1

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

第四版

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

1

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 1/费定晖，周学圣编演.—4版.—济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5900-9

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120147 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 1

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031　电话：(0536) 2116806

开本：787 mm × 1092mm　1/16
印张：14
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5900-9
定价：19.00 元

第四版前言 DISIBANQIANYAN

本书自1979年出版发行以来，历经30多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析"不可替代"之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书4462题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，"只看不练假把式"，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录 MULU

第一章　分析引论

§1.　实　数

1° **数学归纳法**　为了证明某定理对任意的正整数 n 为真，只需证明下面两点即可：(1)这定理对 $n=1$ 为真，(2)设这定理对任何的一个正整数 n 为真，则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2° **分割**　若分有理数为 A 和 B 两类，使其满足下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(**下类**)的任一数小于属于 B 类(**上类**)的任何数，则这样的一个分类法称为**分割**.(ⅰ)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ⅱ)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° **绝对值**(或模)　若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值(模)：

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° **上确界和下确界**　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1)每一个 $x\in X$** 满足不等式 $x\geqslant m$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使 $x'<m+\varepsilon$，则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式 $x\leqslant M$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x''\in X$，使 $x''>M-\varepsilon$，则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说 $\inf\{x\}=-\infty$；

若集合 X 上方无界，则认为 $\sup\{x\}=+\infty$.

5° **绝对误差和相对误差**　设 a $(a\neq 0)$是被测量的精确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为被测量的绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半，则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立：

【1】　$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证　当 $n=1$ 时，等式成立.

设对于 $n=k$ (正整数)时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是，由数学归纳法知，对于任何正整数 n，有 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

【2】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

【3】 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

【4】 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证：

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数，由此推出牛顿二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，由于 $[a+b]^{[1]}=a+b$ 及 $\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b$，所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$$

$$=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\}$$
$$=\{(a-kh)+b\}C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^k a^{[0]}b^{[k]}$$
$$=C_k^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]}b^{[k]}+C_k^k a^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^k a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

故由$(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立.

于是，对于任何正整数n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$中，令$h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式$(a+b)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$.

【6】 证明伯努利不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是符号相同且大于-1的数.

证 当$n=1$时，此式取等号.

设$n=k$时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于$n=k+1$时，由于$x_i(i=1,2,\cdots,n)$大于-1，所以，$1+x_i>0$. 因而，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\ \geqslant&(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\ =&(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于$x_ix_j\geqslant 0$，所以，

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数n，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】 证明：若$x>-1$，则不等式$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1)$为真，且仅当$x=0$时，等号成立.

证 只要在6题的伯努利不等式中，设$x_i=x\ (i=1,2,\cdots,n)$，即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从6题的证明过程中看出，仅当$x=0$时，上式才取等号.

【8】 证明不等式：$n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1)$.

提示 注意不等式$\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots)$.

证 当$n=2$时，因为$\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$k!<\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^k$，则对于$n=k+1$时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有
$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何正整数 n,有 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【9】 证明不等式:$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad (n>1)$.

证 当 $n=2$ 时,因为 $2!\cdot 4! =48$,及 $[(2+1)!]^2=36$,所以 $2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即
$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有
$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! &> [(k+1)!]^k(2k+2)! = [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\ &> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.于是,由数学归纳法原理,本题证毕.

【10】 证明不等式:$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证 当 $n=1$ 时,因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

则对于 $n=k+1$ 时,由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$,即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,而上述不等式由于
$$4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4,$$

因而是成立的.于是,最后得
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.于是,由数学归纳法,本题证毕.

【11】 设 c 为正整数,而不为整数的平方,且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含所有满足 $b^2>c$ 的正有理数 b,而 A 类包含所有其余的有理数.求证:在 A 类中无最大数,而在 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$.若 $a\leqslant 0$,则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$.故可设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$.但不可能有 $a^2=c$.因若 $a^2=c$,设 $a=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互素的正整数,则 $\frac{p^2}{q^2}=c$.由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互素的,故必 $q=1$,从而 $c=p^2$,此与假定矛盾,故必 $a^2<c$.下面我们证明,存在正整数 n,使
$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于:$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c$, $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2$,若 n 满足不等式 $\frac{2a+1}{n}<c-a^2$,则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$，而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来建立：A 类包含所有满足 $a^3<2$ 的有理数 a；B 类包含所有其余的有理数. 证明：在 A 类中无最大数，而在 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$，即 $a^3<2$. 下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于 $\dfrac{3a^2}{n}+\dfrac{3a}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}<2-a^3$. 若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\dfrac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立. 从而 $a+\dfrac{1}{n}\in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 下证不可能有 $b^3=2$. 事实上，若 $b^3=2$，设 $b=\dfrac{p}{q}$，p 与 q 为互素的正整数，则 $\dfrac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r 为正整数. 由于 p 与 q 是互素的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾. 由此可知必有 $b^3>2$. 仿前面的证明，可取正整数 n，使 $\left(b-\dfrac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\dfrac{1}{n}\in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

【13】 作出适当的分割，然后证明等式：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；　　(2) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (1)作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入 B 类. 又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B'：一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类，一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类. 我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式：

$$a+a'<c<b+b'\quad（对任何\ a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B'）$$

的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此，如果我们能证明恒有 $(a+a')^2<18$（当 $a+a'>0$ 时），$(b+b')^2>18$，则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$. 于是得知 $\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$，则 a 与 a' 中至少有一个为正，从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$，

$$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18;$$

同样，因 $b^2>2$，$b'^2>8$，$b>0$，$b'>0$，故 $b^2b'^2>16$，$bb'>4$，

$$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18.$$

于是证毕.

(2)作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B 如(1)中所示，再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 A_1/B_1：一切有理数 $a_1\leqslant 0$ 以及满足 $a_1^2<3$ 的正有理数 a_1 归入 A_1 类，一切满足 $b_1^2>3$ 的正有理数 b_1 归入 B_1 类，根据实数乘法的定义，满足

$$aa_1<c_1<bb_1\quad（对任何\ a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0,b\in B,b_1\in B_1）$$

的(正)实数 c_1 存在唯一，它就是 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 但由于当 $a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0$ 时 $(aa_1)^2<6$，而当 $b\in B,b_1\in B_1$ 时，$(bb_1)^2>6$，故恒有 $aa_1<\sqrt{6}<bb_1$. 由此可知 $\sqrt{6}=c_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 证毕.

【14】 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1，使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次，作分割 A/B，其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a：

如果有 $\dfrac{p}{q}$（p、q 互素）属于 A_1，则有 $a^q<2^p$；而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

【15】 求证：任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性，只证本题的后半部分，分两种情形：

(1)A 中有最大数 $\bar{a}$，此时，设 $a\in A$，则有 $a\leqslant\bar{a}$，说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a}\in A$，故对 A 的任何上界 M，均有 $\bar{a}\leqslant M$，故 $\bar{a}$ 为 A 的上确界.

(2)A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/B_1：取集 A 的一切上界归入 B_1 类，而其余的数归入 A_1 类. 这样，A 中一切数全部落在 A_1 内，A_1 及 A 均非空，且 A_1 中的数小于 B_1 中的数，这确实是一个实数分割，易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数，即 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

【16】 证明：一切有理真分数 $\frac{m}{n}$（式中 m 及 n 为正整数，且 $0<m<n$）的集合无最小及最大的元素. 并求这个集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分数 $\frac{m}{n}$（式中正整数 m,n 满足 $0<m<n$）所成的集合，对任何 $\frac{m}{n}\in E$，显然 $\frac{m+1}{n+1}\in E$ 且 $\frac{m+1}{n+1}>\frac{m}{n}$，又 $\frac{m^2}{n^2}\in E$，且 $\frac{m^2}{n^2}<\frac{m}{n}$；故 E 中既无最大数，也无最小数. 显然

$$\sup E=1,\quad \inf E=0.$$

【17】 有理数 r 满足不等式 $r^2<2$. 求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2<2$ 的有理数 r 所成的集合. 我们知道，分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$，这里 A 表由一切非正有理数以及满足 $r^2<2$ 的正有理数 r 所成的类，B 表其余有理数构成的类，并且已证 A 中无最大数，于是

$$\sup E=\sup A=\sqrt{2}.$$

同样，分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$，这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2<2$ 的负有理数 r 构成的类，A' 表其余有理数构成的类，并且 B' 中无最小数. 于是，显然有

$$\inf E=\inf B'=-\sqrt{2}.$$

【18】 设 $\{-x\}$ 为数的集合，这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1)$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$； (2)$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1)设 $\inf\{-x\}=m'$，则有：

(ⅰ)当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\geqslant m'$； (ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有 $-x'\in\{-x\}$，使 $-x'<m'+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x\in\{x\}$ 时，$x\leqslant -m'$； (ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'>-m'-\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $-m'=\sup\{x\}$，即 $m'=-\sup\{x\}$，所以，$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

(2)设 $\sup\{-x\}=M'$，则有：

(ⅴ)当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\leqslant M'$； (ⅵ)对于任何的正数 ε，存在有 $-x'\in\{-x\}$，使 $-x'>M'-\varepsilon$.

由(ⅴ)及(ⅵ)推得：

(ⅶ)当 $x\in\{x\}$ 时，$x\geqslant -M'$； (ⅷ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'<-M'+\varepsilon$.

由(ⅶ)及(ⅷ)知数 $-M'=\inf\{x\}$，即 $M'=-\inf\{x\}$，所以，$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

【19】 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$. 证明等式：

(1)$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$； (2)$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，则有：

(ⅰ)当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$ 时，$x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$；

(ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有数 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使 $x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2}$， $y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x+y\in\{x+y\}$ 时(其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$)，$x+y\geqslant m_1+m_2$；

(ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$ (其中 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$)，使 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

(2)同法可证 $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

【20】 设$\{xy\}$为所有xy乘积的集合,其中$x\in\{x\}$及$y\in\{y\}$,且$x\geqslant 0$及$y\geqslant 0$. 证明等式:

(1)$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$; (2)$\sup\{x\}\sup\{y\}=\sup\{xy\}$.

证 (1)设$\inf\{x\}=m_1$, $\inf\{y\}=m_2$, 由于恒有$x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 故必$m_1\geqslant 0$, $m_2\geqslant 0$. 于是,

(ⅰ)当$x\in\{x\}, y\in\{y\}$时,$x\geqslant m_1\geqslant 0, y\geqslant m_2\geqslant 0$;

(ⅱ)对任何的正数ε,存在有数$x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$,使$0\leqslant x'<m_1+\varepsilon$, $0\leqslant y'<m_2+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得:

(ⅲ)当$xy\in\{xy\}$,其中$x\in\{x\}, y\in\{y\}$, $xy\geqslant m_1m_2$;

(ⅳ)对于任何的正数ε,存在有$x'y'\in\{xy\}$(其中$x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$),使

$$0\leqslant x'y'<(m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+\varepsilon',$$

其中$\varepsilon'=(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数$m_1m_2=\inf\{xy\}$,即$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$.

(2)同法可证 $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

【21】 求证不等式:

(1)$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$; (2)$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

证 (1)由 $$|x-y|=|x+(-y)|\geqslant|x|-|-y|=|x|-|y|,$$

及 $$|x-y|=|y-x|\geqslant|y|-|x|=-(|x|-|y|),$$

即得

$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|.$$

也可如下证明:由$|xy|\geqslant xy$知$x^2-2xy+y^2\geqslant x^2-2|xy|+y^2$,则$(x-y)^2\geqslant(|x|-|y|)^2$,开方即得

$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|.$$

(2)$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-|x_1+\cdots+x_n|$,

而 $$|x_1+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2+\cdots+x_n|\leqslant\cdots\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

所以,$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

解不等式:

【22】 $|x+1|<0.01$.

解 由$|x+1|<0.01$推得$-0.01<x+1<0.01$,所以,$-1.01<x<-0.99$.

【23】 $|x-2|\geqslant 10$.

解 由$|x-2|\geqslant 10$推得$x-2\geqslant 10$或$x-2\leqslant -10$,所以,$x\geqslant 12$或$x\leqslant -8$.

【24】 $|x|>|x+1|$.

解 两边平方,即得$x^2>(x+1)^2$或$2x+1<0$,于是,有$x<-\dfrac{1}{2}$.

【25】 $|2x-1|<|x-1|$.

解 两边平方,即得$(2x-1)^2<(x-1)^2$或$3x^2-2x<0$,解之,得$0<x<\dfrac{2}{3}$.

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

提示 令$x-2=t$,易得$-8\leqslant t\leqslant 4$,从而有$|x|\leqslant 6$.

解 令$x-2=t$,则得$|t+4|+|t|\leqslant 12$或$|t+4|\leqslant 12-|t|$.

两边平方,即有$t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$,或$3|t|\leqslant 16-t$.

将上式两端再平方,化简整理得$t^2+4t-32\leqslant 0$,于是,有$-8\leqslant t\leqslant 4$. 从而得$-8\leqslant x-2\leqslant 4$,即

$$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【27】 $|x+2|-|x|>1$.

解 $1+|x|<|x+2|$，将此式两端平方，化简得 $2|x|<4x+3$. 再平方之，化简得 $4x^2+8x+3>0$. 于是，有

$$x>-\frac{1}{2} \quad 或 \quad x<-\frac{3}{2}.$$

后者不适合，所以，$x>-\frac{1}{2}$.

【28】 $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

提示 两端平方，化简即得 $|x|<\frac{1}{2}$.

解 两端平方，化简得 $x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|$，即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2} \quad 或 \quad x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

前者不可能，所以，$x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$，即 $x^2<\frac{1}{4}$，解之得 $|x|<\frac{1}{2}$.

【29】 $|x(1-x)|<0.05$.

解 由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$ 得 $x^2-x+\frac{1}{20}>0$ 或 $x^2-x-\frac{1}{20}<0$，解之得

$$\begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【30】 证明恒等式：$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

证 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x|x|=x^2$.

【31】 当测量长度 10cm 时，绝对误差为 0.5mm；当测量距离 500km 时，绝对误差等于 200m. 哪种测量较为精确？

解 用相对误差 $\delta=\frac{\Delta}{|a|}$ 进行比较，其中 a 为被测量的精确值，而 Δ 是绝对误差.

对于前者，$\delta=\frac{0.5\times0.1}{10}=0.5\%$；对于后者，$\delta=\frac{200}{500\times1000}=0.04\%$.

所以，后者测量较为精确.

【32】 设数 $x=2.3752$ 的相对误差为 1%，试求此数包含若干位精确数字？

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752}=0.01$，所以 $\Delta=0.023752$.

因而，此数包含两位精确数字.

【33】 数 $x=12.125$ 包含三位精确数字. 试求此数的相对误差？

解 因为 x 包含三位精确数字，所以 $\Delta<0.05$. 于是得相对误差

$$\delta=\frac{\Delta}{|x|}<\frac{0.05}{12.125}<0.42\%$$

即 $\delta<0.42\%$.

【34】 矩形的边长等于：

$$x=2.50\text{cm}\pm0.01\text{cm}, \quad y=4.00\text{cm}\pm0.02\text{cm}.$$

这个矩形的面积 S 界于什么范围内？当其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少？

解 $S_{\min}=(2.50-0.01)(4.00-0.02)=9.9102(\text{cm}^2)$，

$S_{\max}=(2.50+0.01)(4.00+0.02)=10.0902(\text{cm}^2)$，

$S_{\min}\leqslant S\leqslant S_{\max}$， $S_{平均}=2.50\times4.00=10(\text{cm}^2)$，

$\Delta_1=10.0902-10=0.0902(\text{cm}^2)$， $\Delta_2=10-9.9102=0.0898(\text{cm}^2)$；

$\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=0.0902(\text{cm}^2)$， $\delta=\dfrac{\Delta}{10}\leqslant\dfrac{0.0902}{10}<0.91\%$.

【35】 物体的质量 $P=12.59\text{g}\pm0.01\text{g}$，其体积 $V=3.2\text{cm}^3\pm0.2\text{cm}^3$. 若对物体的质量和体积都取其平均值，试求物体的密度，并估计密度的绝对误差和相对误差.

解 密度 $C=\dfrac{12.59}{3.2}\text{g/cm}^3=3.93\text{g/cm}^3$.

$C_{\max}=\dfrac{12.60}{3.0}\text{g/cm}^3=4.20\text{g/cm}^3$， $C_{\min}=\dfrac{12.58}{3.4}\text{g/cm}^3=3.70\text{g/cm}^3$， $C_{\min}\leqslant C\leqslant C_{\max}$，

$\Delta_1=C_{\max}-C=0.27\text{g/cm}^3$， $\Delta_2=C-C_{\min}=0.23\text{g/cm}^3$； $\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=0.27\text{g/cm}^3$；

一般地，密度为 $(3.93\pm0.27)\text{g/cm}^3$； $\delta\leqslant\dfrac{0.27}{3.70}<7.3\%$.

【36】$^{+*}$ 圆半径 $r=7.2\text{m}\pm0.1\text{m}$. 若取 $\pi=3.14$，则求出的圆面积和最小相对误差是多少？

解 圆面积 $A=\pi\times7.2^2\approx51.84\pi(\text{m}^2)$

$$\Delta_1=\pi(7.2+0.1)^2-\pi\cdot7.2^2=1.45\pi.$$
$$\Delta_2=|\pi(7.2-0.1)^2-\pi\cdot7.2^2|=1.43\pi.$$
$$\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=1.45\pi(\text{m}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84\pm1.45)\pi(\text{m}^2)$，故

$$\delta\leqslant\frac{1.45\pi}{51.84\pi}<2.80\%.$$

【37】 已测得长方体各边长为

$$x=24.7\text{m}\pm0.2\text{m};\quad y=6.5\text{m}\pm0.1\text{m};\quad z=1.2\text{m}\pm0.1\text{m}.$$

此长方体的体积 V 界于什么范围内？若测量的各结果都取其平均值，则所求出的体积可能有的绝对误差和相对误差是多少？

解 $24.5\times6.4\times1.1\leqslant V\leqslant24.9\times6.6\times1.3$ 即 $172.480\text{m}^3\leqslant V\leqslant213.642\text{m}^3$.

当 x,y,z 均取平均值时，

$$V=24.7\times6.5\times1.2=192.660(\text{m}^3).$$
$$\Delta_1=213.642-192.660=20.982(\text{m}^3),$$
$$\Delta_2=192.660-172.480=20.180(\text{m}^3).$$

于是，$\Delta\leqslant20.982(\text{m}^3)$；$\delta\leqslant\dfrac{20.982}{172.480}\approx12.2\%$.

【38】 测量正方形的边长 x，此处 $2\text{m}<x<3\text{m}$，应有多小的绝对误差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001m^2？

解 按题设我们有 $0<x^2-4<0.001$ 或 $0<9-x^2<0.001$，解之得

$$2.99983<x<3 \quad 或 \quad 2<x<2.00024.$$

因此，Δ 取二者中误差较小者，即

$$\Delta\leqslant0.00017(\text{m})=0.17(\text{mm}),$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17mm 时，就能使此正方形的面积精确到 0.001m^2.

【39】 假定矩形每边的长皆不超过 10m，为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01m^2，问测量矩形的边 x 与 y 时，许可的绝对误差 Δ 的值多大*)？

解 按题设我们有 $(x+\Delta)(y+\Delta)-xy\leqslant0.01$，即 $\Delta^2+(x+y)\Delta\leqslant0.01$，

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

由于 $x\leqslant 10$ 及 $y\leqslant 10$，所以只要 $\Delta^2+20\Delta\leqslant 0.01$ 或 $\Delta^2+20\Delta-0.01\leqslant 0$ 即可．解之，得

$$\Delta\leqslant\frac{-20+\sqrt{20^2+0.04}}{2}=-10+\frac{20.00099}{2}=0.000499<0.0005(\mathrm{m}).$$

*） 此题假设 x,y 有相等的绝对误差．又原著上为"$0.01\mathrm{m}^2$"，而误译为"$0.01\mathrm{cm}^2$"．

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差，$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差．求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

提示 由绝对误差与相对误差的定义，命题即获证．

证 设 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

于是，

$$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1° **数列极限的概念** 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 为无穷小量．

没有极限的数列，称为发散的．

2° **极限存在的准则**

(1)若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，

(2)单调而且有界的数列有极限．

(3)**柯西准则** 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是：对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$．

3° **关于数列极限的基本定理** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有：

(1)若 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(4)若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$．

4° **数 e** 数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$$

5° **无穷极限** 符号