21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

主编／杨蕤 副主编／李臣波 周寻 陈剑 主审／李红裔

数值分析

（第五版）全程导学及习题全解

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOTONGBUFUDAO

主编/杨蕤 副主编/李臣波 周寻 陈剑 主审/李红裔

数值分析

(第五版)全程导学及习题全解

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

数值分析(第五版)全程导学及习题全解 / 杨蕤主编.
—北京:中国时代经济出版社, 2012.1
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-5119-1018-9
Ⅰ.①数…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①数值分析－高等学校－教学参考资料
Ⅳ.①O241
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 274689 号

书　　名: 数值分析(第五版)全程导学及习题全解
作　　者: 杨　蕤

出版发行: 中国时代经济出版社
社　　址: 北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码: 100069
发行热线: (010)68320825　83910219
传　　真: (010)68320634　68320584
网　　址: www.cmepub.com.cn
电子邮箱: zgsdjj@hotmail.com
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 北京昌平百善印刷厂
开　　本: 787 × 1092　1/16
字　　数: 300 千字
印　　张: 17.25
版　　次: 2012 年 9 月第 1 版
印　　次: 2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5119-1018-9
定　　价: 25.00 元

内容提要

本书是根据清华大学出版社出版的由李庆扬、王能超、易大义编写的《数值分析》（第五版）配套学习辅导和习题解答。编写的重点在于对《数值分析》（第五版）教材中各章节全部思考题和习题给予精解详答，并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进的帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《数值分析》给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科生、研究生《数值分析》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研（博）强化复习的指导书。也可以作为《数值分析》课程教师的教学参考用书。

前　言

《数值分析》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《数值分析》课程的理论精髓和解题方法，根据清华大学出版社出版的由李庆扬、王能超、易大义等编写的《数值分析》（第五版）教材，编写本辅导教材。书中总结了《数值分析》课程各部分的基本内容和要点，通过典型例题阐述了对各种概念的正确理解、数值方法的合理使用以及各种性质的分析，这些典型例题既包括解题技巧，也包括方法的具体实现。对于一些容易混淆的问题，分析了出错的原因并给出正确的解法。各章还包括复习题和计算实习题，方便读者复习、理解及在计算机上实际计算。根据《数值分析》教材全书共分为九章，着重从以下几方面的内容编写：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

思考题和习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本次编写将第五版中删除的习题作为补充题放在每章节的最后，以供读者参考。

本教材由杨蕤、李臣波、周寻、陈剑等编写，全书由李红裔老师主审。李红裔老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此深表感谢。本书编写过程中得到赵迪、谢婧、任卉等老师的大力帮助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的支持和帮助，在此表示忠心的感谢！对

《数值分析》教材作者李庆扬、王能超、易大义教授，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月

目　　录

第一章　数值分析与科学计算引论

本章知识要点及思想方法

1. 数值计算的误差来源与分类

(1)截断误差(方法误差)

数学模型不能得到精确解时,用数值方法求得的近似解与精确解之间的误差.

(2)舍入误差

用计算机做数值计算时,由于计算机的字长有限,原始数据在表示和计算过程中产生的误差.

两种误差的来源不同,处理方式也不尽相同.截断误差由建立的模型完全决定,应结合具体算法进行分析;而舍入误差主要由计算机性能及算法过程所决定.

2. 误差与有效数字

(1)绝对误差(误差)

若 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,则称 $e^* = x^* - x$ 为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差.

(2)绝对误差限

绝对误差绝对值的上界,记为 ε^*.

(3)相对误差

近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}.$$

称为近似值 x^* 的相对误差,记为 ε_r^*.

(4)相对误差限

相对误差的绝对值上界,记为 ε_r^*.

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}.$$

(5)有效数字

①定义

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共 n 位,就说

x^* 有 n 位有效数字.

②有效数字与相对误差限的关系

设近似值 x^* 表示为

$$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_l\times 10^{-(l-1)})$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1\neq 0$,m 为整数,若 x^* 具有 n 位有效数字,则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)},$$

反之,若 x^* 的相对误差限

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)},$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

(6)数值运算的误差估计准则

$$\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*).$$

$$\varepsilon(x_1^*x_2^*)=|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*).$$

$$\varepsilon(x_1^*/x_2^*)\approx\frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}.$$

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

$$\varepsilon(f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*))\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*).$$

3. 避免误差危害的若干原则

(1)避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法

(2)避免相近数的减法

(3)避免大数"吃"小数

(4)减化计算步骤,减少运算次数.

典型例题分析与讲解

例 1 下列各数都是通过四舍五入得到的近似值,试指出它们各有几位有效数字.

$x_1^*=0.10$, $x_2^*=0.00356$, $x_3^*=3\times 10^3$

解

$x_1^*=0.10$ 两位有效数字

$x_2^*=0.00356$ 三位有效数字

$x_3^*=3\times 10^3$ 一位有效数字

例 2 设 x 的相对误差界为 δ,求 x^n 的相对误差界.

解

设 δx 是与 x 的相对误差限 δ 对应的绝对误差限，即有

$\frac{\delta x}{|x|}=\delta$

若 $f(x)=x^n$，

则

$$\delta_r f(x) \leqslant \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \delta x$$

即
$$\delta_r x^n \leqslant \left|\frac{x \cdot n x^{n-1}}{x^n}\right| \delta = n\delta$$

所以 $n\delta$ 是函数 x^n 的相对误差限.

复习与思考题解答

1. 什么是数值分析？它与数学科学和计算机的关系如何？

解答：数值分析又称计算数学，是数学科学的分支之一．研究内容包括用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现．

数值分析把理论与计算相结合，重点研究数学问题和数学模型的数值算法及理论．既有纯数学高度抽象性和严谨科学性的特点，又有应用广泛性与实际实验高度技术性的特点，是一门与计算机使用密切结合，实用性很强的数学课程．

2. 何谓算法？如何判断数值算法的优劣？

解答：算法是用于求解输入数据(即问题中的自变量与原始数据)与输出数据(结果)之间函数关系的一个确定而无歧义描述的数值方法．通常按规定顺序执行一个或多个完整的进程，通过这些进程将输入元变换成一个输出元．

由于数值算法与计算机紧密结合，因此，数值算法的优劣取决于该算法的可靠性、准确性和计算复杂性．一个面向计算机，有可靠理论分析且计算复杂性好的算法就是一个好算法．

3. 列出科学计算中误差的三个来源，并说出截断误差与舍入误差的区别．

解答：误差来源主要包括：

(1)用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象，简化而得到的，因而是近似的．我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为模型误差．

(2)数学模型中包含一些观测得到的物理量，如温度、长度、电压等，由观测产生的误差称为观测误差．

(3)当数学模型不能得到精确解时，通常利用数值方法求它的近似解，其近似解和精确之间的误差称为截断误差或方法误差．

(4)用计算机做数值计算时，由于计算机的字长有限，原始数据在计算机上表示时会有误差，计算过程又可能产生新的误差，这种误差称为舍入误差，截断误差和舍入误差的产生原因

存在差异,截断误差是由所采用的数值方法而产生的,对具体算法存在依赖性,而舍入误差由数值计算产生,对计算工具和过程存在依赖性．比如当两种计算机的字长存在差异时,对于一种算法在不同计算机上的两种运算结果,其截断误差相同,但舍入误差可能存在差异．

4. 什么是绝对误差和相对误差？什么是近似数的有效数字？它与绝对误差和相对误差有何关系？

解答:若 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,则 $e^*=x^*-x$ 为近似值的绝对误差,简称误差．

近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

②称为近似值 x^* 的相对误差,记作 e_r^*

如果近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一个非零数字共有 n 位,则 x^* 有 n 位有效数字．

有效位数越多,相对误差限越小,绝对误差限同样越小．

5. 什么是算法的稳定性？如何判断算法稳定？为什么不稳定算法不能使用？

解答:一个算法如果输入数据有误差,而在计算过程中舍入误差不增长,则称此算法是数值稳定的,否则称该算法为不稳定的．

算法的稳定性依赖于初始数据误差在计算中的传播扩大速度,若初始数据误差在计算中传播使计算结果误差增长很快,就是数值不稳定的．

对于不稳定算法,即使初值相当准确,由于误差传播是逐步扩大的,因而计算结果不可靠,不能使用数值不稳定的算法．

6. 什么是问题的病态性？它是否受所用算法的影响？

解答:一个数值问题,如果输入数据有微小扰动(即误差),引起输出数据(即问题解)相对误差很大,就是病态问题．

病态问题不是计算方法引起的,是数值问题自身固有的,因此,对数值问题首先应分清问题是否病态,对病态问题就必须采取相应的特殊方法以减少误差传播．

7. 什么是迭代法？试利用 $x^3-a=0$ 构造计算 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式？

解答:迭代法是一种按同一公式重复计算逐次逼近真值的算法,是数值计算普遍使用的一种重要方法．

先给一个初始近似 x_0,令 $x=x_0+\triangle x$,$\triangle x$ 是一个校正量,称为增量．

因为 $x^3-a=0$

该式可化为

$(x_0+\triangle x)^3=a$

即

$$x^3+3x_0(\triangle x)^2+3x_0^2\triangle x+(\triangle x)^3=a$$

由于 $\triangle x$ 是小量,若略去高阶小量 $(\triangle x)^2$ 和 $(\triangle x)^3$,则得

即 $x_0^3+3x_0^2\triangle x\approx a$

于是

$$x_1=x_0+\triangle x\approx x_0+\frac{1}{3x_0^2}(a-x_0^3)=\frac{a}{3x_0^2}+\frac{2}{3}x_0=\frac{1}{3}\left(2x_0+\frac{a}{x_0^2}\right)$$

重复以上过程可得到迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}(2x_k+\frac{a}{x_k^2}),k=0,1,2,\cdots,x_0\text{ 给定}$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$

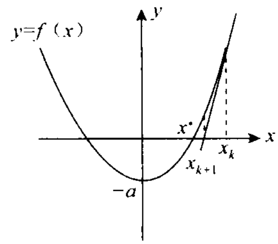
则 $x^*=\sqrt[3]{a}$.

8. 直接利用以直代曲的原则构造求方程 $x^2-a=0$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$的迭代法.

解答:令 $f(x)=x^2-a$,求函数方程 $f(x)=0$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$,在几何上,$y=f(x)$表现为平面上的一条曲线,它与 x 轴交点的横坐标即为方程的根 x^*.

假设已经给出一个近似根 x_k,

用该点$(x_k,f(x_k))$处,即(x_k,x_k^2-a)处的切线逼近该曲线,令 x_{k+1} 为该切线与 x 轴交点的横坐标.



一般情况下 x_{k+1} 近似方程的根 x^* 的程度要比 x_k 近似 x^* 的程度要好,这种以直代曲的原则相当于用切线方程

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

的根 x_{k+1} 近似 x^*,从而

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\cdots$$

因为 $f(x)=x^2-a$

则 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-a}{2x_k}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{a}{x_k}),k=0,1,2,\cdots\cdots,x_0$ 给定.

9. 举例说明什么是松弛技术.

解答:例如在积分近似计算的梯形求积公式中

$$T_n=\sum^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)],$$

取 $n=1,n$ 可分别得

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_2=\frac{b-a}{2}[f(a)+2f(c)+f(b)],\qquad c=\frac{a+b}{2}$$

$$\text{令 }S_1=T_2+\omega(T_2-T_1)=(1+\omega)T_2-\omega T_1$$

若取 $\omega=\dfrac{1}{3}$,有

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]$$

这就是采用了松弛技术的数值计算方法，其中 ω 为松弛因子.

10. 考虑无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，它是发散的.在计算机上计算它的部分和会得到什么结果?为什么?

解答:对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，它是发散的，利用计算机计算部分和 S_k 时，

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}, \quad k = 1,2,\cdots$$

S_k 对于每个 k 都对应确切的数值

当 n 较大时，$\frac{1}{n}$ 较小;当 $\frac{1}{n}$ 低于计算机内部计算精度时，计算机将其记为 0，则对部分和 S_k 的计算结果不产生贡献.

因此，当 k 足够大时，计算机计算部分和的结果收敛到一个常数.

该常数的大小与计算机的存储和计算精度相关联.

11. 判断下列命题的正确性:

(1)解对数据的微小变化高度敏感是病态的.

(2)高精度运算可以改善问题的病态性.

(3)无论问题是否病态，只要算法稳定都能得到好的近似值.

(4)用一个稳定的算法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(5)用一个收敛的迭代法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(6)两个相近数相减必然会使有效数字损失.

(7)计算机上将 1000 个数量级不同的数相加，不管次序如何结果都是一样的.

解答:(1)对.数据的微小变化将导致解的变化很大，表现为输入数据误差在计算中传播，引起输出数据的相对误差很大.

(2)错.病态问题是数值问题固有的，与计算方法无关，高精度运算不能改变病态问题的本质.

(3)错.病态问题不是计算方法引起的;只有良态问题才有可能得到好的近似值.

(4)错.好的近似值对算法初始值的选取存在一定的依赖性.

(5)错.应同时考虑初始值的选取对迭代法的影响.

(6)错.设计算法时，两个相近数相减，可以通过其他手段防止有效数字的损失.

(7)错.运算次序可能会对运算结果产生影响，应尽量减少数量级不同的数做加法的运算次数，避免误差危害.

习题全解

1. 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差.

解

近似值 x^* 的相对误差为

$$\delta = e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

而 $\ln x^*$ 的误差为

$$e(\ln x^*) = \ln x^* - \ln x \approx \frac{1}{x^*} e^*$$

进而有

$$e(\ln x^*) \approx \delta$$

2. 设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差.

解

设 $f(x)=x^n$，则函数的条件数为

$$C_p = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

因为 $f'(x) = n x^{n-1}$

所以
$$C_p = \left| \frac{x \cdot n x^{n-1}}{x^n} \right| = n$$

又因为 $\varepsilon_r((x^*)n) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(x^*)$，

且 $\varepsilon_r(x^*)$ 为 2%

所以 $\varepsilon_r((x^*)^n) \approx 0.02n$.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：

$$x_1^* = 1.1021,\quad x_2^* = 0.031,\quad x_3^* = 385.6,$$
$$x_4^* = 56.430,\quad x_5^* = 7 \times 1.0.$$

解

$x_1^* = 1.1021$　是五位有效数字；

$x_2^* = 0.031$　是二位有效数字；

$x_3^* = 385.6$　是四位有效数字；

$x_4^* = 56.430$　是五位有效数字；

$x_5^* = 7 \times 1.0$　是二位有效数字.

4. 利用教材中公式(2.3)求下列各近似值的误差限：

(1) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$；

(2) $x_1^* x_2^* x_3^*$；

(3) x_2^* / x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数.

解

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$,

$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$,

$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$.

(1)$\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)$

$$=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$=1.05\times10^{-3}$$

(2)$\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)=|x_1^*x_2^*|\varepsilon(x_3^*)+|x_2^*x_3^*|\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*x_3^*|\varepsilon(x_2^*)$

$$=|1.1021\times0.031|\times\frac{1}{2}\times10^{-1}+|0.031\times385.6|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+|1.1021\times385.6|\times\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\approx0.215$$

(3)$\varepsilon(x_2^*/x_4^*)\approx\frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*)+|x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2}$

$$=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}$$

$$\approx0.89\times10^{-5}$$

5. 计算球体积要使相对误差限为1%,问度量半径R时允许的相对误差限是多少?

解

球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则体积函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\cdot V'}{V}\right|=\left|\frac{R\cdot4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

所以$\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$

又因为$\varepsilon_r(V^*)=1\%$

故度量半径R时允许的相对误差限为

$$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times1\%\approx0.33\%$$

6. 设$Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783},n=1,2,\cdots$$

计算到Y_{100}.若取$\sqrt{783}\approx27.982$(5位有效数字),试问计算Y_{100}将有多大误差?

解

因为
$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

所以
$$Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

依次代入后，有

$$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$$

即 $Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$

若取 $\sqrt{783}\approx27.982$

所以 $Y_{100}^{*}=Y_0-27.982$

$$\varepsilon(Y_{100}^{*})=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

故 Y_{100} 的误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）.

解

因为 $x^2-56x+1=0$

故方程的根应为

$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx28+27.982=55.982$$

所以 x_1 具有 5 位有效数字

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}$$

$$\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx0.017863$$

故 x_2 有五位有效数字.

8. 当 $x\approx y$ 时计算 $\ln x-\ln y$ 有效位数会损失，改用 $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$ 是否就能减少舍入误差？（提示：考虑对数函数何时出现病态）.