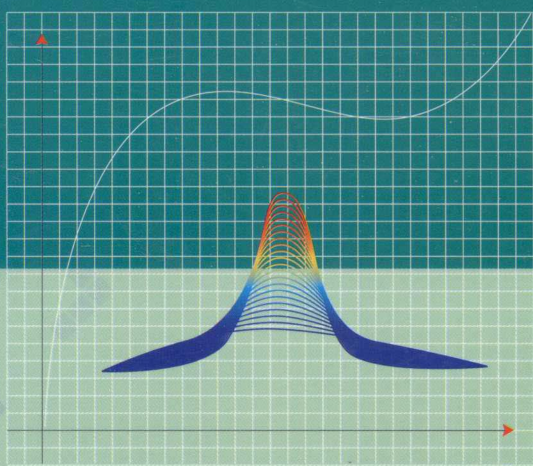
普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学教学丛书

丛书主编　潘庆年　庄容坤

概率论与数理统计

主编　柯忠义　蒋　辉



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

大学数学教学丛书

潘庆年　庄容坤　主编

概率论与数理统计

柯忠义　蒋　辉　主编

张未未　钟甲祥　杨水平　参编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是一本供非数学专业学生使用的概率论与数理统计教材. 全书共10章，内容包括随机事件和概率、离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、统计软件 SPSS 简介. 每一章后面有相当数量的习题，并在书末配有参考答案. 为了使学生对这门课程在现实生产、生活中的应用有一个感性的认识，在每一章的最后都提供了一篇课外拓展阅读，以提高学生的学习兴趣和应用意识.

本书融入了编者多年的教学经验，吸取了国内同类教材的长处，紧扣硕士研究生入学考试大纲，可供高等学校中的工科、农医、经济、管理等专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/柯忠义，蒋辉主编；张未未，钟甲祥，杨水平参编. —北京：科学出版社，2012

（普通高等教育“十二五”规划教材・大学数学教学丛书）

ISBN 978-7-03-034556-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①柯…②蒋…③张…④钟…⑤杨… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 133211 号

责任编辑：姚莉丽 王胡权 房 阳 / 责任校对：刘小梅

责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2012 年 6 月第一次印刷 印张：14 1/4

字数：295 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言 PREFACE

随着经济和社会的快速发展，各行各业或多或少地与数学学科，特别是数学模型发生着联系，“概率论与数理统计”作为一门应用背景很强的学科，近年来越来越受到重视. 但该课程的概念和理论较难理解，再加上各专业对该课程要求的深浅不同，因此教师在教学中较难把握.

针对这些问题，本书编写人员根据多年的教学经验，吸收了多部教材的优点，尝试编写了本书. 在编写过程中进行了几方面的尝试：其一，在保持概念严谨性的同时，尽量做到实际背景的铺垫，注重多样举例和实际应用；其二，在注重基础训练的同时，结合硕士研究生入学考试的要求，增加了一些例题和习题，以满足要求较高的学生的需求；其三，为了增强学生的学习兴趣和应用意识，除了增加一些具有实际背景的例题和习题外，每章还提供了一篇课外拓展阅读.

本书的写作分工如下：第 1～4 章由张未未执笔，第 5、6 章由钟甲祥执笔，第 7、8 章由柯忠义执笔，第 9 章由蒋辉执笔，第 10 章由杨水平执笔，附录由柯忠义完成. 最后，由柯忠义完成统稿工作.

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正，以使本书更加完善.

编　者

2012 年 1 月

目录 CONTENTS

第 3 章 连续型随机变量及其分布

第 4 章 随机变量的数字特征

第 5 章 大数定律和中心极限定理

第 6 章 数理统计的基本概念

第 7 章 参数估计

第 8 章 假 设 检 验

第 9 章 方差分析与回归分析

第 10 章 统计软件 SPSS 简介

CHAPTER 1

第 1 章　随机事件和概率

在自然界、生产实践、科学实验和日常生活中发生的现象，按其结果能否准确预测来划分，可以分为两大类：一类是**必然现象**；另一类是**随机现象**.

在一定条件下必然发生的现象称为必然现象. 例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃必然沸腾；向上抛一石头必然会落下. 所有这些现象的特点就是，在一定条件下必定出现某一结果，并且是可以事先预测的，即在准确地重复某些条件的情况下，它的结果总是可以肯定的.

另一类现象是在一定条件下，可能会出现多种不同的结果，但在观测之前无法预知其确切结果的现象，这一类现象称为随机现象. 例如，抛一枚硬币，最终落在地上是一种必然现象，而落地后正面朝上还是反面朝上却是一种随机现象；某种电器使用寿命的长短是一种随机现象. 这类现象的共同特点是：在相同条件下可重复进行试验，但每次试验不止出现一个结果，即试验结果呈现出不确定性.

事实上，在个别试验中，随机现象的结果虽然呈现出不确定性，但是经多次重复试验，却可发现它仍然呈现出某种规律性，这种规律性称为随机事件的**统计规律性**.

1.1　随机事件

一、随机试验

满足下列三个条件的试验称为**随机试验**：

(1) 试验在相同条件下可重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果发生.

随机试验是一种含义较广的术语，它包括对随机现象进行观察、测量、记录或做科学实验等，以后简称试验，常用字母 $E_1, E_2, \cdots$ 表示.

例 1.1.1　下面的四个实验都是随机试验.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况. 显然，结果是集合{H，T}的一个元素；

E_2：将一枚硬币连续抛两次，观察试验的结果. 这时，所有可能的结果为

$$\{HH, HT, TH, TT\};$$

E_3：对某目标进行射击，观察直到目标击中为止的总射击次数；

E_4：测量一个工人生产的电灯泡的寿命，试验的结果是 t 小时. 如果假定灯泡的寿命不超过 5000 小时，则 t 是区间$[0, 5000]$中的某个数值.

这四个实验均满足随机试验的三个条件，而实验“记录 100 年后地球上的人口数量”却不是随机试验，因为实验无法在相同的条件下重复进行.

二、样本空间

对于任一个随机试验，每次实验的所有可能结果都是事先知道的，而且结果不止一个. 把随机试验的一切可能结果的集合称为**样本空间**. 在概率论中常用大写的希腊字母 Ω 来表示. 试验的每个结果称之为样本点或基本事件，通常用小写的希腊字母 ω 或 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 来表示. 例 1.1.1 中 4 个随机试验的样本空间分别为

$\Omega_1 = \{H, T\}$，其中 H 表示正面，T 表示反面；

$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$；

$\Omega_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$；

$\Omega_4 = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 5000\}$.

由上述可知，样本空间可以是有限点集，可以是可列点集(即它可以与自然数集是一一对应的集合)，也可以是某区间或平面上的一个区域. 其中，随机试验 E_1 的样本空间是一维的，E_2 的样本空间是二维的，它们的样本点为有限个.

三、随机事件

在实际问题中，我们往往关心某种满足一定条件样本点的集合，这种满足一定条件样本的集合称为**随机事件**，简称**事件**. 所以随机事件就是某些样本点的集合，也就是样本空间 Ω 的某些子集合. 在试验时，如果出现了事件 A 中的样本点，我们就说事件 A 发生了或者说 A 出现了. 例如，

(1) 在 E_1 中事件 A 表示"出现正面"，即 $A=\{\mathrm{H}\}$；

(2) 在 E_4 中事件 B 表示"电灯泡的寿命在 3000 至 4000 小时之间"，即 $B=[3000,4000]$.

Ω 作为自身的子集合，在每次试验中总是发生的，称为**必然事件**；空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中总是不发生，称为**不可能事件**. 事件通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，其具体内容可写为 $A=\{\cdots\}$，其中大括号中或者是 A 所包含样本点的列举，如上面的 A，或者是对 A 中样本点所具有的性质的描述，比如在例 1.1.1 的 E_3 中，设 C 为射击次数不超过 5 次的事件，那么可写 $C=\{\omega\in\Omega:\omega\leqslant 5\}$. 事件 B 也属于这种情况，不过我们用一个闭区间 $[3000,4000]$ 表示"$3000\leqslant\omega\leqslant 4000$".

四、事件间的关系与运算

事件既然是 Ω 的子集合，它们之间的关系与运算就是集合间的关系与运算. 下面设 $A,B,A_1,A_2,\cdots$ 均为事件.

(1) 若 $A\subset B$，则称 B 包含事件 A 或 A 含于 B. 这表示事件 A 发生必导致 B 发生，若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与 B **相等**.

(2) 事件 $A\cup B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，称为事件 A 与 B 的**并事件**. 也就是把两事件的样本点放在一起所组成的新事件. 因此，$A\cup B$ 发生当且仅当 A,B 中至少有一个发生，类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega$ 至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中一个事件$\}$为 **n 个事件的并事件**，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega$ 至少属于 $A_1,A_2,\cdots$ 中一个事件$\}$为**可列个事件的并事件**.

(3) 事件 $A\cap B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$ 并且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的**交事件**，简记为 AB，也就是两事件中公共的样本点所组成的事件，因此 AB 发生当且仅当 A 与 B 同时发生.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega$ 属于一切 $A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 为 **n 个事件的交事件**，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega$ 属于一切 $A_1,A_2,\cdots\}$ 为**可列个事件的交事件**.

(4) 事件 $A-B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差事件**，事件 $A-B$ 发生当且仅当 A 发生，而 B 不发生.

(5) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，即两事件不能同时发生.

(6) 若 $A\cup B=\Omega$，且 $A\cap B=\varnothing$，则称两事件互为**逆事件**，并记 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

事件的关系与运算可用图 1.1 来表示.

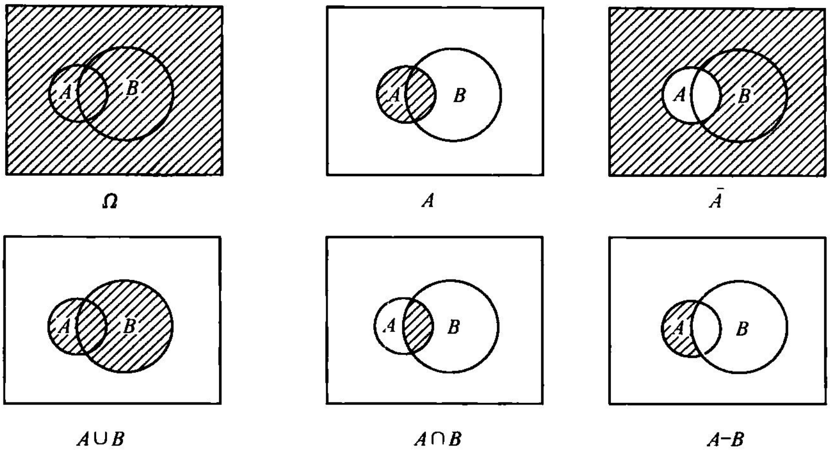


图 1.1

事件的运算满足下列定律:

(1) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

(2) 结合律:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

(3) 分配律:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

(4) 对偶律:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

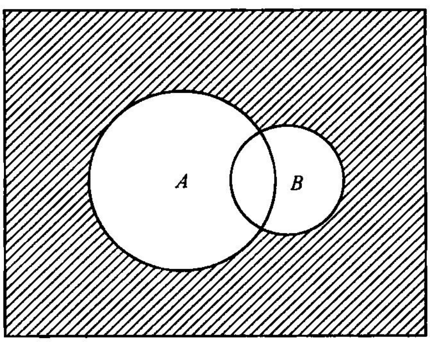


图 1.2

这些定律均可用严格的数学方法证明，即证明等式两边的事件相互包含. 但是用图示的方法验证这些定理会显得更加直观. 例如，图 1.2 中的 $\overline{A\cup B}$ 即为方框中阴影部分，而如果你把 A 的外面涂上红色，把 B 的外面涂上蓝色，那么既有红色又有蓝色的部分恰是方框中的阴影部分.

根据事件的关系与运算规则可用一些简单的事件来表示较复杂的事件.

例 1.1.2 某灯泡厂取样检查灯泡的寿命，设 A 表示"灯泡寿命大于 1500h"，B 表示"灯泡寿命为 1000～2000h"，请用集合的形式写出下列事件：$\Omega,A,B,A\cup B,AB,A-B,B-A$.

解 $\Omega=\{x|x\geqslant 0\}=[0,+\infty)$， $A=\{x|x>1500\}=(1500,+\infty)$，

$B=\{x|1000\leqslant x\leqslant 2000\}=[1000,2000]$， $A\cup B=[1000,+\infty)$，

$AB=(1500,2000]$， $A-B=(2000,+\infty)$， $B-A=[1000,1500]$.

例 1.1.3 一个货箱中装有 12 只同类型的产品，其中 3 只是一等品，9 只是二等品，从中随机地抽取两次，每次任取 1 只，$A_i(i=1,2)$表示第 i 次抽取的是一等品，试用字母及事件间的关系表示下列事件：

(1) 两只都是一等品；

(2) 两只都是二等品；

(3) 一只是一等品，另一只是二等品；

(4) 第二次抽取的是一等品.

解 由题意，用 $\overline{A}_i$ 表示第 i 次抽取的是二等品$(i=1,2)$，则

(1) 两只都是一等品：$A_1\cap A_2$；

(2) 两只都是二等品：$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$；

(3) 一只是一等品，另一只是二等品：$\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2$；

(4) 第二次抽取的是一等品：$\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2=A_2$.

例 1.1.4 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以 A,B,C 分别表示甲、乙、丙命中目标，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件.

A_0："甲命中，乙和丙都没有命中" $A\overline{B}\overline{C}$；

A_1："至少有一人命中" $A\cup B\cup C$；

A_2："恰有一个命中目标" $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

A_3："恰有两个命中目标" $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$；

A_4："最多有一个命中目标" $\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}$；

A_5："三人都命中目标" ABC；

A_6："三人均未命中目标" $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

注 事件的表示不是唯一的，例如，利用对偶律或事件的差，例 1.1.4 中事件 A_0 也可表示为如下几种形式：

$$A_0=A\,\overline{(B\cup C)},\quad A_0=A-B-C.$$

1.2 概率的定义

1.1 节介绍了随机现象，通过大量试验可以观察到会有哪些结果出现. 实际上，我们更希望能对这些结果出现的可能性作出定量的描述. 事件发生可能性的定量描述的实质就是事件发生的概率. 有些事件发生的概率直觉就可以确定，但是，对于一

般事件而言，单凭直觉来确定其发生的概率显然是行不通的.

一、概率的统计定义

人们经过长期的实践发现，虽然一个随机事件在某次试验或观察中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中，它发生的可能性的大小却能呈现出某种规律性. 我们感兴趣的正是对这种规律性的探讨.

1. 频率的稳定性

若事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数，而比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**.

很早人们就注意到，在多次抛掷一枚质地均匀的硬币时，出现正面这一随机事件发生的频率会接近 1/2. 请看下面“抛掷硬币”试验的实例，见表 1.1.

表 1.1

实验人	抛掷次数	出现正面次数	频率(出现正面次数/抛掷次数)
德摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

表 1.1 说明：当试验的次数 n 增加时，正面向上的频率，即正面出现的次数 k 与总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$ 将随 n 的增大而逐渐逼近 $\frac{1}{2}$.

频率偏离这个常数很大的可能性虽然存在，但是试验的次数 n 越大，则频率偏离这个常数的可能性越小，也就是说，**随机事件的每一次观察结果都是偶然的，但是多次观察某个随机现象可以知道，在大量的偶然事件中存在着必然的规律**.

通过大量的试验可知，在重复试验的次数 n 充分大时，事件的频率总是在一个固定数值 p 附近摆动，我们将这种特性称为**频率的稳定性**. 频率的稳定性是一个客观存在，它不断地为人们所证实. 例如，多年医学研究表明，出生婴儿性别的数量比约为男：女＝1.06：1；英语字母 E，T，A 出现的频率要明显高于其他字母. 因此人们常用统计频率作为概率的近似值.

2. 频率的性质

频率具有下列性质：

性质 1.2.1 对于任一个事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

证 设 n_A 表示 n 次试验中 A 发生的次数，则有 $0\leqslant n_A\leqslant n$，从而 $0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant 1$，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

性质 1.2.2 $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$.

证 因 $n_\Omega=n, n_\varnothing=0$,故 $f_n(\Omega)=\dfrac{n_\Omega}{n}=1, f_n(\varnothing)=\dfrac{n_\varnothing}{n}=0$.

性质 1.2.3 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB)$.

证 设 n_A, n_B 和 n_{AB} 分别为事件 A, B 和 AB 在 n 次试验中发生的次数,显然事件 $A\cup B$ 发生的次数 $n_{A+B}=n_A+n_B-n_{AB}$,所以

$$f_n(A\cup B)=\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}-\frac{n_{AB}}{n}=f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB).$$

特别地,若 A, B 互不相容,则有 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

注 性质 1.2.3 还可推广到更多个事件的情形.特别地,若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容,则有

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

性质 1.2.4 $f_n(\overline{A})=1-f_n(A)$.

证 因 $n_A+n_{\overline{A}}=n$,故

$$f_n(\overline{A})=\frac{n_{\overline{A}}}{n}=1-\frac{n_A}{n}=1-f_n(A).$$

性质 1.2.5 若 $A\subset B$,则有 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$,且 $f_n(B-A)=f_n(B)-f_n(A)$.

证 因 $A\subset B$,故 $n_A\subset n_B$,且事件 $B-A$ 发生的次数 $n_{B-A}=n_B-n_A$,所以

$$f_n(B-A)=\frac{n_{B-A}}{n}=\frac{n_B-n_A}{n}=\frac{n_B}{n}-\frac{n_A}{n}=f_n(B)-f_n(A).$$

3. 概率的统计定义

定义 1.2.1 事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 随着重复试验的次数 n 的增大而稳定于某个常数 p,则称这个常数 p 为事件 A 发生的**概率**,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

由频率的稳定性可知,任一个事件 A 的概率是客观存在的.但在实际问题中,常常并不知道 $P(A)$ 为何值,此时可取试验次数 n 足够大时 A 出现的频率作为它的近似值,这正是统计定义的优点.

二、概率的公理化定义

由概率的统计定义容易估计事件 A 发生的概率,但是,在实践中,人们不可能对每一事件都做大量的试验.为了理论研究的需要,1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出的概率公理化定义,其概括了历史上几种概率定义中的共有特性,又避免了各自的局限性和含混之处,不管什么随机现象,只有满足定义中的三条公理,才能说它是概率.这个定义给予了概率论严格的数学基础,并使得概率论的研究方法和结果能用于其他的科学领域.

定义 1.2.2 设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对 E 的每一个事件 A 赋予一个实值函数 $P(A)$,称其为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(A)$ 满足下列三条公理:

公理 1.2.1(非负性) 对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 1.2.2(规范性) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

公理 1.2.3(可数可加性) 对于可数个两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

概率具有与频率相应的几条性质,并且都可以运用上述三个公理进行证明.

性质 1.2.6 对于任一个事件 A,有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.2.1}$$

性质 1.2.7

$$P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0. \tag{1.2.2}$$

性质 1.2.8

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.3}$$

此性质称为**概率的加法公式**.

为了便于应用,性质 1.2.8 可以推广到三个事件求和的概率.

推论 1.2.1 设 A,B,C 为三个事件,则

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)\\&+P(ABC).\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

特别地,若 A,B 互不相容,则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2.5}$$

式(1.2.4)还可以推广为:若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m). \tag{1.2.6}$$

这称为**概率的有限可加性**.

注 概率还具有可列可加性,即 $A_1,A_2,\cdots,A_m,\cdots$ 若是一列两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

性质 1.2.9

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.2.7}$$

性质 1.2.10 若 $A\subset B$,则有 $P(A)\leqslant P(B)$,且

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.2.8}$$

注 上述性质不仅对概率的统计定义满足,而且对后面用其他方法定义的概率也都满足.

例 1.2.1 已知 A,B 是两个事件,且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7,P(A\cup B)=0.8$. 求 $P(B-A)$ 与 $P(A-B)$.

解 由性质 1.2.8 得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-0.8=0.5.$$