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

1.4 复变函数的极限和连续

定义 1 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内有意义, 若存在复数 A , 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称当 $z \rightarrow z_0$ 时, $f(z)$ 存在极限 A , 记作 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

定义 2 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内有意义, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 即对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 若函数对于任意 $z \in G$ 连续, 称 $f(z)$ 在区域 G 内连续.

性质 若 $f(z)$ 区域 $\bar{G}$ 上连续, 则

(1) $|f(z)|$ 在 $\bar{G}$ 上有界, 并达到它的上、下界;

(2) $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 上一致连续 (对于任意 $\epsilon > 0$, 存在与 z 无关的 $\delta(\epsilon) > 0$, 使对于任意 $z_1, z_2 \in \bar{G}$, 只要满足 $z_1 - z_2 < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$).

连续函数的和、差、积、商 (分母不为零的点) 仍为连续函数.

连续函数的复合函数仍为连续函数.

1.5 无穷远点

定义 1 无界序列的聚点——无穷远点“ ∞ ”(模大于任何正数,辐角不定).

定义 2 $\bar{C}$,扩充了的复平面=复平面 $C + \infty$,复平面上只有一个无穷远点.

定义 3 复数球面,过 $\bar{C}$ 上 $(0,0)$ 点作 $R=1$ 的球面与 $\bar{C}$ 相切,切点称为南极,过南极的直径另一端为北极,此球面为复数球面.

第2章 解析函数

2.1 可导与可微

定义 1 设单值函数 $w=f(z) \in G$, 存在 $z \in G$, 满足

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

则称 $f(z)$ 在 z 点可导, 此极限称为 $f(z)$ 在 z 点的导数, 记作 $f'(z)$.

定义 2 若 $w=f(z)$ 在 z 点的改变量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可写为 $\Delta w=A(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$, 其中 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$, 则称 $w=f(z)$ 在 z 点可微, $A(z)\Delta z$ 称为 w 在 z 点的微分, 记作 $dw=A(z)dz$.

定理 1 $w=f(z)$ 在 z 点可导, 则一定在该点可微, 反之亦然, 且 $A(z)=f'(z)$.

函数可导的必要条件——柯西-黎曼方程(C-R 条件).

若函数 $f(z)$ 在 $z=x+iy$ 点可导, Δz 以任意方式趋近于 0, 则 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 趋近于同样值.

特殊路径一: $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y=0$ (平行于实轴), 如图 2-1 所示.

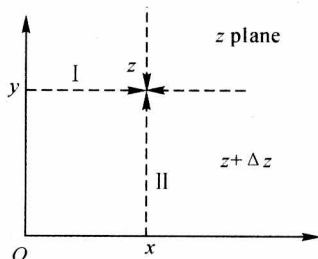


图 2-1

$$\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

(函数按虚部、实部分开)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} =$$

(极限按虚部、实部分开)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

特殊路径二: $\Delta x=0, \Delta y \rightarrow 0$ (平行于虚轴), 如图 2-1 所示.

$$\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

(函数按虚部、实部分开)

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} =$$

(分子、分母同乘以 $-i$)

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-iu(x, y + \Delta y) + v(x, y + \Delta y) + iu(x, y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

(极限按虚部、实部分开)

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

则有

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

此即为 C-R 条件, 函数可导的必要而非充分条件.

定理 2 若 u, v 的偏导数存在且连续, C-R 条件是函数可导的充要条件.

证明 (1) 必要性: 由推理过程已证.

(2) 充分性: 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 存在且连续, 所以 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可微, 即

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

因为高阶无穷小量 $o(\epsilon)$ 有 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$, 所以

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})}{\Delta x + i \Delta y} =$$

(根据 C-R 条件)

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} (-\Delta y + i \Delta x)}{\Delta x + i \Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (i \Delta y + \Delta x)}{\Delta x + i \Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

故 $f(z)$ 可导.

导数的几何意义(见图 2-2):

$$\begin{aligned} |dw| &= |f'(z)| \cdot |dz| \\ \arg dw &= \arg f'(z) + \arg dz \end{aligned}$$