21shiji gaodeng yuanxiao | 21世纪高等院校 **通识教育**规划教材 | tongshi jiaoyu guihua jiaocai

高等数学学习指导

◎ 高军安 王香柯 主编

Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21shiji gaodeng yuanxiao | 21世纪高等院校 通识教育规划教材 | tongshi jiaoyu guihua jiaocai

高等数学学习指导

◎ 高军安 王香柯 主编

Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（C I P）数据

高等数学学习指导 / 高军安，王香柯主编. -- 北京
: 人民邮电出版社，2012.9
21世纪高等院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-29235-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①高… ②王… Ⅲ. ①高等数学－高
等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第205690号

内 容 提 要

本书以高等学校现行主流高等数学教材为蓝本，围绕高等数学学习中普遍存在的疑问、错见及困惑，精选了700余道典型例题及85个疑难问题，多角度诠释了高等数学的基本概念与基本定理的内涵与外延及各知识点间的内在联系，并对散见于主教材中的解题方法与技巧进行了归纳总结，有助于加深对数学概念的理解，增强对数学知识的“悟性”．书中还介绍了一些考研常识、答题策略、试题统计分析等考研相关内容.

本书可作为普通高等院校师生的教学参考书，也可作为硕士研究生入学考试前的复习资料及自学考试有关人员的复习用书.

21世纪高等院校通识教育规划教材

高等数学学习指导

◆ 主　编　高军安　王香柯
　责任编辑　贾　楠
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京艺辉印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：21.5　2012年9月第1版
　字数：540千字　2012年9月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-29235-3

定价：43.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

本书编委会

主　编：高军安　王香柯

编　委：谢淑翠　郑　青　雷敏茹　赵美霞　苟　素　高玉芬

雷飞燕　臧顺全　孔祥凤

前　言

“高等数学”是高等学校理、工、管、经等学科各专业必修的一门十分重要的理论基础课，是大多数专业硕士学位研究生入学必考课程. 学好高等数学对后继课程的学习有举足轻重的作用.

从“高等数学”课程自身的特点来讲，概念多、公式多、定理多；从课程的教学现状来讲，学时少，内容多，进度快. 主客观因素相互作用，使得“囫囵吞枣”、“食而不化”成为许多同学“高等数学”学习过程的自画像. “上课听得懂，做题无思路”成为大学一年级学生的共同感慨. 本书正是为破解这些难题而作的，它试图帮助高等数学初学者理解其概念，梳理课程重点，化解课程难点，在千变万化的解题方法中归纳出一些基本的原则，并为打算继续深造的同学做好导航.

在内容的取舍上，本书以高等学校现行主流《高等数学》教材为蓝本，同时兼顾通用性，力求消除因主教材不同带来的不便. 在篇章结构上，全书从初学者实际出发，按“释疑解难、题型与方法、考研窗口”3 个模块谋篇布局，力求贯彻“不求所有，但求所用”的原则. 对学习中普遍存在的疑问、错见及困惑，以简单明了的实例、图表等初学者喜闻乐见的形式进行比较、剖析、总结，并作适当的引申和扩展，浓缩成“释疑解难”列于各章之首，其中的“疑难”或来源于初学者的学习反馈，或教师的教学体会；有些可与主教材同步阅读，有些宜在学完主教材相应章节内容之后阅读. “题型与方法”模块以题型为“靶”，重在归纳和总结散见于教材中的解题方法与技巧，以弥补课内教学重演绎轻归纳之不足. “考研窗口”模块则以介绍考研常识、答题策略、试题统计分析 (以数学一为依据) 为重点，重在指引方向，点到为止，避免陷入“题海”.

参加本书编写的老师按章节顺序依次为：高玉芬、高军安、赵美霞、雷敏茹、臧顺全、雷飞燕、郑青、苟素、孔祥凤、王香柯、谢淑翠. 全书由高军安统纂定稿.

在本书编写过程中，我们参阅了大量近几年国内外出版的相关教材与参考书，在此特向各位作者致谢.

限于作者水平，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

2012 年 7 月

目　录

第 1 章 函数与极限

一、释疑解难

1. 反三角函数是三角函数在其定义域上的反函数吗?

答 不是. 因为三角函数是周期函数，不是单射函数，所以三角函数在其定义域上没有反函数. 所谓反三角函数，实际上是三角函数在其某个单调区间上的反函数. 比如，将正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域限制在其单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上时，其反函数是存在的，这个反函数通常定义为反正弦函数，记作

$$y=\arcsin x,\ x\in[-1,1].$$

此处 $\arcsin x$ 是一个角的符号，这个角的范围是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，这个角的正弦值是

$$\sin\arcsin x=x.$$

其他反三角函数定义如下:

余弦函数 $y=\cos x$ 在其单调区间 $[0,\pi]$ 上的反函数定义为反余弦函数，记作

$$y=\arccos x,\ x\in[-1,1].$$

正切函数 $y=\tan x$ 在其单调区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数定义为反正切函数，记作

$$y=\arctan x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

余切函数 $y=\cot x$ 在其单调区间 $(0,\pi)$ 内的反函数定义为反余切函数，记作

$$y=\operatorname{arccot} x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 如何论证一个函数为无界函数?

答 无界函数是有界函数的否定，因此对于这类函数，当自变量在某个范围内变化时，对应函数值的绝对值会大于事先指定的任意正数. 根据无界函数的这一特点，可以采用如下三种策略之一证明一个函数为无界函数（以说明“函数 $y=x\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界”为例）.

①**反证法** 设函数 $y=x\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，则存在正数 M，使得对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$. 但当 $x=2([M]+1)\pi$ 时，对应函数值的绝对值为

$$|f(x)|=2([M]+1)\pi>M.$$

矛盾! 所以函数 $y=x\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

②**数列法** 在自变量的变化范围内取一数列 $\{x_n\}$，使 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$: 取 $x_n=n\pi$（$n=1,2,\cdots$），则

$$f(x_n)=x_n\cos x_n=(-1)^n n\pi\to\infty\ (n\to\infty),$$

所以函数 $y=x\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

③**综合法** 对任意的正数 M，取 $x=2([M]+1)\pi$，则 $|f(x)|=2([M]+1)\pi>M$，所以函数 $y=x\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

3. 无穷大量与无界函数的区别与联系如何？

答 两者的区别是：无穷大量与自变量的趋向相联系，它是指在自变量的某种趋向下，对应函数值趋于无穷；而无界函数与自变量的变化范围相联系，它是指自变量在某一范围变化时，对应函数值的绝对值会大于事先指定的任意正数.

它们的联系是：如果 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大，则函数 $f(x)$ 必在以 x_0 为端点的区间上无界；但反过来，当 $f(x)$ 在以 x_0 为端点的区间内无界时，$f(x)$ 未必是 $x\to x_0(\pm 0)$ 时的无穷大. 例如，$y=x\cos x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内无界，但它并非 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

4. 数列极限和函数极限的区别与联系如何？

答 二者的区别是：在数列极限中，自变量 n 的变化过程是“跳跃”的（只取正整数），且变化过程唯一，即 $n\to\infty$；而在函数极限中，自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有：$x\to x_0$，$x\to x_0-0$，$x\to x_0+0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

二者的联系是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\text{或 }\infty)$ 的充分必要条件是对于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内任一数列 $\{x_n\}$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A(\text{或 }\infty)$.

利用数列极限与函数极限的上述关系，可以得到利用数列极限讨论函数极限的下列应用问题.

① 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 常用的方法是找出一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$，使 $\{f(x_n)\}$ 发散；或找出两个收敛于 x_0 且不等于 x_0 的数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$，使数列 $\{f(x_n)\}$ 与数列 $\{f(y_n)\}$ 的极限不同.

例 1.1 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 这里 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. 取

$$x_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x_n)=(-1)^n$（$n=1,2,\cdots$）. 显然 $\{f(x_n)\}$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

② 证明当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大. 常用的方法是找一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$（$x_n\neq x_0$），使 $f(x_n)\nrightarrow\infty$（$n\to\infty$）.

例 1.2 证明：当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大.

证 这里 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$（$n=1,2,\cdots$），则 $x_n\to 0$（$n\to\infty$），但

$$f(x_n)=2n\pi\sin 2n\pi=0\nrightarrow\infty\ (n\to\infty),$$

故当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大.

③证明函数 $f(x)$ 在 D 上无界. 常用的方法是在 D 内找一数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

例 1.3　证明：$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,\ 1]$ 上无界.

证　这里 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ （$n=1,2,\cdots$），则 $x_n\in(0,\ 1]$ 且

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty\ （n\to\infty），$$

故函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,\ 1]$ 上无界.

5. 本章介绍的求极限的方法有哪些?

答　本章介绍的求极限的方法共有 6 种：四则运算法、换元法、夹逼法、等价替换法、代入法及对数法. 下面举例说明.

例 1.4　设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$（$A$ 为非零实数），且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，求证：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

证　应用极限的四则运算法则. 因为

$$f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\ (x\neq x_0),$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=0.$$

例 1.5　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ （$a>0$）；　　(2) $\lim\limits_{s\to 0}\left(\dfrac{1}{s\sqrt{1+s}}-\dfrac{1}{s}\right)$.

解　应用换元法.

(1) 由对数的性质，有

$$\sqrt[n]{a}=\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}.$$

令 $u=\dfrac{\ln a}{n}$，则 $u\neq 0$且$u\to 0$ （$n\to\infty$），于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}=\lim_{u\to 0}\mathrm{e}^{u}=1.$$

(2) 令 $u=\sqrt{1+s}$，则 $u\neq 1$且$u\to 1$ $(s\to 0)$，于是

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s\sqrt{1+s}}-\frac{1}{s}\right)=\lim_{u\to 1}\frac{1-u}{u(u^2-1)}=-\lim_{u\to 1}\frac{1}{u(u+1)}=-\frac{1}{2}.$$

例 1.6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解　用夹逼法求解.

(1) 因为

$$5=\sqrt[n]{5^n}<\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}<\sqrt[n]{3\cdot 5^n}=5\sqrt[n]{3},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}5\sqrt[n]{3}=5$. 所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}=5$.

(2) 因为

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

所以当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$；当 $x<0$ 时，$1-x>x\left[\dfrac{1}{x}\right]\geqslant 1$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to-0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. 故

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

例 1.7 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x-1}$.

解 用等价替换法求解.

(1) 当 $n\to\infty$ 时, $\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

(2) 当 $x\to 1$ 时, $x^x-1\sim x\ln x\sim x(x-1)$, 所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} x=1.$$

例 1.8 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(x+1)}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解 所给极限均为初等函数的极限, 考虑用代入法求解.

(1) 因为 $\dfrac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(x+1)}$ 为初等函数, 其定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,0]$, $x=0$ 是定义域区间 $(-1,0]$ 中的点, 所以

$$\lim_{x\to -0}\frac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(x+1)}=\frac{e^0\cos 0}{\arcsin(0+1)}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) 因为 $\ln u$ 为初等函数, 其定义域为 $(0,+\infty)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0,$$

其中 $u=\dfrac{\sin x}{x}$.

6. 利用等价无穷小替换求极限时应注意的问题

例 1.9 有人说, 在求函数的极限时, 代数和中的无穷小项也可进行等价替换, 并以极限

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

为例, 给出如下的佐证演示, 你认为对吗? 为什么?

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}\tag{1.1}$$

即

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

答 不对. 事实上, 式 (1.1) 中的三个等号都是无效的. 首先, 第一个等号是应用四则运算法则的结果, 但该等号右端的两个极限都不存在, 所以这是一个无效的等号; 其次, 第二个等号是应用等价无穷小替换的结果, 但因等号两端均无意义, 所以也是一个无效等号; 最后, 第三个等号也是应用四则运算法则的结果, 但该等号左端的两个极限都不存在, 所以这又是一个无效的等号.

正确的做法应是

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

7. 应用极限的换元法求极限时应注意的问题

例 1.10 设 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$，$\varphi(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 关于极限 $\lim\limits_{x\to 0} f[\varphi(x)]$，有人给出了如下的分析过程，你认为对吗？

令 $u=\varphi(x)$，则容易得到 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$. 于是由极限的换元法可得

$$\lim_{x\to 0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to 0} f(u)=1.$$

答 这个分析不对. 错在尽管 $u\to 0\ (x\to 0)$，但在趋向 $x\to 0$ 下，“$u\neq 0$”这个条件不成立，即换元法成立的条件未完全满足，故所作换元是无效的. 例如，取

$$f(u)=\begin{cases} 1, & u\neq 0, \\ 0, & u=0, \end{cases}$$

则易知 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$，但 $f[\varphi(x_n)]=0\nrightarrow 1\ (n\to\infty)$，其中 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0\ (n\to\infty)$. 所以 $f[\varphi(x)]\nrightarrow 1\ (x\to 0)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f[\varphi(x)]\neq \lim\limits_{u\to 0} f(u)$.

8. 如何求函数的间断点并判断其类型？

答 在实际问题中，常见的函数大多为初等函数或分段函数（分段函数在每一段内通常也为初等函数）. 由初等函数的连续性可以知道，这些函数可能的间断点为函数定义域区间的分界点① 与分段点. 显然，前者可通过确定函数的定义域而得到，后者可通过观察函数的表达式获得. 对可能间断点的进一步确认与分类，则需分析函数在这些点处的左、右极限及函数值.

9. 为什么不能说初等函数在其定义域内处处连续？

答 因为定义域中可能包含孤立点. 比如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $\left\{x\,|\,x=2k\pi\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，其定义域中的点都为孤立点，而 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 及其邻域内有定义. 函数在孤立点的邻近无定义，不具备连续的条件，因此初等函数在孤立点处不可能连续. 正确的说法是“初等函数在其定义区间内处处连续”.

10. 如何确定幂指函数的极限？

答 幂指函数通常是指形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数，其中 $u(x)$、$v(x)$ 是 x 的函数. 比如 x^x、$x^{\sin x}$、$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 等都是幂指函数. 关于这类函数的极限，某些情况下可化归为重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

而通用的方法则是对数法. 以 $x\to x_0$ 为例，其步骤为：

① 令 $y=u(x)^{v(x)}$；

② 取对数 $\ln y=v(x)\ln u(x)$；

③ 求出 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)=A$；

④ 利用恒等式 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ 给出幂指函数的极限为

---

① 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，但在 x_0 的某去心邻域内有定义，则称 x_0 为 $f(x)$ 的定义域区间的分界点.

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \begin{cases} 0, & A=-\infty, \\ e^A, & A\in \mathbf{R}, \\ +\infty, & A=+\infty, \end{cases}$$

显然，上述过程第③步是关键. 本章常见的情形为以下两种.

情形 1：$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$，此时

$$\lim_{x\to x_0} v(x)\ln u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x)[u(x)-1],$$

其中应用了等价关系 $\ln u(x)\sim [u(x)-1]$.

情形 2：$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$，其中 b 为实数，此时

$$\lim_{x\to x_0} v(x)\ln u(x) = b\ln a.$$

11. 常见错误剖析

例 1.11 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

【错解】 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x} = 0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

【剖析】 这里 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，因此对乘积 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 应用极限四则运算法则的条件不具备；其次，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 无意义，因此乘积 $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 亦无意义，故上述做法是错误的. 正确的解法是利用无穷小量的性质求解. 事实上，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，由无穷小量的性质，得

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 1.12 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

【错解】 因为 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x^2+x}\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x} - \lim_{x\to+\infty} x = \infty-\infty=0.$$

【剖析】 首先，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=\infty$ 属极限不存在的情形，因此不能应用差的极限运算法则. 其次，∞ 仅是一个符号，不能像数那样运算，故 $\infty-\infty$ 是无意义的. 正确的解法为

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-1}}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 1.13 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

【错解】 由重要极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

【剖析】 此解法只注意到了函数的“形状”与重要极限中函数的“形状”一致，却忽视了自变量变化过程的差异性. 事实上 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$.

二、 题型与方法

1. 用定义证明极限等式

用定义证明数列的极限，就是要对任意给定的正数 ε，求出 N 或指出其存在. 由于 N 不唯一，故在寻找的过程中常采用“放大”和“加入限制条件”等技巧，将问题转化为求解一个简单的不等式.

例 1.14　用极限的定义证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a\neq 0)$.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$. 因为

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n}\leqslant\frac{1}{n},$$

所以，要使

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon, \tag{1.2}$$

只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则由以上分析可知，当 $n>N$ 时，恒有式 (1.2) 成立. 由极限的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$. 因为 a 为常数，所以存在正整数 $m\geqslant|a|$，于是

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{C}{n},$$

其中

$$C=\frac{|a|^m}{(m-1)!}.$$

所以，要使

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon, \tag{1.3}$$

只要 $\dfrac{C}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{C}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\dfrac{C}{\varepsilon}\right]$，则由以上分析可知，当 $n>N$ 时，恒有式 (1.3) 成立. 由极限的定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a\neq 0)$.

例 1.15　对于数列 $\{x_n\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证　$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 知，存在正整数 K_1，使得当 $k>K_1$ 时，恒有

$$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon.$$

同理，存在正整数 K_2，使得当 $k>K_2$ 时，恒有

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$，由以上结论知，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 分段函数在分段点处的极限

当分段点 $x=a$ 两侧函数的表达式不同时，若要求分段点处的极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$，则需分别考察左极限 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$. 此外，求左右极限时，记住下列结论是有益的：

① $\lim\limits_{x\to -0}[x]=-1$,　　　$\lim\limits_{x\to +0}[x]=0$;

② $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{sgn}x=-1$，　　$\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{sgn}x=1$；

③ $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$，　　$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$；

④ $\lim\limits_{x\to-0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，　　$\lim\limits_{x\to+0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

例 1.16　求当 $x\to0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的左右极限，并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解　$f(x)$ 可化为 $f(x)=1\ (x\neq0)$，所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}1=1.$$

因此 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$.

$g(x)$ 可化为 $g(x)=\operatorname{sgn}x\ (x\neq0)$，所以

$$\lim_{x\to-0}g(x)=-1,\qquad \lim_{x\to+0}g(x)=1.$$

由于左右极限不相等，所以 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在.

例 1.17　设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+[x], & x\leqslant0.\end{cases}$$

试问 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在？

解　$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在的充分必要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ 均存在且相等. 由于

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\big(a+[x]\big)=a-1,\qquad \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $a-1=1$，即 $a=2$.

例 1.18　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}-2[x]\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$.

【分析】　所给函数的表达式虽不是分段表示形式，但当 $x\to0$ 时，极限式中包含 $|x|$、$\dfrac{1}{x}$ 等表达式，故应分左右极限讨论.

解　(1) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}-2[x]$，因为

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-1,\qquad \lim_{x\to-0}[x]=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=(-1)-2(-1)=1$. 又

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to+0}[x]=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1-2\times0=1$. 由于左右极限相等，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，即原式 $=1$.

(2) 令 $f(x)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}$，因为当 $x\to-0$ 时，

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\dfrac{2+0}{1+0}-1=1$. 又

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}+1}+\frac{x}{|x|}\right)=0+1=1.$$

由于左右极限相等，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，即原式 $=1$.

3. 未定式极限[①]

① 零因子消去法

例 1.19　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

【分析】　极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，因此要先消零因子再求解.

解

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]\\&=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

② 化为重要极限求解

例 1.20　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$.

【分析】　所给极限都为 1^∞ 型未定式. 考虑化为重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}、\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

解　(1) 由上述结论与极限的换元法，不难得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-1}$，所以

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1.$$

(2) 令

$$\frac{n^2+1}{n^2-1}=1+u,$$

得 $n^2=\dfrac{2}{u}+1$，且 $u\to0\ (n\to\infty)$，所以

$$原式=\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{2}{u}+1}=\lim_{u\to0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^2\cdot(1+u)=\mathrm{e}^2.$$

③ 等价替换法

常用的等价关系如下：

---

① 参见高军安主编《高等数学》(上) 第三章第二节内容.

$$(1+\otimes)^{\mu}-1\sim\mu\otimes,\qquad a^{\otimes}-1\sim\otimes\ln a,\qquad \ln(1+\otimes)\sim\otimes,$$
$$\sin\otimes\sim\otimes,\qquad \arcsin\otimes\sim\otimes,$$

其中 $\otimes\to 0(\otimes\neq 0)$.

例 1.21 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]$.

【分析】 所求极限均为 $\infty\cdot 0$ 型未定式，因此可考虑先作等价替换.

解 (1) 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{1+2x^{-2}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 2x^{-2}=x^{-2},$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{1+2x^{-2}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{-2}=1.$$

(2) 当 $n\to\infty$ 时,

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)},$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

例 1.22 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot(\mathrm{e}^{\tan 2x}-1)}{(x^5+3x^3-2x^2)\cdot\sin\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{5x-1}-x)\cdot\tan 2(x-1)}{(x-1)^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) 当 $x\to 0$ 时,

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \mathrm{e}^{\tan 2x}-1\sim\tan 2x\sim 2x,$$
$$x^5+3x^3-2x^2\sim-2x^2,\qquad \sin\sin x\sim\sin x\sim x.$$

由等价替换法得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot 2x}{-2x^2\cdot x}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $x\to 1$ 时，$\tan 2(x-1)\sim 2(x-1)$，且

$$\begin{aligned}x^{5x-1}-x&=x(x^{5x-2}-1)=x[\mathrm{e}^{(5x-2)\ln x}-1]\\&\sim x\cdot(5x-2)\ln x\\&\sim x(5x-2)(x-1).\end{aligned}$$

由等价替换法得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x(5x-2)(x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}2x(5x-2)=6.$$

(3) 当 $x\to 0$ 时,

$$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2,\qquad \sqrt{1+\sin x}-1\sim\frac{\sin x}{2}\sim\frac{x}{2},$$

$$\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)\sim x\cdot(-\frac{x^2}{2})=-\frac{x^3}{2}.$$

由等价替换法得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{\frac{x^2}{3}\cdot\frac{x}{2}}=-3.$$

【注】　本题易出现这样的错误：由 $\sin x\sim x$、$\tan x\sim x\quad(x\to 0)$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=0.$$

④ 对数法

例 1.23　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$；　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{n}+\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$.

解　(1) 令 $y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$，取对数

$$\ln y=\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以，原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$，取对数得

$$\ln y=\frac{1}{x-a}\ln\frac{\sin x}{\sin a}.$$

由于

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\ln\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x-a)\sin a}=\cot a,$$

故原式 $=\mathrm{e}^{\cot a}$.

(3) 令 $y=\left(\sin\dfrac{2}{n}+\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$，取对数，得

$$\ln y=n\ln\left(\sin\frac{2}{n}+\cos\frac{1}{n}\right).$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln y&=\lim_{n\to\infty}n\left(\sin\frac{2}{n}+\cos\frac{1}{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{2n^2}\right)\\&=2+0=2,\end{aligned}$$

所以，原式 $=\mathrm{e}^2$.