5

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

5

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 5/费定晖，周学圣编演. —4 版. —济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5896-5

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120111 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 5

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536)2116806

开本：787 mm × 1092mm 1/16
印张：17
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5896-5
定价：22.00 元

第四版前言

本书自1979年出版发行以来,历经30多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析"不可替代"之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书4462题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,"只看不练假把式",数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录 MULU

第六章　多元函数微分学

§1. 函数的极限. 连续性

1° **函数的极限**　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$，其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离，则有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° **连续性**　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 在所给区域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 在此区域内是连续的.

3° **一致连续性**　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于区域 G 中的任何点 P',P''，只要

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便成立不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在区域 G 内是一致连续的.

有界闭区域内的连续函数在此区域内是一致连续的.

确定并画出下列函数的存在域：

【3136】　$u=x+\sqrt{y}$.

解　存在域为半平面，$y\geqslant 0$，如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内.

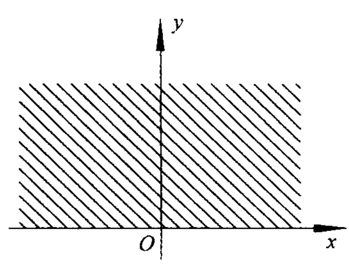

图 6.1

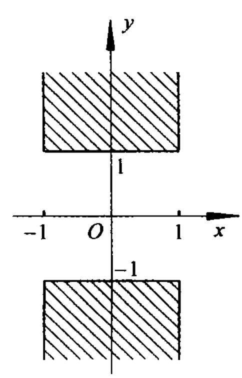

图 6.2

【3137】　$u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解　存在域为满足不等式 $|x|\leqslant 1$，$|y|\geqslant 1$ 的点集，如图6.2阴影部分所示，包括边界(粗实线)在内.

【3138】　$u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解　存在域为圆 $x^2+y^2\leqslant 1$，如图 6.3 阴影部分所示，包括圆周在内.

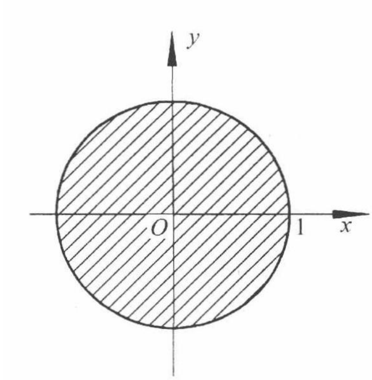

图 6.3

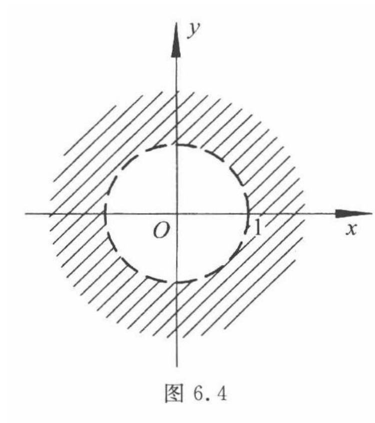

图 6.4

【3139】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解　存在域为满足不等式 $x^2+y^2>1$ 的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图 6.4 所示，不包括圆周(虚线)在内.

【3140】 $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解　存在域为满足不等式 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的点集，如图 6.5 所示的环，包括边界在内.

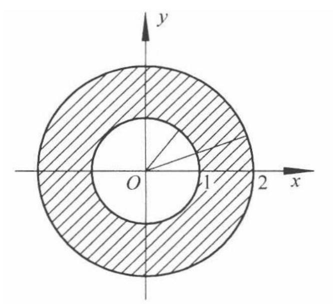

图 6.5

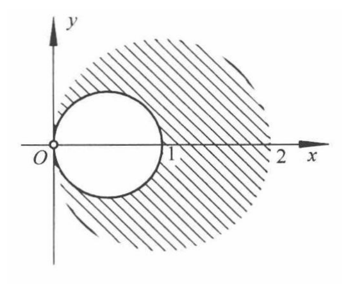

图 6.6

【3141】 $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解　存在域为满足不等式 $x\leqslant x^2+y^2<2x$ 的点集. 由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图 6.6 阴影部分所示，不包括大圆圆周在内，但包括小圆圆周.

【3142】 $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解　存在域为满足不等式 $-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$ 的点集，如图 6.7 阴影部分所示，包括边界在内.

【3143】 $u=\ln(-x-y)$.

解　存在域为半平面 $x+y<0$，如图 6.8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内.

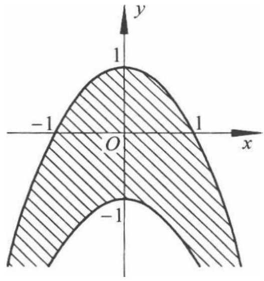

图 6.7

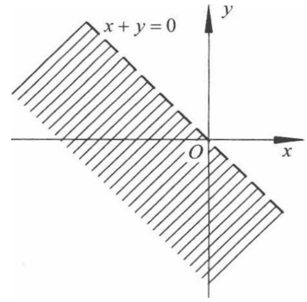

图 6.8

【3144】 $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1 \quad \text{或} \quad |y|\leqslant|x| \quad (x\neq 0)$$

的点集,这是一对对顶的直角,如图 6.9 阴影部分所示,不包括原点在内.

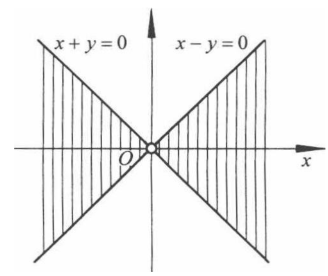

图 6.9

【3145】 $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$$

的点集,由 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$ 得 $|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq -y)$,即$x^2\leqslant x^2+2xy+y^2$ 或 $y(y+2x)\geqslant 0$,也即

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y\leqslant 0, \\ y\leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x,y 不能同时为零,这是由直线:$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角,如图 6.10 阴影部分所示,包括边界在内,但不包括公共顶点 $O(0,0)$在内.

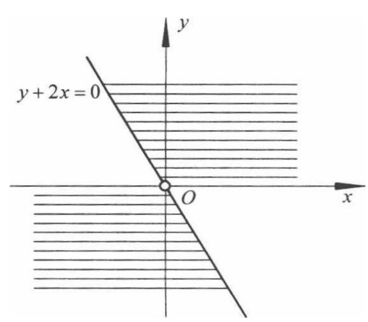

图 6.10

【3146】 $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \quad \text{及} \quad |1-y|\leqslant 1 \quad (y\neq 0)$$

的点集,即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

这是由抛物线:$y^2=x$,$y^2=-x$和直线 $y=2$ 所围成的的曲边三角形,如图 6.11 阴影部分所示,不包括原点在内.

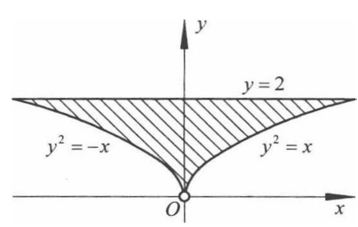

图 6.11

【3147】 $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0 \quad \text{或} \quad 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$$

$(k=0,1,2,\cdots)$的点集,如图 6.12 所示的同心环族.

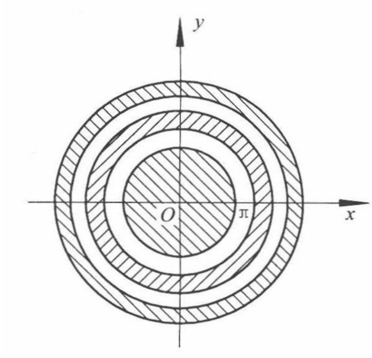

图 6.12

【3148】 $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域为满足不等式 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$ 或 $x^2+y^2-z^2\geqslant 0$ (x,y 不同时为零)的点集,这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面,如图 6.13 阴影部分所示,包括边界在内,但要除去圆锥的顶点.

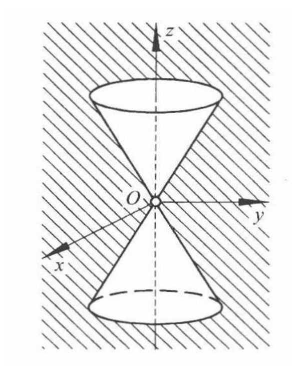

图 6.13

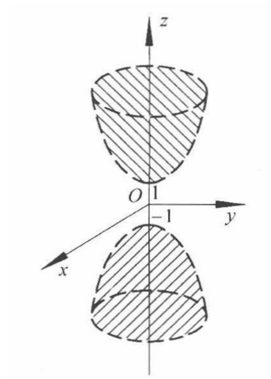

图 6.14

【3149】 $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式 $xyz>0$ 的点集,即

$x>0$, $y>0$, $z>0$; 或 $x>0$, $y<0$, $z<0$;

$x<0$, $y<0$, $z>0$; 或 $x<0$, $y>0$, $z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体,但不包括坐标面,由于图形为读者所熟知,故省略.以下有类似情况,不再说明.

【3150】 $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式 $-x^2-y^2+z^2>1$ 的点集.这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部,如图 6.14 阴影部分所示,不包括界面在内.

作出下列函数的等值线:

【3151】 $z=x+y$.

解 等值线为平行直线族 $x+y=k$,其中 k 为一切实数,如图 6.15 所示.

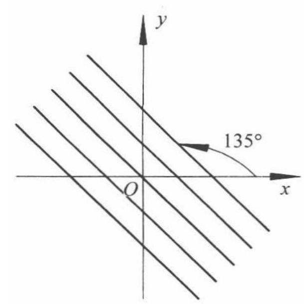

图 6.15

【3152】 $z=x^2+y^2$.

解 等值线为曲线族 $$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$
当 $a=0$ 时为原点；当 $a>0$ 时，等值线为以原点为圆心的同心圆族.

【3153】 $z=x^2-y^2$.

解 等值线为曲线族 $$x^2-y^2=k.$$
当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x$，$y=-x$. 当 $k\neq 0$ 时为以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k>0$ 时顶点为$(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当$k<0$时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

【3154】 $z=(x+y)^2$.

解 等值线为曲线族 $$(x+y)^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$
当 $a=0$ 时为直线 $x+y=0$. 当 $a\neq 0$ 时为与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

【3155】 $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等值线为以坐标原点为束心的直线束 $y=kx \quad (x\neq 0)$，
不包括 Oy 轴在内.

【3156】 $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等值线为椭圆族 $$x^2+2y^2=a^2 \quad (a>0).$$
长半轴为 a，短半轴为$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

【3157】 $z=\sqrt{xy}$.

解 等值线为曲线族 $$xy=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$
当 $a=0$ 时为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$. 当 $a>0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为$(-a,-a)$及(a,a).

【3158】 $z=|x|+y$.

解 等值线为曲线族 $|x|+y=k$，
其中 k 为一切实数. 当 $x\geqslant 0$ 时为 $x+y=k$；当 $x<0$ 时为 $-x+y=k$. 这是顶点在轴 Oy 上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图 6.16 所示.

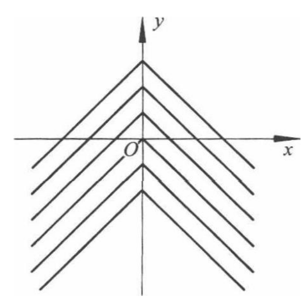

图 6.16

【3159】 $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等值线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$.
因为恒有$|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant 0$. 当 $a=0$ 时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得 $$xy\geqslant 0,$$
即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时，$xy<0$ 分下面四组求解：

(1) $x>0$，$y<0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\dfrac{a}{2}$；

(2) $x>0$，$y<0$，$x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\dfrac{a}{2}$；

(3) $x<0$，$y>0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\dfrac{a}{2}$；

(4) $x<0$，$y>0$，$x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6.17 所示.

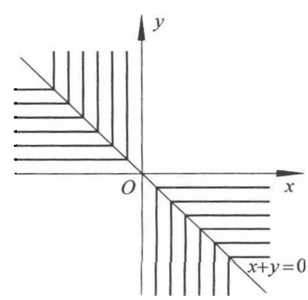

图 6.17

【3160】 $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等值线为曲线族 $\dfrac{2x}{x^2+y^2}=k$ （x,y 不同时为零），

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 (k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，从而等值线为 $x=0$ 即 Oy 轴，但不包括原点.

当 $k\neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点(但不包括原点在内)的圆束，圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$ 半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$，如图 6.18 所示.

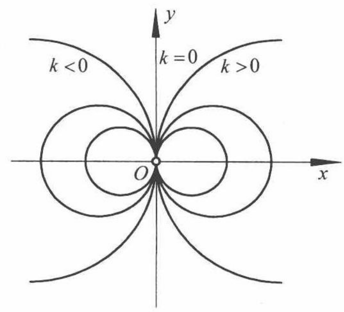

图 6.18

【3161】 $z=x^y \quad (x>0)$.

解 等值线为曲线族 $x^y=a \quad (a>0)$.

当 $a=1$ 时为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线，但不包括原点在内.

当 $0<a<1$ 与 $a>1$ 时的图像如图 6.19 所示.

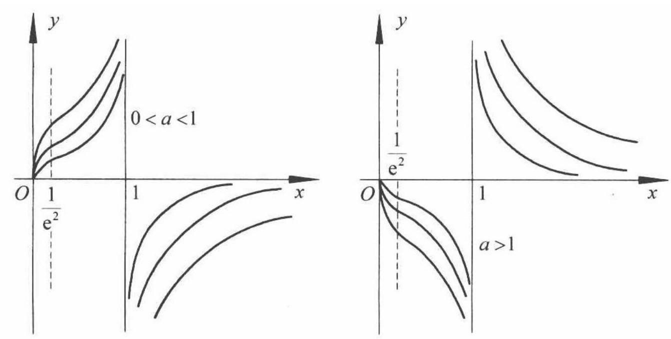

图 6.19

【3162】 $z=x^y e^{-x} (x>0)$.

解 等值线为曲线族 $x^y e^{-x}=a \ (a>0)$，即 $y\ln x - x=\ln a$.

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线 $y=\frac{x-1}{\ln x}$；当 $0<a<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<a<1$ 或 $a\geqslant 1$ 时图像布满整个右半平面，如图 6.20 所示，不包括 Oy 轴.

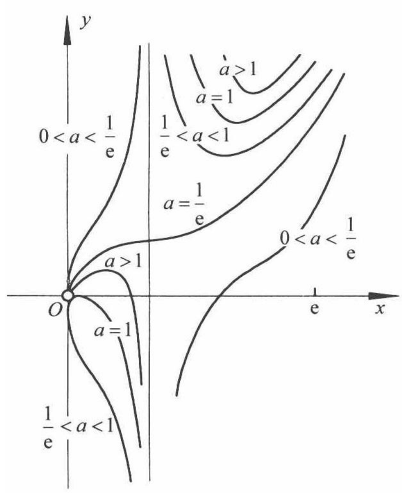

图 6.20

【3163】 $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

解 等值线为曲线族 $$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$

整理得 $$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0.$$

当 $k=1$ 时得 $x=0$,即 Oy 轴.当 $k\neq 1$ 时,上述方程可变形为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

这是以点$\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},0\right)$为圆心,半径为$\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$的圆族.当 $0<k<1$ 时,圆分布在右半平面;当 $k>1$ 时,圆分布在左半平面.

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

即等值线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直(或圆心距与两圆的半径构成直角三角形),便知等值线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交.如图 6.21 所示.

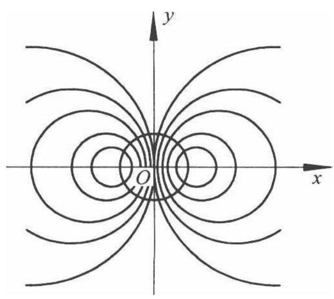

图 6.21

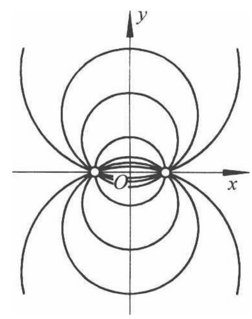

图 6.22

【3164】 $z=\arctan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a>0)$.

解 等值线为曲线族 $$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$

其中 k 为一切实数,但要除去点$(-a,0)$及$(a,0)$.当 $k=0$ 时,$y=0$,即为 Ox 轴,但不包括上述两点;当 $k\neq 0$ 时,方程可变形为 $$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在 Oy 轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$但不包括这两点在内的圆族,如图 6.22 所示.

【3165】 $z=\text{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若 $z=0$,则 $\sin x\sin y=0$,此即直线族

$$x=m\pi \quad 和 \quad y=n\pi \quad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

若 $z=-1$ 或 $z=1$,则 $\sin x\sin y<0$ 或 $\sin x\sin y>0$,此即正方形系

$$m\pi<x<(m+1)\pi,\ n\pi<y<(n+1)\pi,$$

其中 $z=(-1)^{m+n}$.如图 6.23 所示,$z=0$ 时为图中网格直线;$z=1$ 为图中带斜线的正方形;$z=-1$ 为图中空白正方形,但后两者都不包括边界.

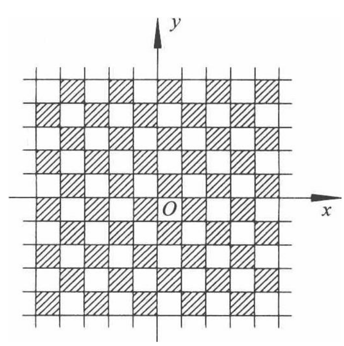

图 6.23

求下列函数的等值面:

【3166】 $u=x+y+z$.

解 等值面为平行平面族 $x+y+z=k$,其中 k 为一切实数.

【3167】 $u=x^2+y^2+z^2$.

解　等值面为中心在原点的同心球族 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a\geqslant 0)$，其中当 $a=0$ 时即为原点.

【3168】　$u=x^2+y^2-z^2$.

解　当 $u=0$ 时等值面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等值面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2$ $(a>0)$；当 $u<0$ 时等值面为双叶双曲面族 $-x^2-y^2+z^2=a^2\ (a>0)$.

【3169】　$u=(x+y)^2+z^2$.

解　等值面为曲面族　$(x+y)^2+z^2=a^2\ (a\geqslant 0)$.

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$. 当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\dfrac{\pi}{4}+y\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\dfrac{\pi}{4}+y\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z. \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等值面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,\quad 即\quad \frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a(z' 轴方向)，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$(x' 轴方向).

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x'=0, \\ z'=0, \end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

【3170】　$u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解　当 $u=0$ 时等值面为球心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等值面为球层族

$$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $u=(-1)^n$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

【3171】　$z=f(y-ax)$.

解　引入参数 t, s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 $1, a, 0$. 因此，曲面为以 $1, a, 0$ 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面 $z=f(y-ax)$ 的一条准线.

【3172】 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$，得曲线

$$\begin{cases} y=0, \\ z=f(x) \quad (x\geqslant 0), \end{cases}$$

它是旋转曲线的一条母线.

【3173】 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s，将曲面方程 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=tf(s) \end{cases} \quad (t\neq 0).$$

今固定 s，这是以 t 为参数的一条过原点的直线. 因此，所给曲面方程为顶点在原点的一锥面，但不包括原点在内. 令 $t=1$，得曲线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=s, \\ z=f(s). \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线，也是锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线.

【3174】$^{+}$ * $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s，将曲面方程 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，这是一条过点 $(0,0,f(s))$ 的直线，方向数为 $1, s, 0$. 因此，它与 Oz 轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关. 从而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来，它既不是柱面，也不是锥面. 令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直相交的直线. 这样的直线的全体，便构成由 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直

---

* 题号右上角"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

【3175】 作出函数 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$ 的图像，式中

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y\geqslant x,\\ 0, & y<x.\end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t\geqslant\cos t$，即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当 $\sin t<\cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，$F(t)=0$. 如图 6.24 所示.

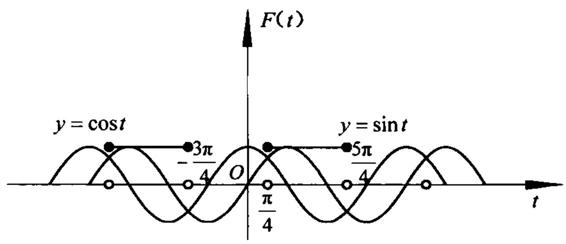

图 6.24

【3176】 若 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

解 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

【3177】 若 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

【3178】 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$. 若当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f 和 z.

提示 易知 $f(t)=t^2+2t$，且 $z=\sqrt{y}+x-1$ $(x>0)$.

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以，

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2],$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1\quad(x>0).$$

【3179】 设 $z=x+y+f(x-y)$. 若当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求函数 f 及 z.

提示 易知 $f(x)=x^2-x$，且 $z=(x-y)^2+2y$.

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以，

$$x^2=x+f(x),\quad 即\quad f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

【3180】 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

提示 易得

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=(x+y)^2\,\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

解 因为 $\quad f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(x+y)^2\,\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\,\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$