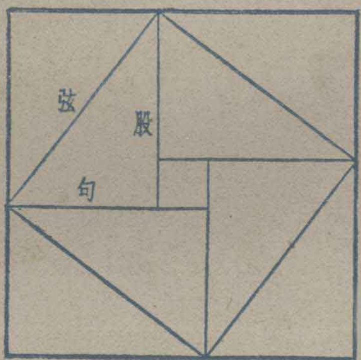
高級中学課本

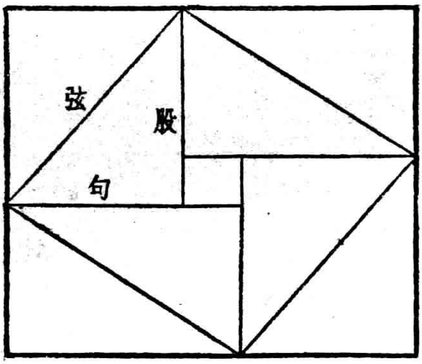
平面几何



人民教育出版社

高級中学課本

平面几何



人民教育出版社

目　　錄

第一章　相似形

I　綫段的度量

1. 引言　我們已經知道怎样判定兩条綫段是不是相等和怎样比較它們的大小．現在我們來研究怎样量綫段，即用数來表示綫段的長度的問題．

綫段的度量根据的是下面的公理：

亞几默得公理*　在長短不同的兩条綫段中，無論較長的綫段怎样長，較短的綫段怎样短，我們总可以在較長的綫段上連續截取較短的綫段，並且截取到某一次以后，就得出下面兩种情形中的一种：或者沒有剩余，或者得到一条短於較短綫段的剩余綫段．

这个公理，換一句話說就是：如果 a 和 b 是兩条已知的綫段，並且 $a>b$，那末我們总可以求出一个整数 m，使 $mb\leqq a$，並且 $(m+1)b>a$，就是使 $mb\leqq a<(m+1)b$．

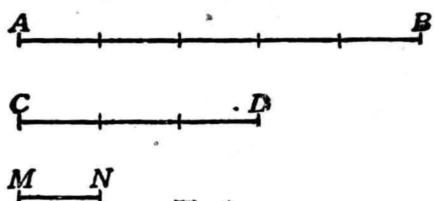


圖 1

2. 兩条綫段的公度　兩条綫段如果各含有第三条綫段的整数倍而沒有剩余，第三条綫段就叫做这兩条綫段的公度．例如，綫段 AB（圖1）

---

*　亞几默得（紀元前287年——紀元前212年）是希臘的数学家．他是一个热烈的爱國者．当罗馬人圍攻希臘的塞拉庫薩城时，他貢献出自己所有的科学知識來領導防御这个城市．当这座城市陷落，罗馬兵士闖進他家的时候，他正在沙子上画几何圖形，[illegible]叫喊"不要动我的圓"．但他終於被罗馬兵士殺死．

含有綫段MN的5倍，綫段CD含有綫段MN的3倍，綫段M
就是綫段AB和綫段CD的公度.

如果綫段MN是綫段AB和綫段CD的公度，把MN分
2、3、4或者更多的等分的时候，每一等分的綫段顯然也是AB
CD的公度. 因此，兩条綫段如果有某一个公度，它們就一定
無数个公度. 很容易看出，在这無数个公度中，沒有最小的
个，但必定有最大的一个.

如果兩条綫段有公度，那末最大的一个公度叫做这兩条
段的最大公度.

3. 求兩条綫段最大公度的定理

定理 1 在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫
的整数倍而沒有剩余，那末較短的綫段就是这兩条綫段的最
公度.

例如，綫段a(圖2)含有綫段b的3倍，因为綫段b含有它本身的1倍，所以綫段b是綫段a和綫段b的公度. 其次，綫段b不可能含有任何比它自己更長的綫段
整数倍，所以綫段b就是綫段a和綫段b的最大公度.

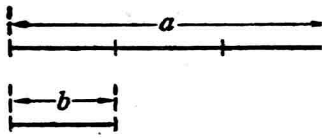


圖 2

定理 2 在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫
的整数倍而有剩余，那末这兩条綫段的最大公度(如果存在
話)就是較短的綫段和剩余綫段的最大公度.

例如，綫段a含有綫段b的3倍和剩余綫段r(圖3)，那

$$a=b+b+b+r.$$

从这个等式我們可以得出:

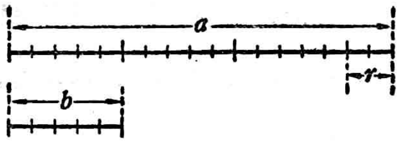


圖 3

(1) 如果綫段 b 和綫段 r 各含有某一条綫段的整数倍而沒有剩余，那末綫段 a 也必定含有这一条綫段的整数倍而沒有剩余. 例如，綫段 b 含有某一条綫段的 5 倍，綫段 r 含有这条綫段的 2 倍，綫段 a 就含有这条綫段的 $(5+5+5+2)$ 倍，即 17 倍.

(2) 反过來，如果綫段 a 和綫段 b 各含有某一条綫段的整数倍而沒有剩余，綫段 r 也就含有这条綫段的整数倍而沒有剩余. 例如，綫段 a 含有某一条綫段的 17 倍，綫段 b 含有这条綫段的 5 倍，那末綫段 a 中等於 $3b$ 的那一部分含有这条綫段的 15 倍，因此綫段 r 就含有这条綫段的 $(17-15)$ 倍，即 2 倍.

因此在兩組綫段

$$\overbrace{a\text{和}b} \qquad \overbrace{b\text{和}r}$$

中，如果有公度存在，那末所有的公度必定都是相同的，所以它們的最大公度也必定是相同的.

4. 兩条綫段的最大公度的求法 例如要求兩条已知綫段 AB 和 CD (圖 4)的最大公度. 我們可以在較長的綫段 AB 上用圓規从一端 A 起連續截取等於 CD 的綫段，使截取的次数尽可能地多. 这时根据亞几默得公理，可能發生下面兩种情形中的一种：

(1) 截取到某一次，正好截完而沒有剩余，这时根据 §3 的定理 1 知道，綫段 CD 就是所求的最大公度.

(2) 截取到某一次，得到比 CD 短的剩余綫段 EB (圖 4).

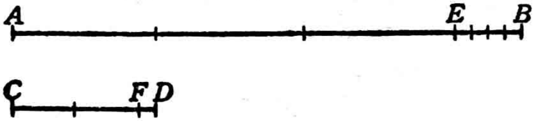


圖 4

这时根据 §3 的定理 2 知道，問題可以变成求兩条較短的綫段的最大公度，卽求 CD 和第一回剩余綫段 EB 的最大公度．要求它們的最大公度，仍然可以依照上面的方法來進行，在綫段 CD 上連續截取等於 EB 的綫段，使截取的次数尽可能地多．这时又可能發生兩种情形中的一种：或者 (1) 正好截完而沒有剩余，那末 EB 就是所求的最大公度；或者 (2) 得到比 EB 短的剩余綫段 FD，那末問題又变成求另外兩条較短的綫段的最大公度，卽求 EB 和第二回剩余綫段 FD 的最大公度.

这样繼續輾轉相截，我們会得到下面兩种情形中的一种：

(1) 在輾轉相截若干回以后，正好截完而沒有剩余；

(2) 輾轉相截的过程一直進行下去，永远有剩余(当然这只有在理論上是可能的，在实际作圖时，因为受到画圖儀器的限制，我們不可能截取任意小的綫段).

在第一种情形，最后一回的剩余綫段就是已知的兩条綫段的最大公度．为了便於計算出在已知綫段中含有最大公度的多少倍，我們可以順次寫出由每回相截所得到的等式，例如由圖 4 我們可以得到下列等式：

第一回相截…………$AB=3CD+EB$;

第二回相截…………$CD=2EB+FD$;

第三回相截…………$EB=4FD$.

在这些等式中,依次把下面的等式中的等量代入上面的等式,就得到

$$CD=2(4FD)+FD=9FD;$$

$$AB=3(9FD)+4FD=31FD.$$

在第二种情形,已知的兩条綫段不可能有公度,这点我們可以用反証法來証明. 假定已知的兩条綫段 AB 和 CD 有某一个公度,那末不但綫段 AB 和綫段 CD 含有这个公度的整数倍,而且剩余綫段 EB 也含有这个公度的整数倍,因而第二回的剩余綫段 FD 以及第三回、第四回等等的剩余綫段也含有这个公度的整数倍. 但是上面这些剩余綫段是逐次減小的,所以每一回的剩余綫段中所含的公度的倍数,都比它前面一回的剩余綫段所含的公度的倍数小. 因此如果把輾轉相截的过程繼續進行下去,一定有完結的时候(即不再得到任何的剩余). 但这和已知的条件相矛盾. 由此可知,已知的兩条綫段不能有任何的公度.

5. 有公度綫段和無公度綫段 如果兩条綫段有公度,那末这兩条綫段叫做**有公度綫段**;如果兩条綫段沒有公度,那末这兩条綫段叫做**無公度綫段**.

無公度綫段的存在,是不容易使人相信的,因为在繼續進行輾轉相截的过程中,好像总可以得到一个这样小的剩余綫段,由外表上看起來,上一回的剩余綫段正好含有它的整数倍. 实际上,这时还是可能得到某一条剩余綫段的,不过由於画圖儀器(圓規)精确度的限制和我們感覺器官(視覺)辨認力的限制,我

們观察不到罢了. 現在我們來証明無公度綫段是存在的.

6. 定理　正方形的对角綫和它的边是無公度綫段.

因为正方形的对角綫把正方形分成兩个全等的等腰直角三角形, 所以这个定理也可以用下面的說法來代替, 即**等腰直角三角形的斜边和它的直角边是無公度綫段.**

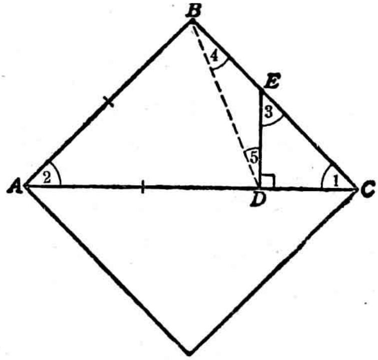


圖　5

要証明等腰直角三角形 ABC (圖 5)的斜边 AC 和直角边 AB 是無公度綫段, 我們先來証明等腰直角三角形的一个性質, **即如果在等腰直角三角形 ABC 的斜边 AC 上截取和一条直角边相等的綫段 AD, 並且作 $DE \perp AC$ 交 BC 於 E, 那末所得到的直角三角形 EDC 也是等腰直角三角形, 並且原三角形的直角边 BC 上的綫段 BE 等於斜边上的綫段 DC.**

为了証明这一个性質, 我們連結 BD, 研究 $\triangle EDC$ 和 $\triangle BED$ 的各个角. 因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle 1 = \angle 2 = 45°$. 因此在直角三角形 EDC 中, $\angle 3 = 45°$, 所以 $\angle 1 = \angle 3$, 从而 $DC = DE$. 由此可知 $\triangle EDC$ 是一个等腰直角

三角形.

在 $\triangle BED$ 中，$\angle 4$ 等於直角 ABC 减去 $\angle ABD$，$\angle 5$ 等於直角 ADE 减去 $\angle ADB$；因为 $\angle ABD=\angle ADB$（由於 $AD=AB$），所以 $\angle 4=\angle 5$. 由此可知 $BE=DE$. 但 $DC=DE$，所以 $BE=DC$.

証明了这一个性質，我們就开始來求綫段 AC 和綫段 AB 的公度. 因为 $AC>AB$，並且 $AC<AB+BC$，即 $AC<2AB$，所以在斜边 AC 上截取等於直角边 AB 的綫段，截取一次后就得到一条比 AB 短的剩余綫段 DC. 現在我們再在 AB 上截取等於 DC 的綫段. 由於 $AB=BC$，所以我們也可以在 BC 上截取等於 DC 的綫段. 因为 $BE=DC$，所以在 BC 上截取了一次之后，就要在 EC 上截取等於 DC 的綫段. 但 EC 是等腰直角三角形 EDC 的斜边，而 DC 是它的直角边；所以現在又是要在等腰直角三角形的斜边上截取它的直角边，結果当然要得到一条比直角边短的剩余綫段. 照这样順次做下去，就变成順次在新的較小的等腰直角三角形的斜边上截取它的直角边，顯然这种过程是不会有完結的时候的. 輾轉相截的过程既沒有完結的时候，那末綫段 AC 和綫段 AB 的公度就不存在，即它們是無公度綫段.

7. 关於綫段的度量的概念 为了要量一条綫段，我們取定一条已知綫段做标准，並且用它在被量的綫段上尽可能地來截取. 这条取定做标准的已知綫段叫做**長度單位**. 从上面可以知道，被量的綫段和長度單位可能有公度，也可能沒有公度. 我們分别來討論这兩种情形.

(1) 設被量的綫段 a 和長度單位 l 有公度. 这时，我們首先求出它們的最大公度，並且判明綫段 l 和綫段 a 各含有这个最大公度的多少倍. 如果最大公度就是綫段 l，度量的結果就是整數. 例如，綫段 a 含有綫段 l 的 3 倍，綫段 a 的長度就等於 3 个長度單位. 如果最大公度是綫段 l 的若干分之一，度量的結果就是分数. 例如，最大公度是綫段 l 的$\frac{1}{4}$，而綫段 a 含有这个最大公度的 9 倍(圖 6)，綫段 a 的長度就等於$\frac{9}{4}$个長度單位.

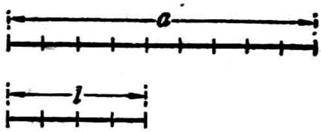


圖 6

量一条綫段所得的数，叫做这条綫段的量数. 从上面的說明可以知道，如果一条綫段和長度單位有公度，用这个長度單位來量这条綫段所得的量数必定是一个整数或一个分数，就是一个有理数.

(2) 設被量的綫段 a 和長度單位 l 沒有公度. 这时，我們可以求出和長度單位 l 有公度的另外兩条綫段，其中的一条略短於 a，而另一条略長於 a，並且这兩条綫段和 a 的差都可以任意小. 为了求出这样的兩条綫段，我們可以用下面的方法來進行：例如，要求出和長度單位 l 有公度並且和綫段 a 的差小於$\frac{1}{10}$長度單位的綫段，就把長度單位 l 分成 10 个等分(圖 7)，並且

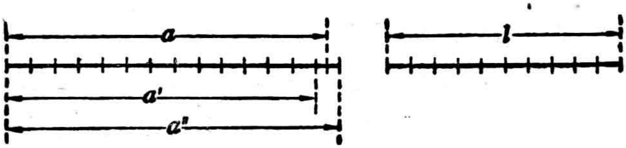


圖 7

用其中的一个等分在綫段 a 上連續截取，使截取的次数尽可能

地多. 設截取 13 次后得到一个小於$\frac{1}{10}l$ 的剩余綫段, 这时我們就得出一条和長度單位有公度並且略小於 a 的綫段 a'. 再用$\frac{1}{10}l$截取一次, 可得出另一条和長度單位有公度並且略大於 a 的綫段 a''. 这兩条綫段和綫段 a 的差都小於$\frac{1}{10}l$, 它們的長度分別等於$\frac{13}{10}$長度單位和$\frac{14}{10}$長度單位. $\frac{13}{10}$和$\frac{14}{10}$都可以認为是綫段 a 的長度的量数的近似值: 第一个是不足近似值, 第二个是过剩近似值. 因为綫段 a 与綫段 a' 或 a'' 的差都小於長度單位的$\frac{1}{10}$, 所以通常說, 这兩个近似值的每一个都表示綫段 a 的長度的量数精确到$\frac{1}{10}$.

一般地說, 为了求出綫段 a 的長度的量数的近似值精确到長度單位的$\frac{1}{10^n}$, 可以把長度單位 l 分成 10^n 个等分, 並且求出綫段 a 含有$\frac{1}{10^n}l$ 的多少倍, 如果 a 含有$\frac{1}{10^n}l$ 的 m 倍和一个小於$\frac{1}{10^n}l$ 的剩余綫段, 那末$\frac{m}{10^n}$和$\frac{m+1}{10^n}$就是綫段 a 的長度的量数的近似值, 並且精确到$\frac{1}{10^n}$, 第一个是不足近似值, 第二个是过剩近似值.

用上面的方法, 我們可以求出一个有理数來表示綫段 a 的長度的量数的不足近似值或过剩近似值.

当綫段 a 和長度單位 l 沒有公度时, 要求出一个数來表示綫段 a 的長度的量数的正确值, 可以用下面的方法:

順次求得綫段 a 的長度的量数的不足近似值, 首先精确到 0.1, 然后精确到 0.01, 再精确到 0.001, 並且無限地繼續下去, 每次的精确度都提高 10 倍. 由这种过程就順次得出一列小数, 首先是一位小数, 然后是兩位小数、三位小数等等, 越到后面小数

的位数越多. 这样無限地繼續下去, 就得到一个無限不循环小数(这个小数不可能是循环小数, 因为如果是循环小数, 就可以化成分数, 綫段 a 和長度單位 l 就要有公度).

从代数上可以知道, 無限不循环小数叫做無理数. 从上面的説明可以知道, 如果一条綫段和長度單位沒有公度, 用这个長度單位來量这条綫段所得的量数是一个無理数.

注意 順次求得綫段 a 的長度的量数的过剩近似值精确到 0.1、0.01、0.001、……, 也可以得到同一个無理数. 事实上, 具有相同精确度的不足近似値和过剩近似値, 它們之間的差别僅在最后的某些小数位上. 当順次提高精确度时, 这些最后的小数位將离小数点向右方越來越远, 兩个小数中数字相同的位数就越來越多. 如果無限地繼續这种过程, 由兩种情形所得出來的, 必定是同一个無限不循环小数, 即同一个無理数.

8. 兩条綫段的比 以后我們説到綫段的長度, 在長度單位已經确定的时候, 应当理解为就是这綫段的量数.

兩条綫段的比就是用同一个長度單位來量它們所得的量数的比.

兩条綫段的比和所取的長度單位無关. 例如, 取原來長度單位的 $\frac{1}{3}$ 为新的長度單位, 那末每条綫段所含新單位的数目都是所含原單位的数目的 3 倍, 所以, 在表示兩条綫段的比的分数中, 分子和分母都擴大 3 倍, 而分数的値並不發生变化.

从上面所説的可以知道:

一条綫段的量数就是这条綫段和長度單位的比.

兩条綫段 a 和 b 的比也就是用 b 做長度單位去量 a 所得的量数.

如果兩条綫段有公度, 那末它們的比是一个有理数; 如果兩

条綫段沒有公度，那末它們的比是一个無理数.

9. 比例綫段 如果綫段 a 和 b 的比等於綫段 c 和 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我們就說这**四条綫段 a、b、c、d 成比例**. 这时，綫段 a 和 d 叫做比例的**外項**，綫段 b 和 c 叫做比例的**內項**，綫段 d 叫做綫段 a、b、c 的**第四比例項**.

如果綫段 a、b、c 之間有 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 的关系，那末綫段 b 叫做綫段 a 和 c 的**比例中項**.

因为我們把綫段的長度理解为就是它的量数，所以綫段的比和由綫段組成的比例分別具有数的比和由数組成的比例的性質. 下面一些性質是我們以后常常要应用到的.

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $ad=bc$.

(2) 如果 $ad=bc$，那末 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(3) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$（反比定理）.

(4) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$（更比定理）.

(5) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（合比定理）.

(6) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，並且 $a>b$，那末 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$（分比定理）.

(7) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，並且 $a>b$，那末 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比定理）.

(8) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$，那末

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots\text{（等比定理）}.$$

習 題 一

1. 如果 l 是一条已知綫段，在下列各种情况下，求綫段 a 和 b 的最大公度各是綫段 l 的多少倍：

(1) a 含有 l 的 6 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(2) a 含有 l 的 7 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(3) a 含有 l 的 8 倍，b 含有 l 的 4 倍；

(4) l 含有 a 的 2 倍，l 含有 b 的 3 倍.

2. 如果綫段 a 含有綫段 l 的 54 倍，綫段 b 含有綫段 l 的 15 倍；那末在綫段 a 上連續截取等於 b 的綫段后所得的比 b 短的剩余綫段 r 含有 l 的几倍？

3. 在上題中，綫段 a 和 b 的最大公度是綫段 l 的多少倍？綫段 b 和 r 的最大公度是綫段 l 的多少倍？

4. 如果綫段 a 和 b 分别含有綫段 l 的 207 倍和 93 倍，在 a 上連續截取 b 后所得的比 b 短的剩余綫段是 r_1，在 b 上連續截取 r_1 后所得的比 r_1 短的剩余綫段是 r_2，…….

(1) 求 r_1、r_2、……各含有 l 的多少倍；

(2) 求綫段 a 和 b 的最大公度含有 l 的多少倍.

5. 綫段 a 和 b 輾轉相截，各回的剩余綫段分別为 r_1、r_2、r_3，並且

$$\begin{aligned} a &= 3b + r_1, \\ b &= 2r_1 + r_2, \\ r_1 &= 4r_2 + r_3, \\ r_2 &= 5r_3. \end{aligned}$$

(1) 求 a 和 b 的最大公度；

(2) a 和 b 各含有这个最大公度的多少倍？

6. 如果等腰三角形的一个底角等於 36°，那末它的底边和腰是無公度綫段.

7. 用 §7 的方法求：

(1) 以一个正方形的边为長度單位，量它的对角綫所得的量数（精确到 0.1）.

(2) 以一个等边三角形的边为長度單位，量它的高所得的量数（精确到 0.1）.

8. (1) 点 K 分綫段 AB 的比为 $5:3$（即 $AK:KB=5:3$），求 $AB:AK$ 和 $AB:KB$.

(2) 点 K 分綫段 AB 的比为 $m:n$，求 $AB:AK$ 和 $AB:KB$.

9. 延長綫段 AB 到 K，使 $AK:KB=5:3$，求 $AK:AB$.

10. 已知 C 是綫段 AB 上的一点，D 是 AB 的延長綫上的一点，並且 $AD:DB=AC:CB$. 如果 $AB=6\text{cm}$，$AC=3.6\text{cm}$；求 AD 和 DB 的長.

11. 已知綫段 DE 分别交 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 於 D 和 E，並且 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$；求証：

(1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$;

(2) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

12. 已知綫段 DE 分别交 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 於 D 和 E，並且 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$；求証：

(1) $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$;

(2) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

13. 在第 12 題中，如果 $AB>AC$，求証 $\frac{AB+AC}{AB-AC}=\frac{AD+AE}{AD-AE}$.

14. 在第 12 題中，如果 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{3}{2}$，並且 $\triangle ABC$ 的周長为 6cm，求 $\triangle ADE$ 的周長.

15. 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{e}$；那末 $d=e$.

16. 已知綫段 x 是綫段 a 和 b 的比例中項，求証 $x=\sqrt{ab}$.

II 三角形的相似

10. 預备概念 在我們的日常生活中，时常可以遇見大小不同而形狀相同的圖形. 例如，原來的照片和放大后的照片，或者用不同的比例尺所繪的建筑物或整个城市的平面圖，都是这种圖形的例子. 像这种大小不同而形狀相同的圖形，通常說它們是相似形.

熟悉了綫段的度量以后，我們可以正确地了解几何相似形的概念，並且能得出变更圖形的大小而不变更它的形狀的方法.

11. 相似三角形的定义 在兩个三角形中，如果各角对应相等，那末兩对相等的角所夾的边(也就是一对相等的角的对边)，就是对应边. 例如，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ (圖 8)中，如果 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$；那末 AB 和 $A'B'$, BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ 就分别是对应边.

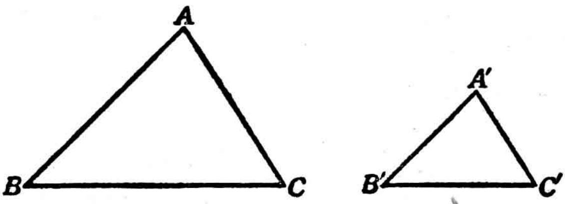


圖 8

在兩个三角形中，如果(1)各角对应相等，並且(2)对应边成比例，这兩个三角形就叫做**相似三角形**. 例如，在圖8的$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，(1) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$，並且 (2) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$，它們就是相似三角形.