SHUXUEFENXIQUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

数学分析

全程学习指导与习题精解

华东师大第四版

主编　滕兴虎　王　璞

（下册）

基础知识归纳、重点难点提示

典型例题分析、课后习题精解

东南大学出版社
Southeast University Press

数学分析全程学习指导与习题精解(下册)

华东师大第四版

主　编　滕兴虎　王　璞

编　著　滕兴虎　寇冰煜　张　燕

　　　　张　纯　吴　欧　刘希强

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析全程学习指导与习题精解(下)/滕兴虎,王璞主编.一南京:东南大学出版社,2013.4
ISBN 978-7-5641-4150-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①滕… ②王… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 056832 号

数学分析全程学习指导与习题精解(下册)(华东师大第四版)

主　　编	滕兴虎　王　璞	**责任编辑**	刘　坚　戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	**电子邮件**	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	**电子邮件**	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	**印　　张**	19.5　**字　数**　540 千
版　　次	2013 年 4 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-4150-9		
定　　价	26.00 元		

前　言

数学分析是数学学科中一门最重要的基础课,也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目.学习数学分析既可以为后续专业课奠定必备的数学基础,同时也是提高自身数学修养的必经途径.

数学分析中的概念复杂多样,从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分,形成了一个无比精美的庞大系统.这个系统内容丰富,结构严密,无懈可击,作为数学专业学生进入大学阶段学习的第一门基础课程,许多同学在学习过程中感到数学分析抽象难懂,对基本概念以及定理结论在理解上感到困难,具体解题时缺乏思路,难以下手.为了帮助广大同学更好地掌握数学分析的基本概念和基本理论,综合运用各种解题技巧和方法,提高分析问题和解决问题的能力,我们根据华东师范大学数学系编写的《数学分析》第三版和第四版(高等教育出版社出版)编写了本辅导教材(上、下册).

本辅导教材由以下几个部分组成:

1. 基本要求、重点与难点:列出相应各章应掌握的知识点以及重点、难点内容.

2. 主要概念与公式:列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式,突出必须掌握和理解的核心内容以及考查的核心知识.

3. 重、难点解答:对本章重点、难点内容以及难以理解的问题给以详细剖析以帮助读者对相应内容理解得更加透彻.

4. 典型例题分析:精选了各名校的考研题以及经典教材中具代表性的例题,内容的重点放在对这些题目解题思路的剖析上,有助于读者从茫无头绪的已知条件中找出有用信息并形成清晰思路,帮助读者开拓解题思路,能够举一反三,触类旁通,更好地掌握数学分析的基本内容和解题方法.部分例题仅给出了完整的分析,解题过程留给读者作为练习,以体会解题思路的形成.

5. 课后习题全解:教材中课后习题数量大、层次多,许多题目为数学竞赛及研究生入学考试命题的来源.题目中基础性问题可从多个角度帮助同学们理解基本概念和基本理论,层次较高的问题则有助于广大读者进一步地提高和应用,不少问题具有独特的解题

思路和方法.因此,这里对两版教材课后的习题均给出了详细解答,帮助读者掌握一般的解题方法和解题技巧.由于数学分析解题方法千变万化,部分习题我们只给出了一种参考解答,其他方法留给读者自己去思考.(书中标有第四版教材习题的页码,可方便读者查阅.我们将第四版中没有的第三版习题摘录出来,如有读者需要,请联系我们索取电子版.电子邮件:1165785670@qq.com.)

基于以上特点本书可作为学习数学分析课程的辅导用书,也可作为教学及考研的参考.

本书由滕兴虎、寇冰煜、张燕、刘希强、张纯、吴欧、王璞等编写,并由滕兴虎、王璞统稿.在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助,在此表示感谢.由于作者的水平有限,加之时间仓促,书中不足之处在所难免,敬请广大同行和读者批评指正.

编　者

目　录

第十二章　数项级数

基本要求、重点与难点 …… 1
主要概念与公式 …… 1
重、难点解答 …… 4
典型例题分析 …… 7
课后习题全解 …… 11

第十三章　函数列与函数项级数

基本要求、重点与难点 …… 27
主要概念与公式 …… 27
重、难点解答 …… 29
典型例题分析 …… 33
课后习题全解 …… 36

第十四章　幂级数

基本要求、重点与难点 …… 49
主要概念与公式 …… 49
重、难点解答 …… 52
典型例题分析 …… 54
课后习题全解 …… 57

第十五章　傅里叶级数

基本要求、重点与难点 …… 70
主要概念与公式 …… 70
重、难点解答 …… 72
典型例题分析 …… 73
课后习题全解 …… 75

第十六章　多元函数的极限与连续

基本要求、重点与难点 …… 91
主要概念与公式 …… 91
重、难点解答 …… 95
典型例题分析 …… 99
课后习题全解 …… 101

第十七章　多元函数微分学

基本要求、重点与难点 …… 116
主要概念与公式 …… 116
重、难点解答 …… 119

典型例题分析 …… 123
课后习题全解 …… 126

第十八章　隐函数定理及其应用

基本要求、重点与难点 …… 148
主要概念与公式 …… 148
重、难点解答 …… 151
典型例题分析 …… 154
课后习题全解 …… 156

第十九章　含参量积分

基本要求、重点与难点 …… 175
主要概念与公式 …… 175
重、难点解答 …… 178
典型例题分析 …… 180
课后习题全解 …… 183

第二十章　曲线积分

基本要求、重点与难点 …… 197
主要概念与公式 …… 197
重、难点解答 …… 199
典型例题分析 …… 201
课后习题全解 …… 203

第二十一章　重积分

基本要求、重点与难点 …… 211
主要概念与公式 …… 211
重、难点解答 …… 219
典型例题分析 …… 225
课后习题全解 …… 229

第二十二章　曲面积分

基本要求、重点与难点 …… 260
主要概念与公式 …… 260
重、难点解答 …… 264
典型例题分析 …… 269
课后习题全解 …… 273

第二十三章　向量函数微分学

基本要求、重点与难点 …… 287
主要概念与公式 …… 287
重、难点解答 …… 291
典型例题分析 …… 291
课后习题全解 …… 292

第十二章　数项级数

基本要求、重点与难点

本章介绍了数项级数敛散性的概念及其讨论，可以得到用一个收敛数列（或收敛级数）来表示（或定义）一个数的方法．本章的讨论揭示了有限个数的和与无限个数的和的联系与区别，也是以下几章讨论的基础．

基本要求

1. 理解无穷级数收敛、发散及其和的概念．掌握无穷级数收敛的柯西（Cauchy）准则及必要条件，掌握无穷级数的基本性质．

2. 掌握正项级数的比较判别法，理解几何级数和 p-级数的敛散性．

3. 掌握正项级数的比式判别法（达朗贝尔判别法）、根式判别法（柯西判别法）和积分判别法．了解正项级数的拉贝判别法．

4. 掌握交错级数的莱布尼茨（Leibniz）判别法．

5. 理解无穷级数绝对收敛、条件收敛的概念．了解无穷级数的乘积．了解一般项无穷级数的狄利克雷判别法、阿贝尔判别法．

重点

无穷级数收敛的柯西准则．正项级数的比较判别法、比式判别法、根式判别法．

难点

交错级数的莱布尼茨判别法．

主要概念与公式

数项级数的基本概念

1. 定义　给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用"＋"连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{a}$$

称为数项级数或无穷级数（也常简称为级数），写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或简记为 $\sum u_n$，其中 u_n 称为该级数的通项．

2. 级数的部分和　级数(a)的前 n 项之和，记为

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{b}$$

称为级数的第 n 个部分和，简称部分和．

3. 级数的收敛与发散

若级数(a)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数(a)收敛，并称 S 为级数(a)的和，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

并称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数(a)的第 n 个余项．否则，称级数(a)发散．

注　级数(a)收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$．

4. 若 $\sum |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛．

5. 若 $\sum |u_n|$ 发散，而 $\sum u_n$ 收敛，则称 $\sum u_n$ 条件收敛．

级数的基本性质

1. 若级数 $\sum u_n$ 与级数 $\sum v_n$ 均收敛，则对任意的常数 a、b，级数 $\sum (au_n + bv_n)$ 亦收敛，且

$$\sum (au_n + bv_n) = a\sum u_n + b\sum v_n.$$

2. 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性．

注　此性质即为级数 $\sum u_n$ 与它的任一余项级数同时收敛，同时发散．

3. 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的敛散性，也不改变它的和．

级数收敛的条件

1. 级数收敛的充要条件(柯西准则)

任给正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $m>N$ 以及任意的正整数 p,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon.$$

2. 级数发散的充要条件　存在某正数 ε_0,对任何正整数 N,总存在 $m_0(>N)$ 和 p_0,有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

3. 级数收敛的必要条件　若级数(a)收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

注　我们常利用 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$ 来判别级数(a)发散.

正项级数收敛性判定方法

各项符号都相同的级数称为同号级数;各项都是正数(负数)的级数称为正项(负项)级数.负项级数可以转化为正项级数来处理.

1. 基本定理

正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界,即存在某正数 M,对一切正整数 n,有 $S_n<M$.

2. 比较判别法

(1) 比较原则

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,如果存在某正整数 N,对一切 $n>N$,都有 $u_n\leqslant v_n$,则

① 若级数 $\sum v_n$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 也收敛;

② 若级数 $\sum u_n$ 发散,则级数 $\sum v_n$ 也发散.

(2) 比较原则的推论

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,则

① 当 $0<l<+\infty$ 时,级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 同时收敛或同时发散;

② 当 $l=0$ 且级数 $\sum v_n$ 收敛时,级数 $\sum u_n$ 也收敛;

③ 当 $l\to+\infty$ 且级数 $\sum v_n$ 发散时,级数 $\sum u_n$ 也发散.

3. 比式判别法(达朗贝尔判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在正整数 N_0 及常数 q $(0<q<1)$,

① 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$,则级数 $\sum u_n$ 收敛.

② 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant1$,则级数 $\sum u_n$ 发散.

(1) 比式判别法的极限形式

若 $\sum u_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$,则

① 当 $q<1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛;

② 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散.

(2) 比式判别法的一般形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数,

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q<1(>1)$,则级数 $\sum u_n$ 收敛(发散).

4. 根式判别法(柯西判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及正常数 l,

① 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1$,则级数 $\sum u_n$ 收敛;

② 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant1$,则级数 $\sum u_n$ 发散.

(1) 根式判别法的极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

当 $l<1(l>1)$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛(发散).

(2) 根式判别法的一般极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

当 $l<1(l>1)$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛(发散).

5. 积分判别法

设 f 为$[1,+\infty)$上非负减函数,那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

6. 拉贝判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及常数 r,

① 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r>1$,则级数 $\sum u_n$ 收敛;

② 若对一切 $n>N_0$,成立不等式 $n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1$,则级数 $\sum u_n$ 发散.

拉贝判别法的极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数,且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$ 存在,则

当 $r>1(r<1)$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛(发散).

几种重要的常用级数

1. 等比级数

若 $a\neq0$,称级数 $a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$为等比级数(几何级数).

当$|q|<1$ 时,级数收敛;当$|q|\geqslant1$ 时,级数发散.

2. 调和级数　　称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 为调和级数. 调和级数是发散的.

3. p-级数　　称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$ 为 p-级数.

当 $p>1$ 时,级数收敛;当 $p\leqslant1$ 时,级数发散.

绝对收敛级数的性质

1. 绝对收敛的级数必收敛

2. 重排定理　若级数 $\sum u_n$ 绝对收敛,且其和等于 S,则任意重排后得到的级数 $\sum v_n$ 也绝对收敛,且有相同的和数.

3. 柯西定理　若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都绝对收敛,且分别收敛于 A、B,则对所有乘积按任意顺序排列所得到的级数 $\sum \omega_n$ 也绝对收敛,且其和等于 AB.

交错级数的莱布尼茨判别法

1. 交错级数　　设 $u_n>0$,则称级数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots \tag{c}$$

为交错级数.

2. 莱布尼茨判别法　　若交错级数(c)满足

① 数列$\{u_n\}$单调递减;

② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则级数(c)收敛.

一般项级数的收敛性判别法

1. 阿贝尔变换　　设 ε_i 与 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$为两组实数,若令

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k (k = 1, 2, \cdots, n),$$

则有如下分部求和公式成立

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \sigma_i + \varepsilon_n \sigma_n.$$

2. 阿贝尔引理 若

① $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是单调数组；

② 对任何正整数 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 有 $|\sigma_k| \leqslant A$（这里 $\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$），则记 $\varepsilon = \max\limits_k \{|\varepsilon_k|\}$ 时，有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right| \leqslant 3\varepsilon A.$$

3. 阿贝尔判别法 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，且级数 $\sum b_n$ 收敛，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

4. 狄利克雷判别法

若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

重、难点解答

1. 判别级数敛散性时的注意事项

(1) 用定义判别级数敛散性的方法

① 裂项求和

将级数化为 $\sum(u_n - u_{n+1})$ 或 $\sum(u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ 等形式来讨论. 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(n+2)}$ 可化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+2)!} \right)$，进而可判别其收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

② 判别部分和数列 $\{S_n\}$ 的子列的敛散性，常用于判别级数的发散. 如级数

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

其中，
$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right)$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n} = +\infty$，从而 $\{S_n\}$ 发散. 实际上，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

③ 将 S_n 通过两种不同的变形，使 S_n 中都出现同一个级数的部分和 S'_n，解出 S'_n. 进而求出 S_n. 如对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2S'_n - A_n,$$

其中，S'_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 的第 n 个部分和，A_n 为等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 的第 n 个部分和，又

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(k-1)}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} - \frac{n}{2^n} + A_n = S'_n - \frac{n}{2^n} + A_n,$$

从而
$$S'_n = -\frac{n}{2^n} + 2A_n,\ S_n = 3A_n - \frac{n}{2^{n-1}} = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(2) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛性与 a_n 的关系

① 若 $\{S_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，即若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 不成立，则原级数发散，此即级数收敛的必要条件.

② 若 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$（参见正项级数比较原则的推论）.

③ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散（$a_n > 0$），可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 也发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(3) 仅用定义不足以判定每个级数的敛散性. 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ 的部分和难以求出,故仅用定义无法判定其敛散性. 但对无限个数的和的理解仍需从级数敛散性的定义出发,即从部分和收敛还是发散出发去理解无限和.

2. 比较原则的使用

用比较原则判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$ 的敛散性,关键是寻找适当的比较级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. 一般地常选用 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ 等(把 u_n 在零点泰勒展开,类似于利用泰勒展开式求极限,就可以确定 u_n 关于 $\dfrac{1}{n}$ 的阶,进一步可确定适当的 p). 如果有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pu_n=+\infty\ (p>1)$,则可考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$(或收敛(发散)速度更慢的 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln n)^p}$ 等).

一般地,若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_n}{r_n}=0$,其中 R_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的第 n 个余项,r_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的第 n 个余项),则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛得慢. 对于两个发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{s_n}=0$,其中 S_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的第 n 个部分和,s_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的第 n 个部分和),则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散得慢.

应当注意的是,不存在一个收敛(发散)的正项级数,可以用它来作为判别其他所有正项级数收敛(或发散)的比较级数. 也就是说,不存在一个收敛得"最慢"的级数,也不存在一个发散得"最慢"的级数. 例如,如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任一收敛的正项级数,不妨设其收敛到 S, R_n 为其第 n 个余项,S_n 为其部分和,令

$$v_n=\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}=\sqrt{S-S_{n-1}}-\sqrt{S-S_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots;\ S_0=0),$$

则

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=\sqrt{R_1}-\sqrt{R_{n+1}}=S-\sqrt{R_{n+1}}\to S\ (n\to\infty),$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为收敛的正项级数,又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}})}{R_n-R_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}})=0$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛得慢的正项级数,因此,收敛得最慢的正项级数是不存在的. 又如,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一发散的正项级数,S_n 为其第 n 个部分和,令 $v_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}(n=1,\ 2,\ \cdots;\ S_0=0)$,则

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=\sqrt{S_n},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为一发散的正项级数. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0$$

从而可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散得慢的正项级数. 即对于任一收敛(发散)的正项级数,总是可以构造出一个收敛(发散)比它慢的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. 因此,收敛(发散)最慢的正项级数是不存在的,每一用作比较的级数仅适用于部分正项级数,由比较判别法导出的比式判别法、根式判别法、拉贝判别法等也仅适用于部分正项级数. 寻找收敛(发散)速度更慢的过程,即是寻找某一更能精确衡量其他级数收敛(发散)

的级数的过程，因此，相应的判别法的形式也越来越复杂. 但由于不存在收敛(发散)最慢的正项级数，因此，能用来判别所有正项级数敛散性的万能判别法是不存在的.

此外，比较原则的适用对象是正项级数. 例如 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=a_n+\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是发散的. 而且，即使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，也未必有 $a_n<b_n$(即使去除有限项)，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，若令

$$b_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，但不满足对所有的 n，使 $a_n<b_n$.

3. 比式判别法与根式判别法的使用

对任意的正项数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，由于 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，因此，一般地，比式判别法比根式判别法应用要方便，但根式判别法比比式判别法适用范围更广泛. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots,$$

用比式判别法无法判断，但由根式判别法和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{2}<1$，所以由根式判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛的. 此例也可说明比式判别法仅仅是充分的.

但一般来说，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中，u_n 含有 $n!$，a^n，n^n 时，常用比式判别法，u_n 中若含有以 n 为幂指数的因子，如 a^n，n^n 等，用根式判别法较为方便. 若用比式判别法失败，则可考虑用拉贝判别法或根式判别法；若根式判别法失败，则需另寻它路，比如采用定义或比较判别法等.

4. 积分判别法的使用

在使用积分判别法时，函数 $f(x)$ 的单调性不可缺少. 例如，令

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2},$$

其中，$g(x)$ 满足 $g(n)\equiv1$ $(n=1,2,\cdots)$，在闭区间 $\left[n-\dfrac{1}{n^2},n\right]$ 和 $\left[n,n+\dfrac{1}{n^2}\right]$ 的内部，$g(x)$ 是线性的，在区间的非整数端点及其他 $x\geqslant1$ 时 $g(x)$ 未定义的点处 $g(x)$ 的值为 0. 则 $f(x)$ 在 $x\geqslant1$ 时是正值连续，但不单调减，而 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 发散.

又如果 $g(x)$ 在区间的非整数端点及其他 $x\geqslant1$ 时 $g(x)$ 未定义的点处 $g(x)$ 的值为 1，其他同上面的情况，则 $f(x)$ 在 $x\geqslant1$ 时仍是正值连续非单调减的函数，而 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$ 发散，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

收敛.

5. 莱布尼茨判别法的使用

莱布尼茨判别法中的两个条件不可缺少. 仅由级数收敛的必要条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 的条件不可缺少，对于 $\{u_n\}$ 单调减的条件，例如级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}+\cdots$$

满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，但 $\{u_n\}$ 非单调减，而上述级数的

$$S_{2n}=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty(n\to\infty).$$

故该级数发散. 因此,在两个条件均满足时,才可使用莱布尼茨判别法.

但莱布尼茨判别法的条件仅是充分的,即存在收敛的交错级数,但不满足 u_n 单调减的条件. 例如,类似于莱布尼茨判别法的证明方法,可证明交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 尽管其一般项$\{u_n\}$不是单调减的,但仍是收敛的.

6. 条件收敛及绝对收敛的判定与理解

考察一个级数是条件收敛还是绝对收敛,一般地,首先要讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否收敛. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;否则继续讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否收敛,若收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛,否则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

对于绝对收敛的级数,由重排定理可知,它任意重排后仍绝对收敛且和数不变,但条件收敛的级数不具有这一性质,实际上有:

(黎曼定理)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛,则对于任意的 $S(-\infty<S<+\infty)$,都可以将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 重排,使得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$ 收敛于 S.

绝对收敛的两个级数,由柯西定理可知,它们的柯西乘积级数也收敛,且收敛到这两个级数和的乘积. 但对于条件收敛级数,它们的柯西乘积级数也可能是发散的. 例如

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

则可知二者条件收敛. 设

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$$

则

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\ \sqrt{n+2-k}},$$

$$|c_n|=\frac{1}{\sqrt{1}\ \sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}\ \sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}\ \sqrt{1}}\geqslant\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}\geqslant1\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散(由级数收敛的必要条件). 实际上,对于两个发散的级数,它们的柯西乘积级数也可能是绝对收敛的. 如级数

$$2+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots\quad(n=1,2,\cdots),$$
$$-1+1+1+1+\cdots+1^n+\cdots\quad(n=1,2,\cdots),$$

显见是两个发散的级数;它们的柯西乘积级数为

$$-2+0+0+0+\cdots+0+\cdots\quad(n=1,2,\cdots),$$

显见是绝对收敛的.

典型例题分析

【例 1】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

分析　只要找出等式两边级数前 n 项和的关系.

详解　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 的前 n 项和为 S_n,则

$$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1},$$

对上式两边取极限,结合$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

【例 2】 证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是对任意的正整数序列$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$,都有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0.$$

分析 根据结论的特点,用柯西收敛准则考虑.

详解 "⇒"因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则对任$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n>N$及在$p\in\mathbf{Z}^+$,有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon,$$

特别
$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n}|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0.$$

"⇐"用反证法.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则存在$\varepsilon_0>0$,任$N>0$,存在$n>N$及正整数$p$,使

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\geqslant\varepsilon_0.$$

特别取$N_1=1$时,存在n_1及正整数r_1,使

$$|a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_1+r_1}|\geqslant\varepsilon_0,$$

取$N_2=\max\{2, n_1\}$,存在$n_2>N_2$及正整数r_2,使

$$|a_{n_2+1}+a_{n_2+2}+\cdots+a_{n_2+r_2}|\geqslant\varepsilon_0,$$

如此下去.但这与$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$的条件矛盾.

注 应注意本例结论与§1中习题9结论的区别.

【例 3】 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的正项级数,并且数列$\{u_n\}$单调下降,证明$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

分析 因$\{u_n\}$单减,即下标越大u_n数值越小,而nu_n又是多个u_n和的形式,因此可考虑用余项来控制nu_n的大小.

详解 因$\{u_n\}$单调下降,故对任正整数$n, m, n>m$,有

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n>(n-m)u_n,$$

而若设r_m为级数的余项,则有
$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n<r_m,$$

因此
$$(n-m)u_n<r_m,\ u_n<\frac{1}{n-m}r_m,\ nu_n<\frac{n}{n-m}r_m.$$

又由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,故任$\varepsilon>0$,存在$m_0$,使$r_{m_0}<\frac{\varepsilon}{2}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-m}=1$,故存在$n_0(>m_0)$,当$n>n_0$时,有$\frac{n}{n-m_0}<2$,因此,当$n>n_0$时,有$0\leqslant nu_n<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2=\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

【例 4】 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数,证明:

(1) 若存在正数α及正整数N,当$n>N$时,有$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2) 若存在正整数N,当$n>N$时,有$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

分析 由$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$知$\ln a_n\leqslant-(1+\alpha)\ln n$,即有$0<a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$,而$\alpha>0$,故由比较判别法可

证(1)；类似由$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1$可知$a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$，由比较判别法可证得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

详解　略，读者据分析自证.

【例 5】 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$e^{a_n}=a_n+e^{b_n}$，其中$a_n>0$. 证明：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

分析　由一个级数收敛判定另外一个收敛，往往是通过比较判别法，为此，首先找出a_n与b_n的关系式.

详解　由$e^{a_n}=a_n+e^{b_n}$知$b_n=\ln(e^{a_n}-a_n)$. 又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，因此

$$b_n=\ln(e^{a_n}-a_n)=\ln(1+(e^{a_n}-a_{n-1}))\sim e^{a_n}-a_{n-1}\,(n\to\infty),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-a_{n-1}}{a_n^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2},$$

从而由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$必收敛.

【例 6】 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，且$S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$也发散.

分析　要证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散，由柯西收敛准则，只需找到某$\varepsilon_0>0$，使任$N>0$，存在$m_0>N$及$p_0$，

使得
$$\left|\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

而
$$\left|\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right|=\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\geqslant\frac{a_{m_0+1}+\cdots+a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}=1-\frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}},$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，因此当$p_0$充分大时可有$\dfrac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}}\leqslant\dfrac{1}{2}$，此时，取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$即可.

详解　因$a_n>0$，故S_n单调增，从而

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\geqslant\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，故对任$n$，当$p$充分大时，有$\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

所以由柯西收敛准则知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散.

【例 7】 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，其中$\{a_n\}$为单调递减正项数列. 令

$$u_n=\left(\frac{1}{1+a_1}\right)\left(\frac{1}{1+a_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+a_n}\right),$$

试证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

分析　由$a_n>0$且单调递减可知极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (\geqslant 0)$是存在的，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_{n+1}}=\frac{1}{1+a},$$

若$a=0$，则比值判别法失效. 若$a>0$，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的. 而一旦$a=0$，结合$a_n$单调递减，则

可由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与条件矛盾. 因此必 $a>0$.

详解 请读者据分析给出.

【例 8】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，试证级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛，其中 $a_n>0$.

分析 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，要证 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛，需将一般项 $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 向一般项 a_n^2 转化，由此用到不等式

$$0<\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n\ln^2 n}\right),$$

从而只需判断出 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 就收敛了. 实际上由积分判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛.

详解 请读者据分析给出.

【例 9】 设 f 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，$f''(0)$ 存在. 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛当且仅当 $f(0)=f'(0)=0$.

分析 由 $f(0)=f'(0)=0$ 及 $f''(0)$ 存在知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0),$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x^2}=\frac{1}{2}|f''(0)|=\lim_{n\to\infty}n^2\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这样 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 就绝对收敛了. 反之，由收敛的必要条件及函数的连续性可知

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

于是

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}f(x)=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

若 $f'(0)\neq 0$，则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 发散，矛盾于条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

详解 参见分析.

【例 10】 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$；

(3) $1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{11}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$；

(4) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{2}}}}+\cdots$.

详解 (1) 因 $\{\arctan n\}$ 为单调增有界数列且由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，从而由阿贝尔判别法知原级数收敛.

注 因 $\left\{\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}\right\}$ 为单调减数列，因此由莱布尼兹判别法也可知原级数收敛.

(2) 级数为正项级数，且

$$n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\quad(n\to\infty),$$

由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{x^2+1}=0$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2+1}$ 收敛，进而原级数收敛.

(3) 设 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$，则