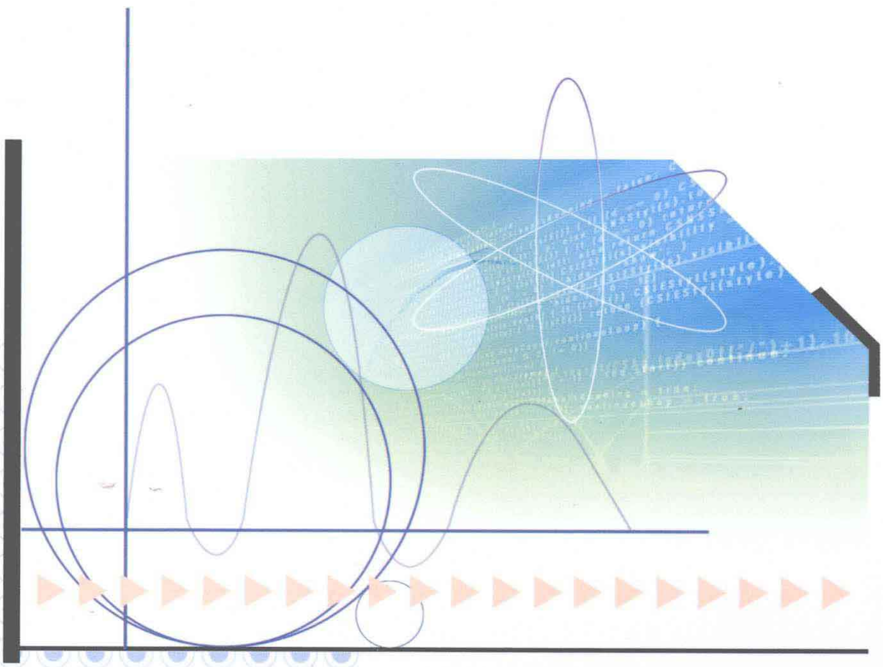
21世纪高等教育规划教材

工程数学

何春辉　徐雅玲　编著



中国农业科学技术出版社

21 世纪高等教育规划教材

工 程 数 学

主　编　何春辉　徐雅玲
副主编　罗胡英　王永新
编　委　王丽君　隋崴崴　左静贤

中国农业科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/何春辉，徐雅玲主编．—北京：中国农业科学技术出版社，2009.12
ISBN 978-7-5116-0017-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①何…②徐… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 155185 号

责任编辑 崔改泵
责任校对 贾晓红

出 版 者 中国农业科学技术出版社
北京市中关村南大街 12 号 邮编：100081
电 话 (010) 82109704(发行部) (010) 82106626(编辑室)
(010) 82109703 (读者服务部)
传 真 (010) 82106624
网 址 http://www.castp.cn
经 销 者 新华书店北京发行所
印 刷 者 河北省昌黎县第一印刷厂
开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 11.5
字 数 240 千字
版 次 2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷
定 价 20.00 元

前　言

工程数学课程是高等职业教育各类专业必修的重要基础课。本教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体，它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学思想和方法解决实际问题的能力都具有非常重要的作用。为了适应高等职业教育快速发展的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，根据高等职业教育数学教学的特点，在充分汲取高等职业院校和成人高等学校的改革成果和教学经验的基础上，我们组织编写了这本教材。

在本书编写过程中我们努力体现下述特点：

（1）　本书采用以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生数学应用意识、兴趣及能力的培养，培养学生用数学的思想和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，加强数学建模教学内容，注意与实际应用的联系。

（2）　本书充分考虑高职高专教育的特点和当前的教育实际，以“必需”、“够用”为度，加强基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算和变换。

（3）　本书充分考虑高职高专学生的特点，便于学生自学，以符合高职高专学生的认识结构。在内容处理上兼顾学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题能力的培养；对课程的每个内容尽量从几何、数值和分析三个方面加以说明。

（4）　本书注重有关概念的解释，力求表达准确、思路清晰、通俗易懂、注重数学方法的阐述，注意培养学生的综合素质、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力。

（5）　每节后附有习题，通过习题力求达到使学生从新的角度理解概念，掌握运算，巩固知识。章后附有自测题，可作为本章的综合练习题。

本书共分四章，主要内容包括空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学以及数学建模初步及应用范例，本书由秦皇岛职业技术学院何春辉、河北农业大学海洋学院徐雅玲担任主编，河北农业大学海洋学院罗胡英、王永新担任副主编，王丽君、隋崴崴、河北建材职业技术学院左静贤参加编写工作。由于时间仓促及作者水平所限，书中不足之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

第一章　空间解析几何

用代数方法研究空间几何图形，就是空间解析几何。同平面解析几何一样，空间解析几何就是通过建立空间直角坐标系，使空间的点与三元有序数组之间建立起一一对应的关系，并将空间图形与三元方程联系在一起，从而达到用代数方法研究空间问题的目的。空间解析几何是平面解析几何的拓广，是学习多元函数微分学的重要基础。

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间取一定点 O，过点 O 作三条相互垂直且具有相同长度单位的数轴，称这三条数轴分别为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**，点 O 称为**坐标原点**。通常把 x 轴、y 轴放置在水平面上，z 轴则铅直放置，它们的正方向符合**右手法则**，即伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴的正向，然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$ 指向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向。图 1.1 中的箭头指向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**。

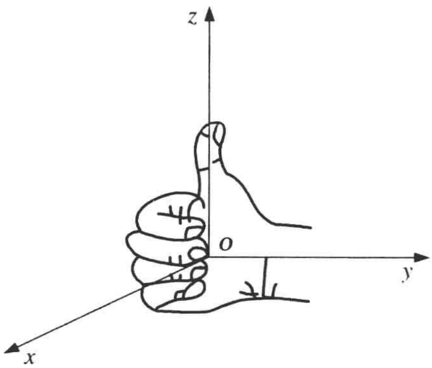


图 1.1

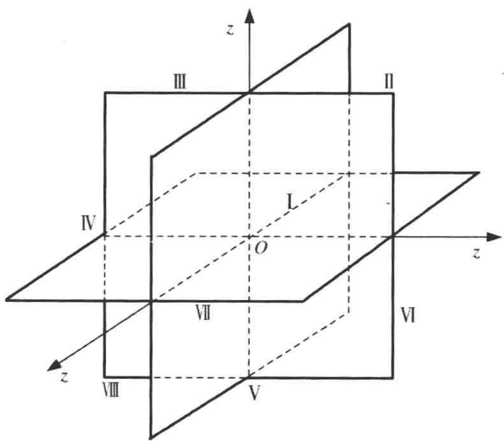


图 1.2

三条数轴中任意两条确定一个平面，分别为 xOy 面、yOz 面、zOx 面，称为**坐标面**。三个坐标面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**，如图 1.2 所示，以 x 轴、y 轴、z 轴正半轴为棱的卦限为第一卦限，在 xOy 平面上方按逆时针方向依次为第二、三、四卦限，在 xOy 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限，然后按逆时针依次为第六、七、八卦限。

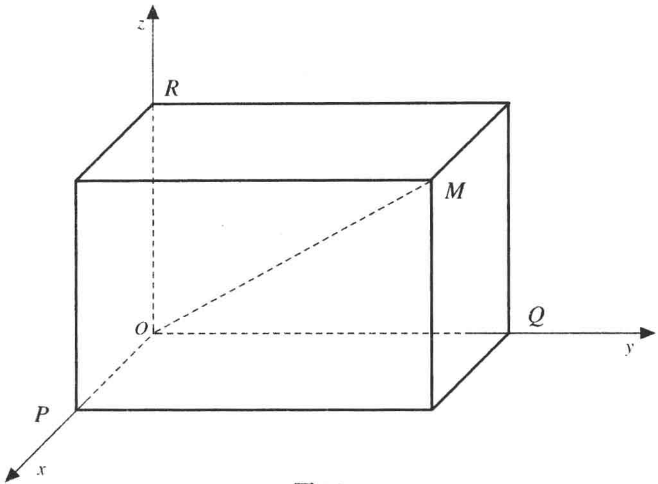


图 1.3

有了空间直角坐标系，就能建立空间的点与有序数组之间的一一对应关系了，即确定空间点的直角坐标。

设 M 为空间点(如图 1.3)，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与各轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，反之，若已知一有序数组 (x,y,z)，分别在 x 轴、y 轴、z 轴上依次取坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，并过 P、Q、R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，则这三个平面交于唯一的一点 M，这样就建立了空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系，这组数组 (x,y,z) 称为点 M 的**坐标**，坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$，又称 x、y、z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标。

显然，原点的坐标为 $O(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别是 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy 面、yOz 面、zOx 面上点的坐标依次为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$ ，$(x,0,z)$。为了便于确定空间中的点 $M(x,y,z)$ 的位置，现将其坐标 x、y、z 在各卦限中的符号列表如下：

卦限 符号 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

二、两点间距离公式

已知空间两点的直角坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求 M_1 和 M_2 之间的距离 $|M_1M_2|$。

如图 1.4 所示过 M_1 与 M_2 分别作与三个坐标轴垂直的平面，则这六个平面围成一个 M_1M_2 为对角线的长方体，容易看出：

$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$，即

$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离：

$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

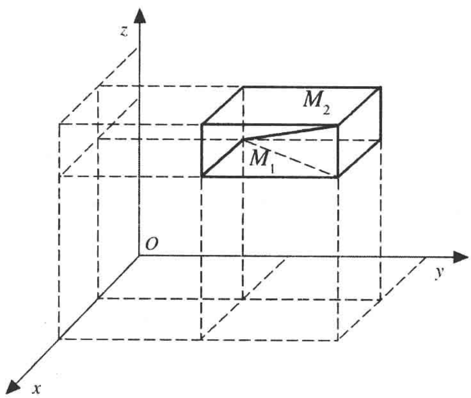


图 1.4

例 1.1 求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴的距离。

解 $|OM|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

点 M 到 x 的距离即为点 M 到点 $(4,0,0)$ 的距离

$$d_x=\sqrt{(4-4)^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$$

同理可求点 M 到 y 轴和 z 轴的距离分别为

$$d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$$

$$d_z=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

练习题 1.1

1. 求点 $M(1,-2,3)$ 关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标。
2. 求点 $(4,5,-3)$ 到原点及各坐标轴的距离。

第二节　向量

一、向量的概念

在实际生活中经常遇到两种类型的量，一种是只有大小的量，叫数量或标量，如长度、温度、质量、时间等。另一种是既有大小又有方向的量，叫**向量**，如速度，力、加速度等。

向量常用有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，如以 A 为起点 B 为终点的向量，记为$\overrightarrow{AB}$(如图 1.5)，也常用粗体字 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等表示向量。

向量的大小叫做向量的**模**，向量 $\boldsymbol{a}$ 或向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$。

模为 1 的向量叫做**单位向量**，记为 e。

模为 0 的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量的方向是任意的。

与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$ 或 e_a，则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

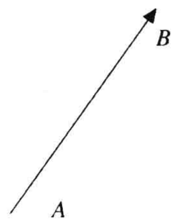


图 1.5

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等、方向相同，则两个向量相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

由向量相等的定义，我们把任一向量不改变方向的平行移动，向量是不变的，因此向量是与起点位置无关的。这种与起点位置无关的向量叫做**自由向量**。今后我们讨论的都是自由向量。

如果两向量方向相同或相反，我们就称这两个向量**平行(共线)**。零向量与任何向量平行(共线)。

在空间直角坐标系下，以原点 O 为起点，以点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$ 称为关于原点的**向径**，有时用 r 表示，任何一个向量都可以将其放在坐标原点处成为向径。

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

如果我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，并以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1.6)。

用平行四边形的对角线向量来定义两向量和的方法，称为向量加法的**平行四边形法则**。

利用向量相等的定义和平行四边形对边平行且相等的性质，还可以有另外一种求两向量和的方法，即将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 首尾相接(即 a 的终点与 b 的起点重合)，我们把以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1.7)。这种求向量和的方法叫向量加法的**三角形法则**。

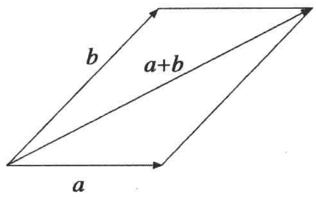


图 1.6

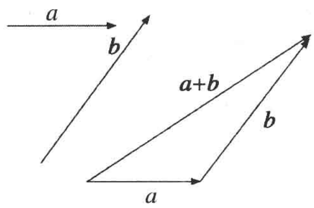


图 1.7

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则定义它们的和为：当两向量方向相同时，它们的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同，其模等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模长之和；当两向量方向相反时，它们的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中模较大的那个向量的方向相同，和向量的模等于两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模的差的绝对值。

对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$，有：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$。

向量的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

2. 向量的减法

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$。

利用向量的加法定义和负向量概念，便可定义两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的减法，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 易知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

向量的减法可按三角形法则进行，因此 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点出发到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量图(如图 1.8)。

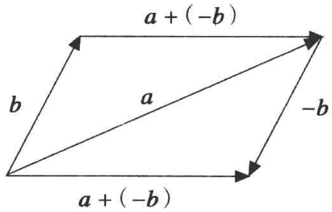


图 1.8

3. 向量与数的乘法(数乘)

设 λ 是数，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，并且规定：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；

(3) 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量。

向量与数的乘积有如下规律：

(1) 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，则与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$；

(3) 结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(4) 分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\mu$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

另外，由数乘的定义可得以下结论：

定理 1　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在唯一实数 $\lambda(\lambda\neq0)$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

三、向量的坐标表示及其运算

在空间直角坐标系中，与 x 轴、y 轴、z 轴正方向相同的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为空间直角坐标系下的三个基本单位向量。

设 M 为空间一点，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，分别与坐标轴交于点 A,B,C，称 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 为在三个坐标轴上的投影(如图 1.9)。若 M 的坐标为 (x,y,z)，则

$$x=\overrightarrow{OA},\quad y=\overrightarrow{OB},\quad z=\overrightarrow{OC}$$

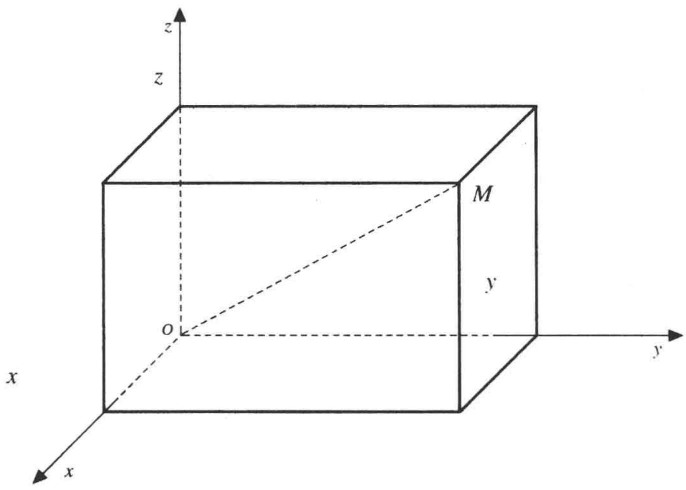


图 1.9

由此可见，空间点的坐标，就是该点关于坐标原点的向径在坐标轴上的投影，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM},\quad \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OC}$$

所以　　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　且

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$$

从而 $$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$
记为 $$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}。$$

此式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式，其中 x、y、z 为$\overrightarrow{OM}$在三坐标轴上的投影，并称向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$为向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的分向量。

下面讨论向量运算的坐标表示。

设向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以， $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$$
同理得： $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$$

例 1.2 如图 1.10 所示，设两定点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标 。

解 由向量减法知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})-(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\end{aligned}$$

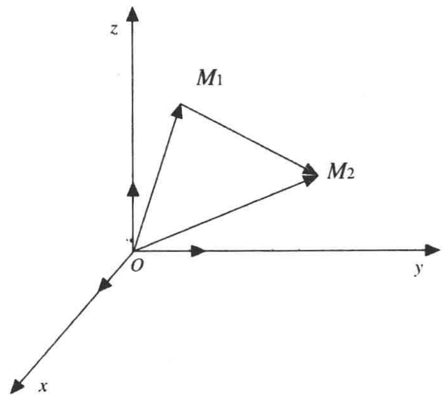


图 1.10

例 1.3 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{0,3,-1\}$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$。

解 因为 $3\boldsymbol{a}=\{6,-3,9\}$， $2\boldsymbol{b}=\{0,6,-2\}$

所以 $$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}&=\{6-0,-3-6,9-(-2)\}\\&=\{6,-9,11\}\end{aligned}$$

四、向量的模和方向余弦

1. 向量的模

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是$M_1(x_1,y_1,z_1)$终点是$M_2(x_2,y_2,z_2)$，那么向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的模就是 M_1 和 M_2 两点间的距离。即：

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2. 方向角和方向余弦

设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，将它们始点重合，称两者正向之间的夹角为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，并且$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\in[0,\pi]$。

任意给定向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向间的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角。

方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦。

向量的方向角是唯一的，它完全确定了向量的方向，由图 1.11 所示可知：

$$\cos\alpha = \frac{x}{|a|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|a|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|a|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

容易验证 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$。

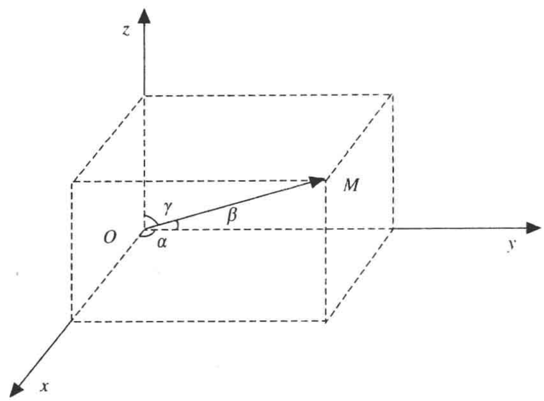


图 1.11

例 1.4 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角、方向余弦及单位向量。

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2} = 2$$

所以 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$， $\cos\beta = \frac{1}{2}$， $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$， $\beta = \frac{1}{3}\pi$， $\gamma = \frac{3}{4}\pi$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的单位向量 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$。

练习题 1.2

1. 填空：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=($ $)$ $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=($ $)$
2. 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$，求向量 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 的坐标。
3. 已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(2,-2,5)$，终点为 $P_2(-1,4,7)$，试求：

 (1) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示；

 (2) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

 (3) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；

 (4) 与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向一致的单位向量。

第三节　向量的数量积和向量积

一、两向量的数量积

1. 数量积的定义

两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模与它们夹角余弦的乘积，叫做两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称**内积**或**点积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$（其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角）。

我们把 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影。记作 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$（其中 φ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角），同样 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$。

点积在物理上可以表示功，若物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下作直线运动，其位移向量为 $\boldsymbol{s}$，则其功 W 为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\varphi=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$。

2. 数量积的性质

由数量积的定义有：

（1）　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$

（2）　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

（3）非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦可以表示为 $\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

3. 数量积的运算规律

（1）交换律　　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

（2）分配律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

（3）结合律　　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　　（λ 为实数）

利用数量积的运算规律及数量积的性质，可以推得数量积的坐标表达式

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，　$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+\\
&\quad a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+\\
&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\
&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z。
\end{aligned}
$$

所以，两向量的数量积等于对应坐标乘积之和。

由向量的数量积的坐标计算公式便得：若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则有

（1）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$，

（2）$\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$　　（φ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角）。

例 1.5 $\boldsymbol{a}=\{1,1,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,0,1\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,1,3\}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$；

(2) 与 $\boldsymbol{c}$ 同向的单位向量；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ。

解 (1) 因为 $\boldsymbol{a}=\{1,1,0\}$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\{0,-1,-1\}$所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=1\times0+1\times(-1)+0\times(-1)=-1$$

(2) 因为 $$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14},$$

所以，与 $\boldsymbol{c}$ 同向的单位向量

$$\boldsymbol{c}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{c}=\left\{\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

(3) 因为 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

所以 $$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

从而 $$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

例 1.6 求与 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=28$ 的向量 $\boldsymbol{b}$。

解 由于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以可设

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda,-2\lambda,3\lambda\},$$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=28$，得

$$\{1,-2,3\}\cdot\{\lambda,-2\lambda,3\lambda\}=28,$$

即 $\lambda+4\lambda+9\lambda=28$，所以 $\lambda=2$，从而

$$\boldsymbol{b}=\{2,-4,6\}。$$

二、向量的向量积

1. 向量积的定义

两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**向量积**（也称**外积、叉积**）是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。它的模和方向满足：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 分别垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则（如图 1.12）。

由图 1.9 所示及定义知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模的几何上恰为以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向垂直于这个平行四边形所在平面。

叉积在物理上可以表示力矩、磁力等。当单位电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动时，它所受的磁力为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，其大小为 $|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\varphi$，方向由右手螺旋法则确定。

2. 向量积的性质及运算规律

由向量积的定义可以得到：

(1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

(3) 与数乘结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

(4) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(5) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(6) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},$
$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$
$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$ 。

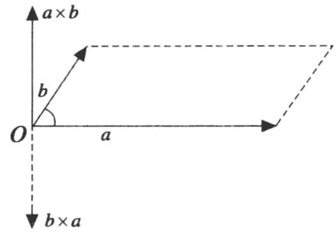


图 1.12

3. 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}。\end{aligned}$$

即为向量积的坐标表示式.为了便于记忆，上式也可以三阶行列式来表示：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由向量积的坐标表示式得

$$a_yb_z-a_zb_y=0,\ a_zb_x-a_xb_z=0,\ a_xb_y-a_yb_x=0,$$

从而有
$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

当 b_x,b_y,b_z 至少有一个为 0 时，如

$$\frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{4}=\frac{a_z}{3}\quad 与\quad \frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{0}=\frac{a_z}{5},$$

应分别理解为
$$\begin{cases}a_x=0\\ \dfrac{a_y}{4}=\dfrac{a_z}{3}\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}a_x=0\\ a_y=0\end{cases}。$$