高等教育“十一五”规划教材
公共基础课教材系列

概率论与数理统计

黄 坚 刘德光 主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

概率论与数理统计

黄　坚　刘德光　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本教材共分为8章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验，多数章节配有习题和总习题，书后附有习题参考答案.

本书内容结构严谨，概念与例题叙述直观清晰，应用问题贴近生活实际，通俗易懂，可供高校非数学专业的工科类及经管类专业使用，也可作为普通高等院校非数学专业的教材.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/黄坚，刘德光主编. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材. 公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-028669-7

Ⅰ.①概… Ⅱ.①黄…②刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数学统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第161337号

策划：吕建忠 孙 杰
责任编辑：王纯刚 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年9月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2010年9月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1-3 000 字数：221 000

定价：22.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

前　言

进入 21 世纪，我国的高等教育已经逐步进入“大众化”教育阶段，根据独立学院“应用服务型人才”的培养目标，对基础类特别是“概率论与数理统计”课程的教学有了许多新的要求. 为适应独立学院的教学发展和独立学院学生的基础特点及学习特点，编写了本书.

本书充分考虑了高等院校工科类和经管类各专业对概率统计的要求以及应用服务型人才的培养需要，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近生活实际的原则而编写. 教材主要特点如下.

(1) 既突出概率统计的基本思想和基本方法，在理论上又不过分强调严密的论证和研究过程，而更多地让学生体会概率论与数理统计的本质和研究价值.

(2) 根据本课程别开生面的研究课及其独特的概念和方法，对基本概念的叙述力求从身边的实际问题出发，引入自然，通俗实用，简明易懂.

(3) 重视例题与习题的选择，由浅入深，贴近实际，可以说直观而又不失严密性，符合独立学院学生的基础特点和教学要求. 同时，通过自然科学领域、工程技术领域、经济管理领域和日常生活经常面临的现实问题，培养学生应用概率统计的知识解决实际问题的能力，也培养学生学习数学的兴趣.

书中标注 * 部分可作为选学内容.

本教材是多所院校合作的结晶，由桂林电子科技大学信息科技学院黄坚和广西大学行健文理学院刘德光共同统稿。参编人员及分工如下：桂林电子科技大学信息科技学院丁少玲编写了第 1、6 章，广西工学院鹿山学院梁道源、田献珍编写了第 2、5 章，广西大学行健文理学院刘德光、黄君玉编写了第 3、4、7 章，广西师范学院师园学院周玉兴编写了第 8 章，附录和习题参考答案由桂林电子科技大学信息科技学院王春利编写.

由于编者水平有限，书中差错和不足之处敬请批评指正.

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 随机事件与概率

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会生活中存在着两类截然不同的现象，一类是确定性现象，例如：

1）早晨太阳必然从东方升起；

2）在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾等.

这类现象的特点是：在试验之前就能断定它只有一个确定的结果，即在一定条件下重复进行试验，其结果必然出现且唯一.

另一类是随机现象，例如：

1）某地区的年降雨量；

2）投掷一枚均匀的硬币，可能出现“正面”，也可能出现“反面”，事先不能作出确定的判断.

因此，这类现象的特点是可能的结果不止一个，即在相同条件下进行重复试验，事先无法准确预知其试验的结果. 就一次试验而言，时而出现这个结果，时而出现那个结果，呈现出一种偶然性.

由于随机现象的结果事先无法知道，人们就以为随机现象是不可捉摸的. 然而，人们通过大量的实践发现：在相同条件下，虽然个别试验结果在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量试验中却呈现出某种规律性，这种规律性称为统计规律性. 例如：在投掷一枚硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是假如硬币均匀，直观上出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量的试验中出现正面的频率应接近50%. 概率论

与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科.

1.1.2 随机试验

定义 1.1 一个试验如果满足：

1）可重复性，可以在相同的条件下重复进行；

2）可观察性，其结果具有多种可能性，并且所有的可能结果是事先可以明确的；

3）不确定性，在每次试验前，不能准确预知将出现哪一个结果.

则称这样的试验为随机试验，记为 E.

例如，掷骰子随机试验实例：

1）E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数；

2）E_2：投一枚均匀的硬币两次，观察出现正反面的情况；

3）E_3：电话总机在单位时间内接到的呼唤次数；

4）E_4：任取一人量其身高.

1.1.3 样本空间与样本点

随机试验的每一种可能结果称为一个**样本点**，记为 ω；样本点的全体构成的集合称为**样本空间**，记为 Ω.

例如，在掷骰子随机试验中，其样本空间分别为

E_1：若记 ω_i 为“出现 i 点”($i=1, 2, \cdots, 6$)，则 $\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$；

E_2：若记 H 为正面，T 为反面，则 $\Omega_2=\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$；

E_3：$\Omega_3=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

E_4：$\Omega_4=\{h \mid 0<h<3\}$.

1.1.4 随机事件

样本空间 Ω 的某个子集称为**随机事件**，简称**事件**，用字母 A、B、C 等表示. 显然，它是由部分样本点构成的集合.

例如，在掷骰子的试验中，样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则事件 A：“点数为 5” 可表示为 $A=\{5\}$；事件 B：“点数小于 5” 可表示为 $B=\{1, 2, 3, 4\}$；事件 C：“点数小于 5 的偶数” 可表示为 $C=\{2, 4\}$.

由一个样本点构成的集合称为基本事件；由多个样本点构成的集合称为复合事件. 例如，在投骰子的试验中，事件 A 表示“掷出偶数点”，用 ω_i 表示“出现 i

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

点”，则 A 包含 ω_2、ω_4、ω_6 这 3 个样本点，所以它是复合事件.

某个事件 A 发生，即指该事件 A 的某一个样本点 ω 出现，记为 $\omega \in A$. 例如，在投骰子的试验中，设 A 表示“出现偶数点”，则“出现点 2” 就意味着 A 发生了.

必然事件：在随机试验中，每次试验都必然发生的事件用 Ω 表示.

不可能事件：在随机试验中，每次试验都必然不会发生的事件用 ϕ 表示.

例如，在上述掷骰子的试验中，“点数小于 7” 是必然事件，“点数大于 6” 是不可能事件.

显然，必然事件与不可能事件都是确定性事件，为了研究问题的方便，把它们看做两个特殊的随机事件.

1.1.5　事件间的关系与运算

因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理.

1. 事件的包含

当事件 A 发生时必然导致事件 B 发生，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

2. 事件的相等

若事件 A 的发生能导致 B 的发生，且 B 的发生也能导致 A 的发生，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$，即 A 与 B 有相同的样本点.

显然有 $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

3. 事件的和(并)

两个事件 A、B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的并(或和)，记为 $A + B$(或 $A \cup B$)，即 $A + B = \{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$.

类似地，称 $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$($\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$) 为 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 的和事件，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$($\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) 为可数个事件 A_1、A_2、…、A_n、… 的和事件.

4. 事件的积(交)

两个事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的积(或交)，记为 AB(或 $A \cap B$)，即 $AB = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$.

类似地，称 $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$($\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$) 为 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 的交事件，$\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$($\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) 为可数个事件 A_1、A_2、…、A_n、… 的交事件.

5. 事件的差

事件A发生而事件B不发生的事件，称为事件A与事件B的差，记为$A-B$，即$A-B=\{\omega \mid \omega \in A$而$\omega \notin B\}$.

例如，在掷骰子试验中，记事件A：“点数为奇数”，事件B：“点数小于5”，则有

$$A+B=\{1,2,3,4,5\},\ AB=\{1,3\},\ A-B=\{5\}.$$

6. 事件的互斥(互不相容)

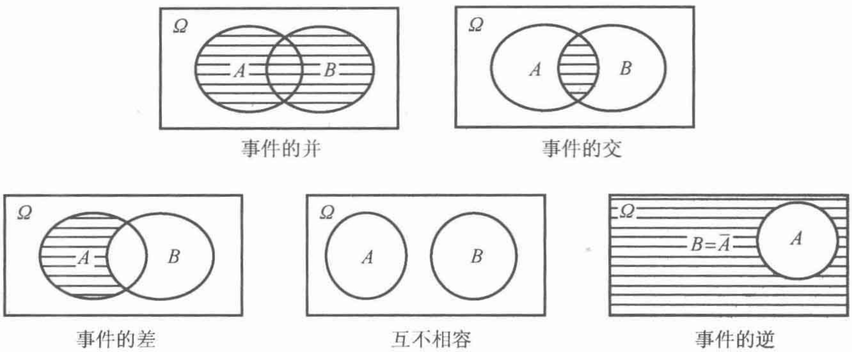
若事件A与B不能同时发生，则称A与B互斥，记为$AB=\Phi$. 例如，基本事件是两两互斥的.

7. 事件的逆(对立事件)

若事件A与事件B满足$A\cup B=\Omega$且$AB=\Phi$，则称B为A的逆，记为$B=\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{\omega \mid \omega \notin A,\ \omega \in \Omega\}.$$

以上各事件的关系，可用图1.1解释。



事件的并　事件的交

事件的差　互不相容　事件的逆

图 1.1

1.1.6 事件的运算规律

事件之间的运算法则与集合的运算法则相同，设A、B、C是同一随机试验E中的事件，则有

1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4）对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

一般地，$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i$，$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

例 1.1 设 A、B、C 为任意 3 个事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件：①3 个事件中至少有一个发生；② 没有一个事件发生；③ 恰有一个事件发生；④ 至多有两个事件发生；⑤ 至少有两个事件发生.

解 ①$A+B+C$；②$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A+B+C}$；③$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$；④$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$；⑤$AB + BC + CA = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$.

习 题 1.1

1. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A、B、C 分别表示“第一次出现正面”、“两次出现同一面”、“至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A、B、C 中的样本点.

2. 在掷两颗骰子的试验中，事件 A、B、C、D 分别表示“点数之和为偶数”、“点数之和小于 5”、“点数相等”、“至少有一颗骰子的点数为 3”. 试写出样本空间及事件 AB、$A+B$、$\overline{A}C$、BC、$A-B-C-D$ 中的样本点.

3. 以 A、B、C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A、B、C 表示以下事件：① 只订阅日报；② 只订日报和晚报；③ 只订一种报；④ 正好订两种报；⑤ 至少订阅一种报；⑥ 不订阅任何报；⑦ 至多订阅一种报；⑧ 3 种报纸都订阅；⑨ 3 种报纸不全订阅.

4. 甲、乙、丙 3 人各射击一次，事件 A_1、A_2、A_3 分别表示甲、乙、丙射中. 试说明下列事件所表示的结果：

$$\overline{A}_2、A_2 + A_3、\overline{A_1 A_2}、\overline{A_1 + A_2}、A_1 A_2 \overline{A}_3、A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_1 A_3.$$

§1.2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中，可能发生也可能不发生，具有偶然性. 但在一次实验中，随机事件发生的可能性有多大呢？并希望能找到一个合适的数来表征随机事件在一次实验中发生的可能性大小. 例如，在抛掷一枚均匀的硬币试验中，记事件 A 为“掷出正面”，事件 B 为“掷出反面”，直觉告诉我们，事件 A 和事件 B 发生的可能性都为 1/2.

为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引入表征随机事件在一次实验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

但是，事件的概率如何进行定义呢？在概率论发展的历史上，人们针对不同情况从不同的角度对事件的概率作了规定，给出了 4 种定义.

1.2.1 概率的统计定义

1. 频率及频率的性质

定义 1.2 在相同的条件下进行了 n 次试验，若事件 A 发生了 μ 次，则称比值 $\frac{\mu}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$.

易见，频率具有下述基本性质.

1）非负性：对任意 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2）规范性：$f_n(\Omega)=1$；

3）可加性：若 A、B 互斥，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

根据上述定义，频率反映了一个随机事件在大量的重复试验中发生的频繁程度. 历史上曾有许多学者抛掷一枚均匀硬币时，常常稳定于某个常数，称为**频率的稳定性**.

通过大量的实践还容易看到，若随机事件 A 出现的可能性越大，一般来讲，其频率 $f_n(A)$ 也越大. 由于事件 A 发生的可能性大小与其频率大小有如此密切的关系，加上频率又有稳定性，故而可通过频率来定义概率.

2. 概率的定义

定义 1.3 在相同的条件下，独立重复地作 n 次试验，若某事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 随着试验次数的增大，而稳定地在某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

1.2.2 古典概率

定义 1.4 称具有下列两个条件的概率模型为**古典概型**：

1）随机试验的样本空间只有有限个样本点；

2）每个样本点发生的可能性相同.

定义 1.5 设古典型随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$，若事件 A 中含有 $k(k\leqslant n)$ 个样本点，则称 $\frac{k}{n}$ 为 A 发生的概率，记为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中含有的样本点数}}{\text{总样本点数}}.$$

古典概率的性质如下.

1）非负性：对任意 A，$P(A)\geqslant 0$；

2）规范性：$P(\Omega)=1$；

3）可加性：若 A 和 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$；

4）$P(\Phi)=0$；

5）$P(\overline{A})=1-P(A)$.

例 1.2 从标号为 1、2、…、10 的 10 个同样大小的球中任取一个，求下列事件的概率：A 表示抽中 2 号球，B 表示抽中奇数号球，C 表示抽中的号数不小于 7 的球.

解 由于 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$A=\{2\}$，$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$C=\{7, 8, 9, 10\}$，所以

$$P(A)=\frac{1}{10},\ P(B)=\frac{5}{10},\ P(C)=\frac{4}{10}.$$

例 1.3 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只，求：① 其中恰有两只配成一双的概率；② 至少有两只鞋子配成一双的概率.

解 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只，其全部取法有C_{12}^4 种.

① 分析：设 A 表示其中恰有两只配成一双的事件，则 A 可按下面的方法来抽取，即先从 6 双中取出一双，两只全取；再从剩下的 5 双中任取两双，每双中取到一只，于是 A 中所含样本点数为 $C_6^1C_2^2C_5^2C_2^1C_2^1$，因此

$$P(A)=\frac{C_6^1C_2^2C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{16}{33};$$

② 分析：设 B 表示至少有两只鞋子配成一双的事件，则 $\overline{B}$ 表示 4 只均不能配成双的事件，故 $\overline{B}$ 可按下面的方法来抽取，即从 6 双中取出 4 双，每双只取一只，于是 $\overline{B}$ 中所含样本点数为 $C_6^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_6^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{17}{33}.$$

在古典型试验中利用等可能性的概念成功地解决了某一类问题的概率，不过古典型要求可能场合的总数即样本点个数必须有限，因此，对于无限结果而又有某种等可能性的场合一般可以通过几何方法来解决.

1.2.3 几何概率

先从一个简单的例子开始.

例如，如果在一个5万平方公里的海域里有表面积达40平方公里的大陆架贮藏着石油，假如在海域里随意选取一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

在该题中由于选点的随机性，可以认为该海域中各点被选中的可能性是一样

的，因而所求概率自然认为贮油海域的面积与整个海域面积之比，即 $p=\dfrac{40}{50\ 000}$.

在这类问题中，试验的可能结果是某区域 Ω 中的一个点，这个区域可以是一维、二维、三维的，甚至可以是 n 维的. 这时不管全部可能结果还是我们感兴趣的结果都是无限的；等可能性是通过下列方式来赋予意义的：落在某区域 A 的可能性与区域 Ω 的度量(长度、面积、体积等) 成正比而与其位置及形状无关.

定义 1.6 若以 S_A 记"在区域 Ω 中随机地取一点，而该点落在区域 A 中" 这一事件，则其概率定义为：$P(S_A)=\dfrac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$.

例 1.4 (会面问题) 两人相约 7 点到 8 点在某地会面，先到者等候另一个人 20 分钟，这时就可离去，试求这两人能会面的概率?

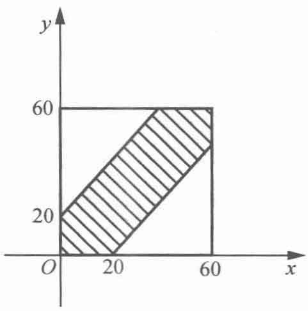


图 1.2

解 如图 1.2 所示，设 x 和 y 分别表示两人到达时刻(7 点设为零时刻)，A 表示这两人能会面的事件，则有

$$\Omega=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x,\ y\leqslant 60\},\ A=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x,\ y\leqslant 60,\ |x-y|\leqslant 20\}.$$

这是一几何概率问题，可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点，能会面的点为图中阴影部分，因此所求概率为

$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

1.2.4 概率的公理化定义及概率的性质

定义 1.7 设 Ω 为一个样本空间，若对每一个事件 A，有且只有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且 $P(A)$ 满足如下定理.

定理 1.1(非负性) 对任意 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

定理 1.2(规范性) $P(\Omega)=1$；

定理 1.3(完全可加性) 对任意一列两两互斥的事件 A_1、A_2、…、A_i、… 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

下面是一组由公理化定义可以推出的性质：

1) $P(\Phi)=0$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com