

# 大学 数学

上册

主编 李应李松林

# 大学数学

Daxue Shuxue

(上册)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 主 编 | 李 应 | 李松林 |     |
| 副主编 | 兰华龙 | 阮杰昌 | 邵文凯 |
| 参 编 | 张德刚 | 王晓平 | 李 琰 |
|     | 蒋鹏忠 | 任建英 | 李 旭 |



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS • BEIJING

## 内容简介

本书是在多年教学经验的基础上,根据普通高等学校相关专业人才培养方案,结合当前大学生的特点编写而成的。

全书分为上、下两册,本书是上册,主要包括:极限与连续、一元函数的导数及微分、一元函数导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、数学实验等;附录有数学建模简介、常用初等数学公式、常用积分表等。

本书编排结构合理,内容体系与时俱进,淡化数学理论,强化数学概念的直观性,渗透数学建模思想,难点处理独具匠心,习题选取灵活多变,通篇文字叙述清晰,重视知识与能力训练的统一,培养学生运用数学的意识。

## 图书在版编目(CIP)数据

大学数学.上册/李应,李松林主编. —北京:高等教育出版社,2012.8

ISBN 978 - 7 - 04 - 035007 - 4

I. ①大… II. ①李…②李… III. ①高等数学 - 高等职业教育 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 162320 号

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 策划编辑 崔梅萍 | 责任编辑 崔梅萍 | 封面设计 李卫青 | 版式设计 马敬茹 |
| 插图绘制 宗小梅 | 责任校对 陈旭颖 | 责任印制 张福涛 |          |

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京市白帆印务有限公司  
开 本 787mm × 1092mm 1/16  
印 张 20.5  
字 数 500 千字  
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2012 年 8 月第 1 版  
印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷  
定 价 34.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 35007 - 00

# 前 言

大学数学是普通高等学校相关专业的一门重要基础课程,教学内容多,进度快,与专业知识结合紧密,在教学时不仅要引导学生学好基本知识、基本方法,而且要培养学生数学思维方式,提高学生数学素养。本教材依照教育部最新制定的高等数学课程的教学基本要求,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,结合编者多年教学实践编写,具有以下特点:

1. 编排结构科学合理,体现以学生为主体。每一节列出学习目标,利于学生自学;以实际背景引入数学概念,利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际;例题、习题的选择灵活多变,层次分明,利于满足不同专业不同层次的需要;分章提炼知识小结、应用与提高,利于学生拓宽解题思路、拓展学习内容。

2. 重视知识的传授,更注重能力的培养,使学生在系统获得知识的同时,也能比较系统地提高能力,体现知识教学与能力训练的统一;重视培养学生运用数学的意识,通过典型例题,将多种计算方法列出,择优而取,既能牢固掌握知识,又能学到探求知识的思想方法和手段。

3. 适度淡化数学理论,强化数学概念的直观性,一些定理的证明以几何解释或用经济现象说明为主,给学生直观的理解;新增数学实验与数学软件,使学生能利用现代技术解决大学数学的计算、应用问题,拓宽知识面,提高解决问题的能力。

本教材上册共九章,主要内容包括:极限与连续、一元函数的导数及微分、一元函数导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、数学实验等。各专业可根据专业培养目标和要求,选学相应的教学内容。本教材上册由李应、李松林任主编,兰华龙、阮杰昌、邵文凯任副主编,张德刚、王晓平、李琰、蒋鹏忠、任建英、李旭参加编写。上册由李应、李松林统稿完成。

在本书的编辑出版过程中,高等教育出版社给予了大力帮助与支持,另外,张毅教授和雷开彬教授都审阅了本教材上册的全书稿,他们对全书的章节安排、框架设计和内容组织,提出了许多宝贵的意见和建议,在此一并致谢。

鉴于编者水平有限,书中难免出现一些缺点和错误,敬请读者与同行批评指正。

编 者

2012年6月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

|                           |         |
|---------------------------|---------|
| <b>第 1 章 极限与连续</b>        | ( 1 )   |
| 1.1 函数                    | ( 1 )   |
| 1.2 初等函数                  | ( 7 )   |
| 1.3 函数的极限                 | ( 14 )  |
| 1.4 函数极限的运算               | ( 20 )  |
| 1.5 函数极限问题的进一步讨论          | ( 24 )  |
| 1.6 函数的连续与间断              | ( 30 )  |
| 本章知识小结                    | ( 35 )  |
| 复习题一                      | ( 40 )  |
| <b>第 2 章 一元函数的导数及微分</b>   | ( 44 )  |
| 2.1 导数的概念                 | ( 44 )  |
| 2.2 导数的四则运算法则 高阶导数        | ( 52 )  |
| 2.3 复合函数的导数 反函数的导数        | ( 56 )  |
| 2.4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 | ( 60 )  |
| 2.5 微分及其在近似计算中的应用         | ( 63 )  |
| 本章知识小结                    | ( 67 )  |
| 复习题二                      | ( 71 )  |
| <b>第 3 章 一元函数导数的应用</b>    | ( 74 )  |
| 3.1 微分中值定理                | ( 74 )  |
| 3.2 洛必达法则                 | ( 78 )  |
| 3.3 函数的单调区间与极值            | ( 82 )  |
| 3.4 函数的最值                 | ( 87 )  |
| 3.5 导数在实际中的应用             | ( 91 )  |
| 3.6 曲线的凹凸性与拐点             | ( 98 )  |
| 本章知识小结                    | ( 101 ) |
| 复习题三                      | ( 104 ) |
| <b>第 4 章 不定积分</b>         | ( 107 ) |
| 4.1 原函数与不定积分              | ( 107 ) |
| 4.2 不定积分的换元积分法            | ( 113 ) |
| 4.3 不定积分的分部积分法            | ( 118 ) |
| 本章知识小结                    | ( 123 ) |
| 复习题四                      | ( 126 ) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| <b>第 5 章 定积分及其应用</b>     | (130) |
| 5.1 定积分的概念               | (130) |
| 5.2 微积分学基本定理             | (138) |
| 5.3 定积分的换元积分法和分部积分法      | (142) |
| 5.4 广义积分                 | (147) |
| 5.5 定积分的应用               | (150) |
| 本章知识小结                   | (157) |
| 复习题五                     | (160) |
| <b>第 6 章 微分方程及其应用</b>    | (164) |
| 6.1 微分方程的基本概念            | (164) |
| 6.2 一阶线性微分方程             | (167) |
| 6.3 几种可降阶的二阶微分方程         | (175) |
| 6.4 二阶常系数线性微分方程          | (179) |
| 6.5 微分方程的应用              | (182) |
| 本章知识小结                   | (186) |
| 复习题六                     | (188) |
| <b>第 7 章 多元函数微积分及其应用</b> | (192) |
| 7.1 多元函数的基本概念            | (192) |
| 7.2 偏导数和全微分              | (195) |
| 7.3 多元复合函数的求导法则          | (199) |
| 7.4 多元函数的极值与最值           | (203) |
| 7.5 二重积分的概念和性质           | (207) |
| 7.6 二重积分的计算方法            | (210) |
| 7.7 二重积分的应用              | (215) |
| 本章知识小结                   | (218) |
| 复习题七                     | (220) |
| <b>第 8 章 无穷级数</b>        | (223) |
| 8.1 无穷级数的概念及性质           | (223) |
| 8.2 常数项级数的审敛法            | (227) |
| 8.3 幂级数                  | (232) |
| 8.4 函数的幂级数展开式            | (236) |
| 8.5 傅里叶级数                | (241) |
| 本章知识小结                   | (247) |
| 复习题八                     | (249) |
| <b>第 9 章 数学实验</b>        | (252) |
| 9.1 图识函数极限               | (252) |
| 9.2 导数及偏导数计算             | (260) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 9.3 自定义函数与导数应用 ..... | (265) |
| 9.4 积分计算 .....       | (269) |
| 9.5 常微分方程与级数 .....   | (273) |
| 附录1 数学建模简介 .....     | (278) |
| 附录2 常用初等数学公式 .....   | (283) |
| 附录3 常用积分表 .....      | (286) |
| 习题参考答案 .....         | (291) |
| 参考文献 .....           | (318) |



# 第1章

## 极限与连续

大学数学主要研究变量及其相互之间的关系,函数是现代数学的基本概念之一,极限是大学数学中研究问题的基本方法,掌握、运用好极限方法是学好大学数学的关键,本章将在巩固函数概念与性质的基础上,进一步介绍函数的极限与连续性.

### 1.1 函 数

#### 学习目标:

1. 熟悉函数的基本概念和基本性质;
2. 理解复合函数的概念,熟练掌握复合函数的结构及分解;
3. 能够建立一些简单实际问题的数学模型.

#### 一、实数与区间

人类最先认识的数是自然数,随着社会的发展,数的范围不断扩展,从自然数扩展到整数;引出分数概念后,又从整数扩展到有理数;引出无理数概念后,又从有理数扩展到实数.

由于任给一个实数,在数轴上就有唯一的点与它对应;反之,数轴上任意的一个点也对应着唯一的一个实数.即实数与数轴上的点具有一一对应关系.实数充满数轴而且没有空隙,这就是实数的连续性.

初等数学中已经约定了几个特殊实数集的记号,其中自然数集用  $\mathbf{N}$  表示,整数集用  $\mathbf{Z}$  表示,有理数集用  $\mathbf{Q}$  表示,实数集用  $\mathbf{R}$  表示.它们之间的关系为

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}.$$

区间是高等数学中常用的实数集(数集的一种表示形式),分为有限区间和无限区间.

#### 1. 有限区间

设  $a, b$  是两个实数,且  $a < b$ , 数集  $\{x | a < x < b\}$  称为开区间,记为  $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ . 它是数轴上表示数  $a, b$  两点间所有点的集合.

类似地,有闭区间和半开半闭区间

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

## 2. 无限区间

引入记号  $+\infty$  (读作“正无穷大”)及  $-\infty$  (读作“负无穷大”).

例如  $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$ ,  $(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$ .

特别地,实数集  $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ .

## 二、邻域

**定义 1.1.1** 设  $a$  与  $\delta$  是两个实数,且  $\delta > 0$ , 数集  $\{x | a - \delta < x < a + \delta\}$  称为点  $a$  的邻域. 记为

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\},$$

其中  $a$  叫做该邻域的中心,  $\delta$  叫做该邻域的半径.

若把邻域  $U(a, \delta)$  的中心去掉, 所得到的邻域称为点  $a$  的去心邻域, 记为

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

更一般地, 以点  $a$  为中心的任何开区间均是点  $a$  的邻域.

思考: 直角坐标平面上点  $P(a, b)$  的  $\delta$  邻域该如何定义?

## 三、常量与变量

在自然科学中, 我们会遇到各种不同的量, 在观察这些量时, 常常会发现它们有非常不同的状态, 有的量在过程中不发生变化, 保持一定的数值, 此量称为常量; 有些量有变化, 可取各种不同的数值, 这种量称为变量.

例如, 重复投掷同一个铅球, 铅球的质量、体积为常量, 而投掷距离、上抛角度、用力大小均为变量.

注 (1) 常量与变量是相对而言的, 同一量在不同场合下, 可能是常量, 也可能是变量, 如在一天的或在一年中观察某小孩的身高; 从小范围和大范围而言, 重力加速度可是常量和变量, 然而, 一旦环境确定了, 同一量不能既为常量又为变量, 二者必居其一.

(2) 常量一般用字母  $a, b, c, \dots$  表示, 变量一般用字母  $x, y, u, t, \dots$  等表示, 常量  $a$  为一定值, 在数轴上可用定点表示, 变量  $x$  表示该量可能取的任一值, 在数轴上可用动点表示, 如  $x \in (a, b)$  表示  $x$  可取开区间  $(a, b)$  中的任一个数.

## 四、函数的概念

在对同一自然现象和社会现象的讨论和研究中, 往往会发现有几个因素在变化着, 借助数学进行量化分析, 即是有几个相互依存的变量在同时变化, 而这种依存关系通常遵循一定的规则, 函数就是描述这些变量之间的一种规则.

**引例** 某汽车租赁公司出租某型汽车一天的收费标准为: 基本租金 100 元加每千米收费 3 元. 那么租用一辆该型汽车一天, 行车  $x$  km 时的租车费

$$y = (100 + 3x) \text{ 元}.$$

在上式中,  $x$  的取值范围是数集  $D = \{x | x > 0\}$ , 对于  $D$  中的每一个  $x$ , 按所示规则都有唯一确定的  $y$  与之对应, 其中  $y$  与  $x$  的对应是通过以下规则确定的

$$y(\square) = (100 + 3\square).$$

**定义 1.1.2** 设  $x, y$  是两个变量,  $D$  是一个非空集合, 若当变量  $x$  在集合  $D$  内任意取定一个数值时, 变量  $y$  按某一对应法则  $f$ , 都有唯一确定的值与之对应, 则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数. 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

上式中  $x$  称为自变量,  $x$  的取值范围  $D$  称为函数的定义域, 变量  $y$  称为因变量,  $y$  的取值范围称为函数  $y=f(x)$  的值域.

说明 (1) 函数通常还可用  $y=g(x)$ ,  $y=F(x)$ ,  $s=u(t)$  等表示;

(2) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素. 函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值的全体;

(3) 函数是反映变量之间相互依存的一种数学模型.

例 1 判断题.

(1) 函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  与  $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$  为同一函数.

(2) 函数  $f(x) = x$  与  $g(x) = \sqrt{x^2}$  为同一函数.

解 (1) 正确. 由于  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域都是  $(-1, 1)$ , 对应法则也相同, 所以它们是同一函数.

(2) 错误. 虽然  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ , 但其值域不相同, 且它们的对应法则也不一样, 所以它们不是同一函数.

例 2 设  $f(x+1) = x^2 + 1$ , 求  $f(x)$ .

解 令  $x+1=t$ , 则  $x=t-1$ , 所以

$$f(t) = (t-1)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2,$$

即

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

例 3 求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 + x}; \quad (2) f(x) = \frac{1}{\ln(1-2x)}.$$

解 (1) 在分式  $\frac{1}{x^2+x}$  中, 分母不能为零, 所以  $x^2+x \neq 0$ , 解得  $x \neq 0$  且  $x \neq -1$ , 故函数的定义域为  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

(2) 要使函数  $y = \frac{1}{\ln(1-2x)}$  有意义, 必须满足

$$\ln(1-2x) \neq 0 \text{ 且 } 1-2x > 0,$$

即

$$x \neq 0 \text{ 且 } x < \frac{1}{2}.$$

故函数  $y = \frac{1}{\ln(1-2x)}$  的定义域为  $D = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$ .

## 五、函数的表示

常用的表示函数的方法有列表法、图像法和解析法三种.

例 4 某商店一年里各月面粉的零售量(单位:  $10^2$  kg)如下表

| 月份 $t$  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  |
|---------|----|----|----|----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|
| 零售量 $s$ | 81 | 84 | 45 | 45 | 9 | 5 | 6 | 15 | 94 | 161 | 144 | 123 |

此表表示了某商店面粉的零售量  $s$  随月份  $t$  而变化的函数关系. 这个函数关系就是用表格表示的, 它的定义域为

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法. 大学数学中讨论的函数, 大多由解析法表示.

**例 5 (图像法)** 某气象站用自动温度记录仪记录一昼夜气温变化 (图 1-1), 由此图可知对于一昼夜内每一时刻  $t$ , 都有唯一确定的温度  $T$  与之对应.

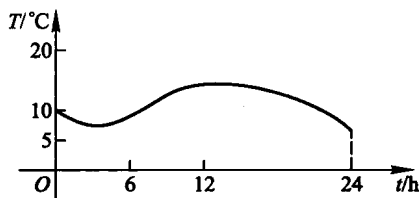


图 1-1

下面介绍几种常用的函数.

### 1. 隐函数

在方程  $F(x, y) = 0$  中, 当  $x$  在某集合  $D$  内任意取定一个值时, 相应地总有满足该方程  $F(x, y) = 0$  的唯一的  $y$  值存在, 则方程  $F(x, y) = 0$  在区间  $D$  内确定了一个函数, 这个函数称为隐函数. 例如方程  $e^x + xy - 1 = 0$  就确定了变量  $y$  与变量  $x$  之间的函数关系, 它是一个隐函数.

**注** 通常把形如  $y = f(x)$  的函数, 称为显函数. 有些隐函数可以通过一定的运算, 把它转化为显函数, 例如  $e^x + xy - 1 = 0$  在  $x \neq 0$  时可以化成显函数  $y = \frac{1 - e^x}{x}$ . 但隐函数  $x^2 - xy + e^y = 1$  却不可能化成显函数.

### 2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数, 分段函数是大学数学中常见的一类函数, 它是用几个关系式表示一个函数, 而不是表示几个函数. 对于定义域内的任意  $x$ , 分段函数  $y$  只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段关系式自变量取值集合的并集.

**例 6** 绝对值函数  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

这个函数的定义域为  $D = (-\infty, +\infty)$ .

**例 7** 单位阶跃函数是电学中一个常用函数.

它的表达式为  $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$  其图像如图 1-2 所示.

这个函数的定义域为  $D = (-\infty, +\infty)$ .

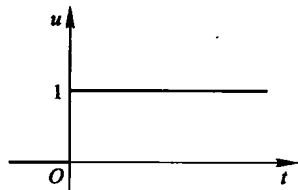


图 1-2

例8 取整函数  $y = [x]$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

例如  $[3.1] = 3, [-1.5] = -2, [e] = 2$ .

显然取整函数的定义域为  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域为  $Z$ .

### 3. 参数方程确定的函数

由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in D)$  来表示变量  $y$  与  $x$  之间的依赖关系的函数, 称为由参数方程确定的函数.

例如, 由参数方程  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$  可以确定函数  $y = \sqrt{1-x^2} (x \in [-1, 1])$ .

## 六、反函数

设  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $W$ , 因此, 对  $\forall y \in W$ , 必  $\exists x \in D$ , 使得  $f(x) = y$ , 这样的  $x$  可能不止一个, 若将  $y$  当做自变量,  $x$  当做因变量, 按函数的概念, 就得到一新函数  $x = \varphi(y)$ , 称之为函数  $y = f(x)$  的反函数, 而  $f(x)$  叫做直接函数.

注 (1) 反函数  $x = \varphi(y)$  的定义域为  $W$ , 值域为  $D$ ;

(2) 由以上讨论知, 即使  $y = f(x)$  为单值函数, 其反函数却未必是单值函数, 此问题以后还会继续讨论;

(3) 在习惯上往往用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 因此将  $x = \varphi(y)$  中的  $x$  与  $y$  对换一下,  $y = f(x)$  的反函数就变成  $y = \varphi(x)$ , 事实上函数  $y = \varphi(x)$  与  $x = \varphi(y)$  是表示同一函数的, 因为表示函数关系的字母“ $\varphi$ ”没变, 仅自变量与因变量的字母变了, 所以说若  $y = f(x)$  的反函数为  $x = \varphi(y)$ , 那么  $y = \varphi(x)$  也是  $y = f(x)$  的反函数, 且后者较常用;

(4) 反函数  $y = \varphi(x)$  的图形与直接函数  $y = f(x)$  的图形关于直线  $y = x$  对称.

## 七、函数的简单几何性质

### 1. 函数的奇偶性

若函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 且对于任意的  $x \in D$  都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数; 若函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 且对于任意的  $x \in D$  都有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数.

例如,  $f(x) = x$  为奇函数,  $f(x) = |x|$  为偶函数.

注 (1) 偶函数的图形是关于  $y$  轴对称的, 奇函数的图形是关于原点对称的;

(2) 若  $f(x)$  是奇函数, 且  $0 \in D$ , 则必有  $f(0) = 0$ ;

(3) 两偶函数的和为偶函数; 两奇函数的和为奇函数; 两偶函数的积为偶函数; 两奇函数的积也为偶函数; 一奇一偶的积为奇函数.

例9 判断函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  的奇偶性.

解 由  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$  得  $-\infty < x < +\infty$ , 所以函数定义域关于原点对称.

又  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数.

## 2. 函数的单调性

若函数  $y=f(x)$  在区间  $D$  内有定义, 对任意  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在区间  $D$  内是单调递增 (或递减) 函数,  $D$  叫做  $f(x)$  的单调递增 (或递减) 区间.

## 3. 函数的周期性

设  $y=f(x)$  为  $D$  上的函数, 若  $\exists T \neq 0$ , 对  $\forall x \in D$ , 有  $x \pm T \in D$ , 且  $f(x+T) = f(x)$  恒成立, 则称此函数为  $D$  上的周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的一个周期. 对于一个周期函数  $f(x)$ , 如果在它的所有的周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小的正数就叫做  $f(x)$  的最小正周期.

例如在  $(-\infty, +\infty)$  上,  $f(x) = \cos x$  是周期函数, 其最小正周期为  $2\pi$ .

## 4. 函数的有界性

设函数  $y=f(x)$  在某区间  $D$  内有定义, 若  $\exists M > 0$ , 对  $\forall x \in D$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D$  内是有界的. 若不存在这样的正数  $M$ , 则称  $f(x)$  在  $D$  内无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数. 直观上看有界函数的图像介于直线  $y = -M$  与  $y = M$  之间.

例如,  $f(x) = \sin x$  在定义域  $D = (-\infty, +\infty)$  内有界.

**例 10** 证明函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**证** 因为对于任意的实数  $x$ , 都有  $(1 - |x|)^2 \geq 0$ , 所以  $1 + x^2 \geq 2|x|$ , 故对  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| = \frac{2|x|}{2|1+x^2|} \leq \frac{1}{2},$$

所以  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

## 习题 1.1

### A 组

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = \arcsin x; \quad (3) y = \sqrt{1-\ln x}.$$

2. 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $(0, 2)$ , 求  $f(x-2)$  的定义域.

3. 设函数  $f(x) = 2x+1$ , 求  $f(x+1)$ ,  $f[f(1)]$ .

4. 判断下列函数在指定区间内的单调性.

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1); \quad (2) y = 2x + \ln x, x \in (0, +\infty).$$

### B 组

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}; \quad (2) y = \frac{1}{x^2 - x - 2};$$

$$(3) y = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-1};$$

$$(4) y = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ x^2 - 1, & x < 1. \end{cases}$$

2. 已知函数  $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$ , 试证:  $f(-x) = -f(x)$ .

3. 试判断函数  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  在  $(-\infty, 1)$  上的单调性.

4. 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x \sin x;$$

$$(2) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(3) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$(4) f(x) = 1 + 2 \tan x.$$

5. 指出下列各函数中哪些是周期函数, 对于周期函数, 则指出其周期.

$$(1) f(x) = \sin 2x;$$

$$(2) f(x) = \cos^2 x;$$

$$(3) f(x) = x + \tan x;$$

$$(4) f(x) = x^{\ln 1}.$$

6. 设  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ , 求  $f[f(x)]$ .

## 1.2 初等函数

### 学习目标:

1. 理解复合函数的概念, 熟练掌握复合函数的结构及分解;
2. 能够建立一些简单实际问题的数学模型.

在中学数学中, 我们已经学习过常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数, 此处作简要复习.

### 一、基本初等函数

**定义 1.2.1** 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

#### 1. 常数函数 $y = C$ ( $C$ 为任意实数).

定义域:  $(-\infty, +\infty)$ .

图像: 过点  $(0, C)$  且与  $x$  轴平行或(重合)的直线(如图 1-3).

性质: 有界, 是偶函数, 没有最小正周期的周期函数.

#### 2. 幂函数 $y = x^\mu$ ( $\mu$ 任意实数).

定义域: 随  $\mu$  取值而异.

性质:  $x > 0$  的情形, 当  $\mu > 0$  时,  $y = x^\mu$  是增函数且无界(如图 1-4);

当  $\mu < 0$  时,  $y = x^\mu$  是减函数且无界.

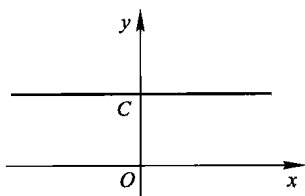


图 1-3

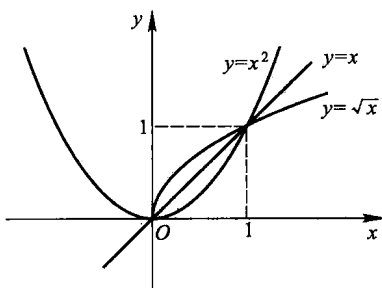


图 1-4

### 3. 指数函数 $y = a^x$ ( $a > 0, a \neq 1$ ).

定义域:  $(-\infty, +\infty)$ .

图像: 过点  $(0, 1)$ , 恒在  $x$  轴的上方 (图 1-5).

性质: 当  $0 < a < 1$  时,  $y = a^x$  是减函数且无界;

当  $a > 1$  时,  $y = a^x$  是增函数且无界.

其中最为常用的以无理数  $e = 2.718\ 281\ 8\cdots$  为底数的指数函数是  $y = e^x$ .

### 4. 对数函数 $y = \log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1$ ).

定义域:  $(0, +\infty)$ .

图像: 过点  $(1, 0)$ , 恒在  $y$  轴的右方 (图 1-6).

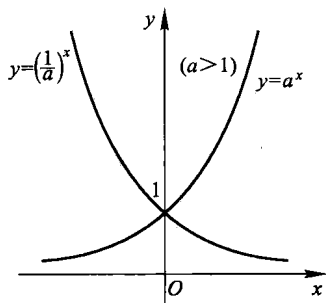


图 1-5

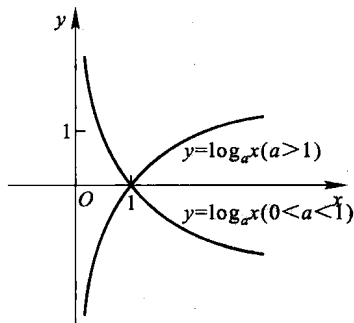


图 1-6

性质: 当  $0 < a < 1$  时,  $y = \log_a x$  单调递减且无界;

当  $a > 1$  时,  $y = \log_a x$  单调递增且无界.

注 指数函数与对数函数互为反函数, 它们的图像关于  $y = x$  对称.

以无理数  $e = 2.718\ 281\ 8\cdots$  为底的对数函数叫做自然对数函数, 记为  $y = \ln x$ .

### 5. 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ .

我们把三角函数定义域、值域和性质列在下表中, 以利大家复习.



| 函数名称 | 函数记号         | 定义域                                                                          | 值域                                  | 周期     | 奇偶性 |
|------|--------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------|-----|
| 正弦   | $y = \sin x$ | $\mathbf{R}$                                                                 | $[-1, 1]$                           | $2\pi$ | 奇   |
| 余弦   | $y = \cos x$ | $\mathbf{R}$                                                                 | $[-1, 1]$                           | $2\pi$ | 偶   |
| 正切   | $y = \tan x$ | $x \in \mathbf{R}, x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z}$ | $\mathbf{R}$                        | $\pi$  | 奇   |
| 余切   | $y = \cot x$ | $\mathbf{R}, x \neq \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$                              | $\mathbf{R}$                        | $\pi$  | 奇   |
| 正割   | $y = \sec x$ | $x \in \mathbf{R}, x \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbf{Z}$ | $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \pm 1$ | $2\pi$ | 偶   |
| 余割   | $y = \csc x$ | $x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$                            | $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \pm 1$ | $2\pi$ | 奇   |

三角函数的图形大家都熟悉了,这里仅给出正弦函数、余弦函数和正切函数的图像见图 1-7~图 1-9.

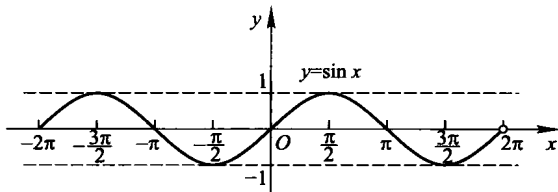


图 1-7

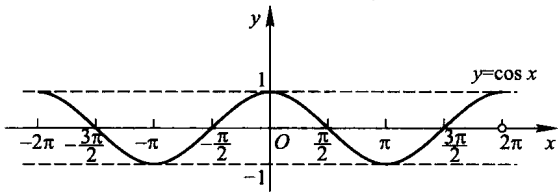


图 1-8

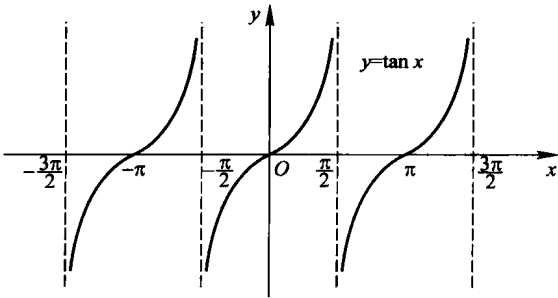


图 1-9