

2011



新东方考研数学培训教材

考研数学

尤承业。编著

线性代数

(理论性、系统性、应用性紧密结合)

卷II

- 紧扣考研大纲，内容全面，重点、难点突出
- 注重概念理解，梳理知识体系
- 精选历年真题，解法精妙，帮助考生开阔思路
- 同步自测，培养实际应用能力

新东方考研数学培训教材

考研数学

卷II 线性代数

■ 尤承业 © 编著 ■

图书在版编目(CIP)数据

考研数学. 2, 线性代数 / 尤承业编著. —北京: 群言出版社, 2007 (2010. 3 重印)
ISBN 978-7-80080-707-7

I. 考… II. 尤… III. 线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 010578 号

考研数学卷 II 线性代数

出 版 人 范 芳
责任编辑 李小艾 (bj62605588@163.com)
封面设计 王 琳
出版发行 群言出版社 (Qunyan Press)
地 址 北京东城区东厂胡同北巷 1 号
邮政编码 100006
网 站 www.qypublish.com
电子信箱 qunyancbs@126.com
总 编 办 010-65265404 65138815
编 辑 部 010-65276609 65262436
发 行 部 010-65263345 65220236

经 销 新华书店
读者服务 010-65220236 65265404 65263345
法律顾问 中济律师事务所
印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

版 次 2010 年 3 月第 4 版 2010 年 3 月第 5 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 12
字 数 263 千
书 号 ISBN 978-7-80080-707-7
定 价 18.00 元

 [版权所有 侵权必究]

如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题, 请拨打服务热线: 010-62605166。

新东方
NEW ORIENTAL 图书策划委员会

主 任 俞敏洪

委 员 (按姓氏笔划为序)

王 强 王文山 包凡一 仲晓红 李 杜
邱政政 沙云龙 汪海涛 陈向东 周成刚
徐小平 窦中川

新东方
NEW ORIENTAL 考研数学培训教材编委会

(按姓氏笔划为序)

尤承业 李 昂 刘西垣 汪诚义 费允杰

序

为了帮助参加硕士研究生入学考试的广大有志青年能够在最短的时间内取得最好的成绩,我们根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,结合我们多年的考研数学的命题、阅卷和辅导经验,编写了这套《考研数学》系列丛书,其中含:卷Ⅰ 高等数学与微积分、卷Ⅱ 线性代数、卷Ⅲ 概率论与数理统计。

这套书的特点是:

1. 基本概念讲解到位;
2. 按照题型分类,题目精简,不搞题海战术;
3. 作者均为考研数学辅导的一线教师,经验丰富。

这套书是在北京新东方学校开办考研数学培训三年之后推出的。在这期间,辅导班的学员人数呈几何级数增长。由于新东方采用独一无二的“基本概念→解题秘笈”的“两步教学法”,教学成果显著,在2005和2006年北京新东方学校考研数学高分得主颁奖中,多名学员获奖。现在,每年都有上万名学员来到新东方,“从绝望中寻找希望”,学习数学的思维方式 and 解题技巧。应广大学员的迫切要求,我们编写了这套考研丛书,并在第一版的基础上进行了修订,以回报大家对新东方的厚爱,希望大家能够借助这套丛书顺利通过考试,修成正果。

这是新东方教育科技集团推出的第一套考研数学辅导书。该系列丛书在出版过程中得到了俞敏洪老师和其他领导的大力支持,在此表示衷心的感谢。这套书的出版也标志着新东方由单一的英语培训迈向多元化培训,在新东方的发展史上具有划时代的意义。

新东方考研数学丛书编委会

前言

研究生入学考试数学考试所涉及的三门课程中,线性代数是概念性最强的一门,对代数理论理解的深浅直接影响考场上应对代数题的能力。对线性代数的考前准备自始至终都应该把加深对理论的理解放在最重要的位置上。

代数的概念题和证明题常常是考生的难题。对这类题的解题能力直接反映出考生对代数理论的理解程度。

线性代数计算题的类型并不多,计算方法也很初等,但是往往计算量比较大。做好代数计算题一要熟,二要巧。“熟”是指要熟练掌握各类题型的计算方法,在理论上懂得其道理。“巧”是指解题的思路要简捷清晰。“巧”可以使你心明眼亮、高瞻远瞩,使你更容易找到最好的解题途径,从而减少计算量,达到既节省时间又降低出错率的双重功效。而做到“巧”同样需要对理论有较好的理解。总之,做好代数计算题同样要求对理论清楚明白。

从理论的角度看,代数学又是比较难的一门课。它的许多概念和性质比较复杂和抽象,尤其是各部分内容之间的联系非常紧密,而这方面往往是许多考生过去在学习中不大注意的。

基于以上原因,作者在编写本书时,对于概念的复习部分作了精心设计。虽然这部分内容在篇幅上不是本书的主要部分,但是这里凝聚了作者多年来讲授线性代数的教学经验和对该课程的独理解。希望在此基础上,为考生提供一个系统的、有着内在有机联系的,从而更加好懂、好记、好用的代数复习材料。

读者会发现,本书的概念复习部分不是考试大纲的“名词解释”。考试大纲自然是编写本书的重要依据,但我们并不完全“忠实”于大纲,有的内容是“超”出大纲的。读者还会发现,本书的内容也不是一般教材的简单浓缩,在体系上不同于一般教材,突出了各部分内容的联系,在讲法上也有自己的特色。在这里我们要谈几点看法。





(1) 有的考生以为“考试大纲上没有提到的就不会考,因此不必复习”。这种看法是片面的。数学的特点是系统性强,线性代数尤其如此。有的内容虽然没有列入大纲要求,这只能说明它们不会直接作为考试题出现,并不是不需要复习,因为对理论整体的理解上,它们往往是不可缺少的。

(2) 复习的最终目标是应对考试。随着考研竞争性的增强,考题的形式在变化,难度在加大,多数不再是一般教材中常见的基本题型。这些考题不仅要求考生熟练掌握计算题的解法,还应较好地理解有关概念和性质。本书中,我们针对考题,介绍一些一般教材上不讲的内容,教给大家一些常见问题的实用而简捷的方法。这些方法并不涉及到高深的理论知识,只是在考试大纲的基础上往前跨出了一小步,因此是容易理解的。

(3) 在复习阶段,应该注意各部分内容的联系,这也是本书的一个着眼点。这种联系不仅直接体现在内容中,在安排上也作了考虑。代数中几个最基本的概念并不难理解,一般学过的考生都不会忘记。我们把这些基本的概念集中在本书的开篇中作了简单介绍,让考生在复习之初先对代数学中的基本概念作一个大致的回忆,然后再把精力放在真正需要下工夫的部分。同时,也为了在后面讲述各章内容时强调概念的横向联系,而不必受各概念出现先后顺序的限制。

例题是本书内容的主要部分。在每一章,我们精选了丰富的例题(一部分是历年较难的考题),它们覆盖了有关内容的各类典型问题。对于解题的方法,我们不求全面,不介绍那些繁琐而不得要领的方法,力求简捷,思路自然,有启发性。必要时,我们还会以注的形式强调解题中的思路和方法。在有的例题后面,附有相关题型,以供读者即时练习,起到举一反三的功效。

例题中包含了证明题,有的是有相当难度的。真正考试中,也许这样难度的考题并不多见,但是通过对这类例题及它们的分析和证明,读者可以领会其思路和方法要领,提高自己的解题能力。

本书还精选了题型广泛的练习题。例题和练习题可以说包含了本课程几乎所有的题型。

数一,数二,数三的大纲在线性代数上几乎是相同的(只是数一多了向量空间部分,见第三章的3.7),因此本书对各类考生都适用。

由于时间仓促,本书难免会出现考虑不周之处,欢迎读者提出宝贵意见和建议。

尤承业



(1) 有的考生以为“考试大纲上没有提到的就不会考,因此不必复习”。这种看法是片面的。数学的特点是系统性强,线性代数尤其如此。有的内容虽然没有列入大纲要求,这只能说明它们不会直接作为考试题出现,并不是不需要复习,因为对理论整体的理解上,它们往往是不可缺少的。

(2) 复习的最终目标是应对考试。随着考研竞争性的增强,考题的形式在变化,难度在加大,多数不再是一般教材中常见的基本题型。这些考题不仅要求考生熟练掌握计算题的解法,还应较好地理解有关概念和性质。本书中,我们针对考题,介绍一些一般教材上不讲的内容,教给大家一些常见问题的实用而简捷的方法。这些方法并不涉及到高深的理论知识,只是在考试大纲的基础上往前跨出了一小步,因此是容易理解的。

(3) 在复习阶段,应该注意各部分内容的联系,这也是本书的一个着眼点。这种联系不仅直接体现在内容中,在安排上也作了考虑。代数中几个最基本的概念并不难理解,一般学过的考生都不会忘记。我们把这些基本的概念集中在本书的开篇中作了简单介绍,让考生在复习之初先对代数学中的基本概念作一个大致的回忆,然后再把精力放在真正需要下工夫的部分。同时,也为了在后面讲述各章内容时强调概念的横向联系,而不必受各概念出现先后顺序的限制。

例题是本书内容的主要部分。在每一章,我们精选了丰富的例题(一部分是历年较难的考题),它们覆盖了有关内容的各类典型问题。对于解题的方法,我们不求全面,不介绍那些繁琐而不得要领的方法,力求简捷,思路自然,有启发性。必要时,我们还会以注的形式强调解题中的思路和方法。在有的例题后面,附有相关题型,以供读者即时练习,起到举一反三的功效。

例题中包含了证明题,有的是有相当难度的。真正考试中,也许这样难度的考题并不多见,但是通过对这类例题及它们的分析和证明,读者可以领会其思路和方法要领,提高自己的解题能力。

本书还精选了题型广泛的练习题。例题和练习题可以说包含了本课程几乎所有的题型。

数一,数二,数三的大纲在线性代数上几乎是相同的(只是数一多了向量空间部分,见第三章的 3.7),因此本书对各类考生都适用。

由于时间仓促,本书难免会出现考虑不周之处,欢迎读者提出宝贵意见和建议。

尤承业

第三章 向量组的线性关系与秩

一、考试大纲要求	50
二、基本内容与重要结论	50
3.1 向量组的线性表示关系	50
3.2 向量组的线性相关性	51
3.3 向量组的极大无关组和秩	52
3.4 矩阵的秩	53
3.5 矩阵的等价	54
3.6 实向量的内积、正交矩阵、施密特正交化	54
3.7 向量空间	55
三、典型例题分析	56
四、自测练习题与参考答案	72

第四章 线性方程组

一、考试大纲要求	77
二、基本内容与重要结论	77
4.1 线性方程组的形式	77
4.2 线性方程组解的性质	77
4.3 线性方程组解的情况的判别	78
4.4 齐次方程组的基础解系、线性方程组的通解	78
三、典型例题分析	79
四、自测练习题与参考答案	97

第五章 特征向量与特征值, 对角化

一、考试大纲要求	102
二、基本内容与重要结论	102
5.1 特征向量和特征值	102
5.2 相似关系和对角化问题	103
5.3 实对称矩阵的对角化	104
三、典型例题分析	105
四、自测练习题与参考答案	128

Contents

第六章 二次型、正定

一、考试大纲要求	132
二、基本内容与重要结论	132
6.1 二次型及其矩阵、可逆线性变量替换	132
6.2 二次型的标准化	134
6.3 实对称矩阵合同的判断	134
6.4 正定二次型和正定矩阵	134
三、典型例题分析	135
四、自测练习题与参考答案	145
附录 1 两个线性方程组的解集的关系	148
附录 2 2006 年全国硕士研究生入学统一考试 数学考试线性代数部分试题及解答	152
附录 3 2007 年全国硕士研究生入学统一考试 数学考试线性代数部分试题及解答	158
附录 4 2008 年全国硕士研究生入学统一考试 数学考试线性代数部分试题及解答	161
附录 5 2009 年全国硕士研究生入学统一考试 数学考试线性代数部分试题及解答	168
附录 6 2010 年全国硕士研究生入学统一考试 数学考试线性代数部分试题及解答	174

基本概念

基础比较好的考生可不必看这部分内容,或者只用本部分的习题对自己进行一次测试.

(一) 矩阵

(1) 基本概念

矩阵是描写事物形态的数量形式的发展.

由 $m \times n$ 个数排列成一个 m 行 n 列的表格,两边界括以圆括号或方括号,即为一个 $m \times n$ 型矩阵. 这些数称为它的元素,位于第 i 行第 j 列的数称为 (i, j) 位元素.

本书中用大写黑体英文字母表记矩阵.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**,通常就记作 O .

两个矩阵 A 和 B 相等(记作 $A = B$),是指它的行数相等,列数也相等(即它们的类型相同),并且对应的元素都相等.

(2) 线性运算和转置

加(减)法: 两个 $m \times n$ 的矩阵 A 和 B 可以相加(减),得到的和(差)仍是 $m \times n$ 矩阵,记作 $A + B$ ($A - B$),法则为对应元素相加(减).

数乘: 一个 $m \times n$ 的矩阵 A 与一个数 c 可以相乘,乘积仍为 $m \times n$ 的矩阵,记作 cA ,法则为 A 的每个元素乘 c .

这两种运算统称为线性运算,它们满足以下规律:

- ① 加法交换律: $A + B = B + A$.
- ② 加法结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- ③ 加乘分配律: $c(A + B) = cA + cB$, $(c + d)A = cA + dA$.
- ④ 数乘结合律: $c(dA) = (cd)A$.
- ⑤ $cA = O \Leftrightarrow c = 0$ 或 $A = O$.

转置: 把一个 $m \times n$ 的矩阵 A 的行和列互换,得到的 $n \times m$ 的矩阵称为 A 的转置,记作 A^T (或 A').

有以下规律:

- ① $(A^T)^T = A$.
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- ③ $(cA)^T = c(A^T)$.

(3) n 阶矩阵和几类特殊矩阵

行数和列数相等的矩阵称为**方阵**,行列数都为 n 的矩阵也常常叫做 n 阶矩阵.



把 n 阶矩阵的从左上到右下的对角线称为它的主对角线, 或简称对角线. (其上的元素行号和列号相等.)

下面列出几类常用的 n 阶矩阵, 它们都是考试大纲中要求掌握的.

对角矩阵: 主对角线外的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

单位矩阵: 主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵, 记作 E (或 I).

数量矩阵: 主对角线上的元素都等于一个常数 c 的对角矩阵, 它就是 cE .

上(下)三角矩阵: 主对角线下(上)的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

对称矩阵: 满足 $A^T = A$ 的矩阵. 也就是对任何 i, j , (i, j) 位的元素和 (j, i) 位的元素总是相等的 n 阶矩阵.

反对称矩阵: 满足 $A^T = -A$ 的矩阵. 也就是对任何 i, j , (i, j) 位的元素和 (j, i) 位的元素之和总等于 0 的 n 阶矩阵. 反对称矩阵对角线上的元素一定都是 0.

(4) 矩阵的初等变换和阶梯形矩阵

矩阵的初等行变换有以下三种:

- ① 交换两行的上下位置.
- ② 用一个非 0 的常数乘某一行的各元素.
- ③ 把某一行的倍数加到另一行上.

类似地, 矩阵还有三种初等列变换, 大家可以模仿着写出它们, 这里省略了. 初等行变换与初等列变换统称初等变换.

阶梯形矩阵: 若一个矩阵满足:

- ① 如果它有零行, 则都出现在下面.
 - ② 如果它有非零行, 则每个非零行的第一个非 0 元素所在的列号自上而下严格单调递增.
- 则该矩阵称为阶梯形矩阵.

阶梯形矩阵的每个非零行的第一个非 0 元素的位置称为它的**阶梯台角**, 简称**台角**.

简单阶梯形矩阵: 是特殊的阶梯形矩阵, 特点为: 每个台角上的元素为 1, 并且其正上方的元素都为 0.

每个矩阵都可以用初等行变换化为阶梯形矩阵和简单阶梯形矩阵. 这种运算是线性代数的各类计算题中频繁运用的基本运算, 必须十分熟练.

一个矩阵用初等行变换化得的阶梯形矩阵不是惟一的, 但是它们在形式上相同 (即非零行数相等, 台角位置相同); 化出的简单梯形矩阵是惟一的.

(二) 向量

(1) 基本概念

向量是另一种描述事物形态的数量形式.

由 n 个数构成的有序数组称为一个 n 维向量, 称这些数为它的**分量**. 本书中常用小写黑体希文字母标记向量.

书写中可用矩阵的形式来表示向量, 例如分量依次是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的向量可表示成

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

请注意, 作为向量它们并没有区别, 但是作为矩阵, 它们不一样 (左边是 $1 \times n$ 矩阵, 右边是 $n \times 1$





矩阵). 通常把它们分别称为行向量与列向量. 请注意它们和下面规定的矩阵的行向量、列向量的区别.

一个 $m \times n$ 的矩阵的每一行是一个 n 维向量, 称为它的行向量; 每一列是一个 m 维向量, 称为它的列向量. 常常用矩阵的列向量组来写出矩阵, 例如当矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 时 (它们都是表示为列的形式!), 记为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

矩阵的许多概念也可对向量规定, 如向量的相等, 零向量 (记号也用 O) 等等. 这里从略.

(2) 线性运算和线性组合

向量也有加减法和数乘这两种线性运算, 并且也有完全一样的运算规律, 这里也不再复述了.

向量组的线性组合: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组 n 维向量, $c_1, c_2, \dots, c_s$ 是一组数, 则称 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的 (以 $c_1, c_2, \dots, c_s$ 为系数的) 线性组合. 它也是 n 维向量.

(三) 线性方程组

(1) 基本概念

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中未知数的个数 n 和方程的个数 m 不必相等. 分别称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad (A | \beta) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

为方程组的系数矩阵和增广矩阵.

如果 $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, 则称为齐次线性方程组. 把一个非齐次线性方程组的每个方程的常数项都换成 0, 所得到的齐次线性方程组称为原方程组的导出齐次线性方程组, 简称导出组.

线性方程组的解是一个 n 维向量 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, 它满足: 当未知数 x_i 都用 k_i 替代时每个方程都成为等式.

线性方程组的解的情况有三种: 无解, 惟一解, 无穷多解.

n 维零向量总是齐次线性方程组的解, 因此齐次线性方程组的解的情况只有两种: 惟一解 (即只有零解) 和无穷多解 (即有非零解).

(2) 同解变换与矩阵消元法

线性方程组的同解变换有三种:

- ① 交换两个方程的上下位置.
- ② 用一个非 0 的常数乘某个方程.
- ③ 把某方程的倍数加到另一方程上.

以上变换反映在增广矩阵上就是三种初等行变换.

线性方程组的基本求解方法是消元法, 用增广矩阵或系数矩阵来进行, 称为矩阵消元法, 步骤如下:





① 写出方程组的增广矩阵 $(A | \beta)$, 用初等行变换把它化为阶梯形矩阵 $(B | \gamma)$.

② 用 $(B | \gamma)$ 判别解的情况:

如果它的最下面的非零行为 $(0, 0, \dots, 0, d)$, 则无解, 否则有解.

有解时比较它的非零行数 r 与未知数个数 n , $r = n$ 时惟一解, $r < n$ 时无穷多解.

③ 在有解时, 写出 $(B | \gamma)$ 所代表的阶梯形方程组 (它与原方程组同解), 用它来求解. 在有无穷多解时, 通解的表达比较复杂, 放在第四章讲.

如果是惟一解, 可求解如下: 去掉 $(B | \gamma)$ 的零行, 得 $n \times (n+1)$ 矩阵 $(B_0 | \gamma_0)$, 用初等行变换将其化为 $(E | \eta)$, η 就是解.

对于齐次方程组, 只用把系数矩阵化为阶梯形矩阵, 则只有零解 $\Leftrightarrow$ 此阶梯形矩阵的非零行数 $r =$ 未知数个数 n .

(四) 习题

1. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

求 (1) $2A + B$; (2) $A - 3B$.

2. 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ -2 & t+1 \end{bmatrix},$$

已知 $2A + B = 0$, 求 x, y, s, t 的值.

3. 已知矩阵 X 满足等式 $X - 2A = B - X$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

求 X .

4. 已知

$$\alpha = (2, -1, 0, 1), \quad \beta = (-1, 4, 2, 3), \quad \gamma = (1, 0, 1, 0),$$

求 $\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\beta$ 和 $\alpha + 2\beta - \gamma$.

5. 已知 $(2, 0, a)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \mu \end{cases}$$

的解, 求 a, λ, μ .

6. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 则 () 成立.

(A) 若 A, B 都不对称, 则 $A + B$ 也不对称;

(B) $A + A^T, A - A^T$ 都是对称矩阵;

(C) 如果 A 对称, B 不对称, 则 $A + B$ 不对称;

(D) 如果 A 对称, B 不对称, 则 $A + B$ 可能对称, 也可能不对称.

7. 设 A 是一个 n 阶矩阵, 则 () 正确.

(A) 如果 A 是阶梯形矩阵, 则 A 是上三角矩阵;

(B) 如果 A 是上三角矩阵, 则 A 是阶梯形矩阵;





(C) 如果 A 是上三角矩阵, 则 $|A| \neq 0$;

(D) 如果 A 是阶梯形矩阵, 则 $|A| \neq 0$.

8. 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 则() 正确.

(A) A, B 都是对角矩阵 $\Leftrightarrow A+B, A-B$ 都是对角矩阵;

(B) A, B 都是三角矩阵, 则 $A+B$ 也是三角矩阵;

(C) 如果 cA 是数量矩阵, 则 A 也是数量矩阵;

(D) 如果 A, B 都不是对角矩阵, 则 $A+B$ 也不是对角矩阵.

9. 下列断言中正确的是().

(A) 两个阶梯形的 $m \times n$ 矩阵之和也是阶梯形矩阵;

(B) 如果 A 是阶梯形矩阵, 则 A 的最下面的行向量是零向量;

(C) 如果 A 是 n 阶的阶梯形矩阵, 记 a_{ii} 是它的主对角线上的第 i 个元素, 则当 $a_{ii} = 0$ 时,
 $\forall j > i, a_{ij} = 0$;

(D) 阶梯形矩阵的等于 0 的元素个数多于不等于 0 的元素的个数.

10. 用初等行变换化下列矩阵的阶梯形矩阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & a & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

11. 如果 A 是 n 阶的阶梯形矩阵, 并且没有零行. 它用初等行变换化出的简单阶梯形矩阵是什么矩阵?

(五) 习题参考答案

$$1. (1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2) \begin{bmatrix} 5 & -3 & -7 \\ 9 & -2 & -17 \end{bmatrix}.$$

$$2. x = -2, y = 1, s = -5, t = -5.$$

$$3. X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 3, 5\right); \quad \alpha + 2\beta - \gamma = (-1, 7, 3, 7).$$

$$5. a = -1, \lambda = -2, \mu = 3.$$

6. (C).

7. (A).

8. (A).

9. (C).

10. 答案不惟一, 这里省略. 下面写出化出的简单阶梯形矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$





$$(2) a = 5 \text{ 时, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$a \neq 5 \text{ 时, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. n 阶单位矩阵 E .



第一章

行列式

一、考试大纲要求

(一) 考试内容

行列式的概念和基本性质、行列式按行(列)展开定理.

(二) 考试要求

1. 了解 n 阶行列式的概念, 掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、基本内容与重要结论

1.1 形式和意义

形式: 用 n^2 个数排列成的一个 n 行 n 列的表格, 两边界以竖线, 就成为一个 n 阶行列式.

n 阶矩阵 A 相应的行列式记作 $|A|$, 称为 A 的行列式.

如果行列式的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则此行列式可表示为 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$.

意义: 是一个算式, 把 n^2 个元素按照一定的法则进行运算, 得到的数值称为这个行列式的值.

注意行列式和矩阵在形式和意义上的区别. 当两个行列式的值相等时, 就可以在它们之间写等号! (不必形式一样, 甚至阶数可不同.)

1.2 定义(完全展开式)

2 阶和 3 阶行列式的计算公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

