

21 世纪高等院校信息与通信工程规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

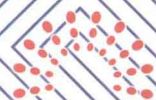
电磁场 与电磁波

法林 申宁 张延冬 范瑾 等 编著
法玉晓 主审

Electromagnetic Fields and Waves



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



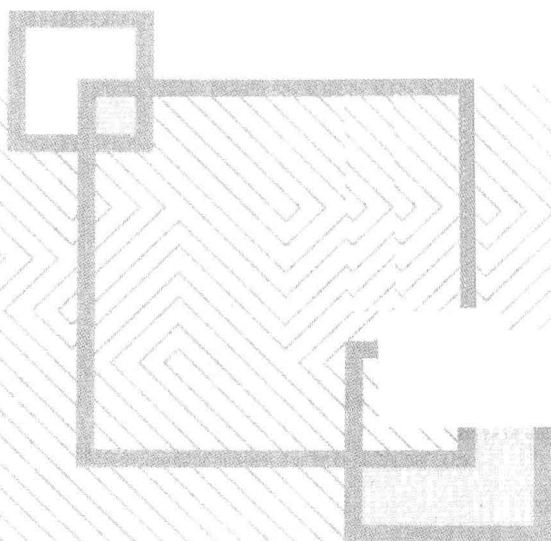
高校系列

21 世纪高等院校信息与通信工程规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

电磁场 与电磁波

法林 申宁 张延冬 范瑾等 编著
法玉晓 主审

Electromagnetic Fields and Waves



人民邮电出版社
北京



高校系列

图书在版编目 (C I P) 数据

电磁场与电磁波 / 法林等编著. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.1
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
ISBN 978-7-115-29322-0

I. ①电… II. ①法… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. ①0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第226517号

内 容 提 要

本书介绍电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和一些基本的分析、计算方法,帮助学生学会分析、解决一些实际的工程电磁场与电磁波问题。在保持电磁场与电磁波基础理论的系统性、完整性的基础上,加强数学理论知识的讲述,力求对基本概念、基本方法讲深、讲透。本书注重教学内容和实际应用相结合,调整课程章节结构,丰富物理概念知识,摒弃多余学时的内容,充实例题习题内容,利于学生学习。

本书可作为普通高等院校通信工程、电子信息工程、电子科学与技术、电气工程及其自动化等专业的本科生教材,也可供从事电波传播、射频技术、微波技术、电磁兼容技术以及地球物理的科研和工程技术人员参考。

21 世纪高等院校信息与通信工程规划教材

电磁场与电磁波

-
- ◆ 编 著 法 林 申 宁 张延冬 范 瑾 等
审 法玉晓
责任编辑 张孟玮
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
三河市潮河印业有限公司印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 13.75 2013 年 1 月第 1 版
字数: 360 千字 2013 年 1 月河北第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-29322-0

定价: 29.80 元

读者服务热线: (010)67170985 印装质量热线: (010)67129223
反盗版热线: (010)67171154

前 言

“电磁场与电磁波”是高等院校电子信息类专业的一门重要基础课，其理论涉及通信、雷达、遥感、导航、电子对抗、地球物理等各个领域。本门课程是学生在学完“高等数学”、“大学物理”和“数学物理方程”等课程之后开设的后续课程，通过该门课程的学习，可以使学生掌握电磁场与电磁波的基本理论，学会用“场”的思想分析和解决问题，提高学生的抽象思维能力和科技创新能力。

本书是基于编者多年从事电磁场与电磁波教学和科研工作的经验编写的，在编写过程中吸取了国内、外同类教材的优点，力求做到结构合理、层次分明、重点突出，理论和概念的表述准确明了，数学推导严谨易懂。对于基本方法通过例题说明，注重与实际应用相结合。

全书共分 6 章，由矢量分析、静态场、时变场三部分内容构成。第一部分为第 1 章矢量分析，介绍了矢量分析的概念、定理、公式，并给出亥姆霍兹定理，它是学习本课程的主要数学工具；第二部分静态场（包括静电场、恒定电场和恒定磁场），内容包括第 2 章静电场、第 3 章恒定磁场和第 4 章静态场的边值问题，详细阐述了静态场的基本方程、基本性质和各种求解方法以及电容、电感、能量和力的计算，以唯一性定理为理论依据，重点介绍了镜像法和分离变量法的基本思想和具体求解方法；第三部分时变场，内容由第 5 章时变电磁场和第 6 章正弦平面电磁波构成，主要讨论了时变场和时谐场的麦克斯韦方程、位函数、边界条件和能量，以及平面波的传播、极化、反射和透射的规律和现象。它们是进一步学习电磁波的基础。附录列出了常用的矢量公式，可供学生查阅。另外，为了加深学生的理解，培养学生分析和解决问题的能力，每章之后附有一定数量的习题，同时书后附有简单的习题答案。

本书的内容结构安排特点如下。

（1）根据编者的教学经验和体会，先学习静态场，学生更容易学习时变场的内容。以亥姆霍兹定理为理论依据，给出一个整体框架，使学生明白每章所要学习的内容，通过静态场的学习，引出时变场的麦克斯韦方程组，给出静态场是时变场的特例。

（2）不同于大多数的教材，本书去掉了导行电磁波与电磁辐射的内容。这主要是基于 48 学时课程的考虑，并且“微波技术基础”和“天线与电波”等后续课程中都有此内容的详细阐述。

（3）在内容安排上注意重点和难点问题，或一般教材中讲述较少的内容。例如：从物理概念上清楚阐述了感生电动势和动生电动势的相对关系，从而可以加深对麦克斯韦第二方程的理解。

（4）在内容讲解上，对全书核心内容的麦克斯韦方程组的各个方程都做了详细的推证和讲解。

（5）本书注重教学内容和实际应用相结合，例如文中给出了磁偶极子在石油测井中的应用实例。

本书采用 SI 国际单位制，以黑斜体表示矢量，时谐场的时间因子采用 $e^{j\omega t}$ 。

本书第 1 章和附录由范瑾编写，第 2 章由张延冬编写，第 3 章由申宁编写，第 4 章由法玉晓编写，第 5 章和第 6 章由法林编写。李国辉、孙继刚、王蕾和史盟对编写此教材做了大量工作，在此致谢。本书的编写得到了国家自然科学基金项目 40974078 的资助。由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，联系方式：fa_yy@yahoo.com.cn。

编 者

2012 年 7 月 9 日

目 录

第 1 章 矢量分析..... 1	第 2 章 静态电场 26
1.1 标量场和矢量场 1	2.1 电荷与电流 26
1.1.1 标量 1	2.1.1 电荷与电荷密度 26
1.1.2 矢量 1	2.1.2 电流与电流密度 27
1.1.3 标量场和矢量场 1	2.1.3 电流连续性方程 29
1.2 矢量运算 2	2.2 库仑定律和电场强度 29
1.2.1 矢量加法 2	2.2.1 库仑定律 29
1.2.2 矢量减法 3	2.2.2 电场强度 30
1.2.3 标量和矢量乘积 3	2.3 真空中的静电场 33
1.2.4 两矢量的标量积 4	2.3.1 真空中静电场的高斯定理及其应用 34
1.2.5 两矢量的矢量积 4	2.3.2 静电场的环路定理 38
1.2.6 矢量三重积 5	2.4 电介质中的静电场 38
1.3 3 种正交坐标系 5	2.4.1 电介质的极化 38
1.3.1 直角坐标系 5	2.4.2 电介质中静电场的基本方程 40
1.3.2 圆柱坐标系 6	2.4.3 电介质的本构关系 41
1.3.3 球坐标系 6	2.4.4 静电场的边界条件 41
1.4 矢量在不同坐标系中的变换 7	2.5 电位 43
1.4.1 圆柱坐标系与直角坐标系间的变换 7	2.5.1 电位和电位差 43
1.4.2 球坐标系与直角坐标系间的变换 9	2.5.2 电位的微分方程 47
1.5 标量场的梯度 11	2.5.3 电位的边界条件 47
1.5.1 方向导数 11	2.6 电容 电场能量 电场力 48
1.5.2 梯度 12	2.6.1 导体系统的电容 48
1.6 矢量场的散度 14	2.6.2 静电场的能量 50
1.6.1 矢量场的矢线 14	2.6.3 电场力 52
1.6.2 通量 14	2.7 恒定电场 55
1.6.3 散度 15	2.7.1 恒定电场的基本方程、传导特性和边界条件 55
1.6.4 散度定理 16	2.7.2 弛豫时间 57
1.7 矢量场的旋度 18	2.7.3 恒定电场与静电场的比拟 58
1.7.1 矢量场的环量 18	本章小结 59
1.7.2 矢量场的旋度 18	习题 60
1.7.3 斯托克斯定理 20	
1.8 亥姆霍兹定理 21	第 3 章 恒定磁场 63
本章小结 21	
习题 24	

3.1 磁感应强度	63	5.1 法拉第电磁感应定律	126
3.1.1 安培定律	63	5.1.1 动生电动势	127
3.1.2 磁感应强度	64	5.1.2 感生电动势	127
3.2 真空中恒定磁场的基本方程	66	5.1.3 时变磁场中的运动回路	128
3.2.1 磁通连续性方程	66	5.2 位移电流	130
3.2.2 安培环路定律	67	5.3 麦克斯韦方程组	132
3.3 矢量磁位	70	5.4 时变电磁场的边界条件	135
3.4 磁偶极子	73	5.4.1 H 的边界条件	135
3.5 磁介质中恒定磁场的基本方程	75	5.4.2 E 的边界条件	136
3.5.1 磁介质的磁化及磁化强度	75	5.4.3 B 的边界条件	136
3.5.2 磁介质中磁场的基本方程	77	5.4.4 D 的边界条件	136
3.6 恒定磁场的边界条件	79	5.4.5 两种特殊情况下边界条件的讨论	137
3.6.1 磁感应强度 B 的边界条件	79	5.5 坡印廷定理和坡印廷矢量	138
3.6.2 磁场强度 H 的边界条件	80	5.6 波动方程	140
3.7 标量磁位	81	5.7 动态矢量位和标量位	141
3.8 电感	81	5.7.1 矢量位和标量位	142
3.8.1 自感	82	5.7.2 位函数的波动方程	143
3.8.2 互感	83	5.7.3 磁偶极子的应用举例	143
3.9 磁场能量和磁场力	84	5.8 时谐电磁场	146
3.9.1 磁场能量	84	5.8.1 时谐量的复数表示	146
3.9.2 磁场力	87	5.8.2 复数形式的麦克斯韦方程	148
本章小结	89	5.8.3 复数形式的波动方程—亥姆霍兹方程	149
习题	90	5.9 平均坡印廷矢量	149
第 4 章 静态场的边值问题	94	本章小结	151
4.1 格林定理	94	习题	153
4.2 唯一性定理	95	第 6 章 正弦平面电磁波	156
4.3 分离变量法	96	6.1 理想介质中的均匀平面波	156
4.3.1 直角坐标系中的分离变量法	96	6.2 平面波的极化	161
4.3.2 圆柱坐标系中的分离变量法	105	6.3 导电媒质中的均匀平面波	165
4.3.3 球坐标系中的分离变量法	107	6.3.1 导电媒质中平面电磁波的传播特性	165
4.4 镜像法	110	6.3.2 弱导电媒质和强导电媒质	168
4.4.1 点电荷对导体平面的镜像	110	6.3.3 电磁波场的衰减及度量单位	170
4.4.2 点电荷对介质平面的镜像	114	6.4 对平面分界面的垂直入射	172
4.4.3 点电荷对导体球面的镜像	115	6.4.1 对理想导体平面的垂直入射	172
4.4.4 线电荷对导体圆柱的镜像	118	6.4.2 对两种导电媒质分界面的垂直入射	174
本章小结	122		
习题	122		
第 5 章 时变电磁场	126		

6.5 对平面分界面的斜入射	178	附录 B 梯度、散度、旋度和拉普 拉斯算符展开式	197
6.5.1 对理想导体平面的斜入射	179	附录 C 电磁量单位	199
6.5.2 对理想介质分界面的斜入射	183	习题答案	201
6.5.3 全反射和无反射	185	参考文献	212
6.6 电磁波的相速和群速	189		
6.6.1 相速与群速	189		
6.6.2 群速和相速的关系	191		
本章小结	192		
习题	193		
附录 A 常用矢量公式	195		

第 1 章

矢量分析

在学习和研究电磁现象时，会涉及一些主要的物理量，如电场强度、电通密度、磁场强度、磁通密度，这些物理量都是矢量。这些矢量型物理量的时间和空间分布构成了电磁矢量场。分析、处理电磁矢量场的数学方法是矢量分析，其主要内容是关于标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的计算。本章将给出梯度、散度和旋度的定义及相关的运算法则、公式，并在此基础上介绍亥姆霍兹定理。

1.1 标量场和矢量场

1.1.1 标量

电磁理论中遇到的物理量可分为标量和矢量两类。一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量。电荷量、电位、能量等都是标量。这些量中的每一个量，用单纯的一个数就可以完整的描述，如 0.1C 的电荷、220V 的电压等。

1.1.2 矢量

一个不仅有大小而且有方向的物理量称为矢量。如电场强度、磁场强度、速度等。

在三维空间中，一个矢量常用一条有向线段来图示，有向线段的长度表示该矢量的大小，而有向线段的方向即该矢量的方向，如图 1.1.1 所示。其中 $\mathbf{A}$ 表示一个从 O 点指向 P 点的矢量。

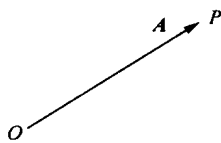


图 1.1.1 矢量图示

矢量 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_A \quad (1.1.1)$$

其中 A 是 $\mathbf{A}$ 的大小，称为模，由式 (1.1.2) 表示； $\mathbf{e}_A$ 是 $\mathbf{A}$ 的单位矢量，即方向与 $\mathbf{A}$ 的方向相同，大小为 1 的矢量，由式 (1.1.3) 表示。

$$A = |\mathbf{A}| \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1.1.3)$$

1.1.3 标量场和矢量场

在电磁场与电磁波这门课程中，我们从头到尾都在和场打交道。实际上，人们周围的空间也

确实存在着各种各样的场，例如自由落体现象，说明存在一个重力场；人们能感觉到室内外的冷暖，说明我们周围分布着一个温度场等。那么到底什么是场呢？

从数学意义上理解，场是给定区域内各点数值的集合，这些数值规定了该区域内一个特定量的特性。从物理意义上理解，场是遍及一个被界定的或无限扩展的空间内的、能够产生某种物理效应的特殊的物质，场是具有能量的。

例如，温度场就由温度 T 这个特定量来描述，只要知道了场中各点温度的大小，该温度场就被确定了，这种只有数值大小的物理量称为标量，该场称为标量场；还有一种场，如本书中讨论的电场，电场强度 E 是描述电场的特定量之一，不仅需要知道它的大小，还要知道它的方向，这样才能完全确定它，这样的物理量称为矢量，该场称为矢量场。

1.2 矢量运算

1.2.1 矢量加法

两个矢量相加，其和服从平行四边形法则，如图 1.2.1 所示。

$$C = A + B \quad (1.2.1)$$

矢量加法服从交换律和结合律，即

$$C = A + B = B + A \quad (1.2.2)$$

$$A + B + C + D = (A + B) + (C + D) = A + (B + C) + D \quad (1.2.3)$$

矢量加法是几个矢量的合成问题，反之，一个矢量也可以分解成几个矢量。例如把矢量 A 放在直角坐标系中，可以分解为 A_x 、 A_y 和 A_z 。根据矢量加法， A 为这 3 个矢量之和，如图 1.2.2 所示。

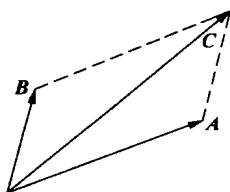


图 1.2.1 矢量相加

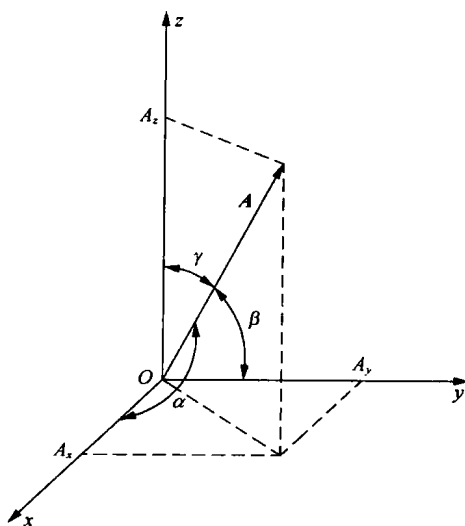


图 1.2.2 直角坐标系中的矢量

$$A = A_x + A_y + A_z \quad (1.2.4)$$

在直角坐标系中，3 个轴方向上的单位矢量分别为 e_x 、 e_y 、 e_z 。矢量 A_x 、 A_y 和 A_z 分别为矢

量 A 在 x 、 y 、 z 轴方向上的投影, 用 A_x 、 A_y 、 A_z 表示, 则

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.2.5)$$

可见, A 的模为

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.2.6)$$

A 的单位矢量 e_A 为

$$e_A = \frac{A}{|A|} = \frac{e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} = e_x \frac{A_x}{|A|} + e_y \frac{A_y}{|A|} + e_z \frac{A_z}{|A|} \quad (1.2.7)$$

由图 1.2.2 可知

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|A|} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|A|} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|A|} \quad (1.2.8)$$

其中 α 、 β 和 γ 分别为矢量 A 与 3 个坐标轴方向的夹角。 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为矢量 A 的方向余弦。

设有 3 个矢量 A 、 B 和 C , 在直角坐标系中可分别表示为

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.2.9)$$

$$B = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z \quad (1.2.10)$$

$$C = e_x C_x + e_y C_y + e_z C_z \quad (1.2.11)$$

则 3 个矢量相加为

$$A + B + C = e_x (A_x + B_x + C_x) + e_y (A_y + B_y + C_y) + e_z (A_z + B_z + C_z) \quad (1.2.12)$$

1.2.2 矢量减法

矢量减法的定义为

$$A - B = A + (-B) \quad (1.2.13)$$

式中 $-B$ 称为 B 的逆矢量, 它的大小和矢量 B 的大小相等, 但方向与 B 相反, 如图 1.2.3 所示。

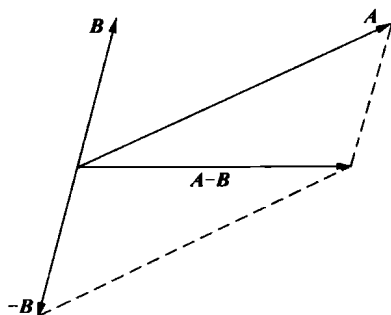


图 1.2.3 矢量减法

1.2.3 标量和矢量乘积

一个标量 k 与一个矢量 A 的乘积仍为一个矢量, 即 kA 。显然, 该矢量的大小为 A 矢量的 $|k|$ 倍。若 $k > 0$, 则 kA 与 A 同向; 若 $k < 0$, 则 kA 与 A 反向。

1.2.4 两矢量的标量积

两矢量的标量积亦称点积，定义为两矢量的大小与它们之间较小的夹角的余弦之积，结果是一个标量，可表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1.2.14)$$

如图 1.2.4 所示。

由式 (1.2.14) 可知， $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，标量积为零，因此，两非零矢量

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的正交条件为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.15)$$

两矢量点积服从交换律和分配律，即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.2.17)$$

在直角坐标系中， $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 3 个单位矢量互相正交，根据标量积定义可得

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1.2.18)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (1.2.19)$$

于是两矢量的标量积可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot (\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

1.2.5 两矢量的矢量积

两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积亦称叉积，其结果是一个矢量，用矢量 $\mathbf{C}$ 表示。矢量 $\mathbf{C}$ 的大小定义为 $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ ，方向垂直于矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 构成的平面，且矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 三者符合右手螺旋法则，其数学定义式为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_c |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1.2.21)$$

式 (1.2.21) 中， θ 为矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角，如图 1.2.5 所示。

根据两矢量叉积的定义和右手螺旋法则可以看出

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.2.22)$$

式 (1.2.22) 说明两矢量叉积不服从交换律，但服从分配率，即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.2.23)$$

两矢量叉积不服从结合律，即

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (1.2.24)$$

对于直角坐标系，由矢量积定义可得到单位矢量之间的关系

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (1.2.25)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.2.26)$$

于是矢量积在直角坐标系中可表示为

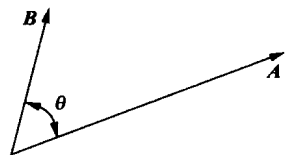


图 1.2.4 矢量点积

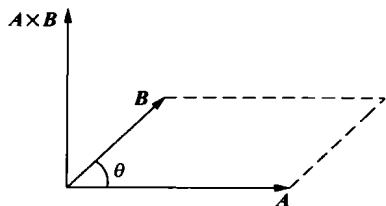


图 1.2.5 矢量叉积

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \times (\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\
 &= \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)
 \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

式(1.2.27)也可用行列式表示,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.2.28)$$

1.2.6 矢量三重积

3个矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 相乘可以分为两种情况: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 结果是一个标量,称为标量三重积; $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 结果是一个矢量,称为矢量三重积。在矢量运算中,规定先进行叉积运算,后进行点积运算。

标量三重积和矢量三重积具有如下运算性质

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.29)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.2.30)$$

1.3 3种正交坐标系

在矢量微积分中,经常要进行曲线积分、曲面积分和体积分,需要写出对应的微分元,如微分长度、微分面积和微分体积,它们分别称为线元、面元和体积元。这里的线元和面元均为矢量,是有方向的。

在不同的坐标系中,微分元的表达式也各不相同。在电磁理论中,最常用的坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。下面来阐述在不同坐标系下各微分元的构成。

1.3.1 直角坐标系

在直角坐标系中,坐标变量为 (x, y, z) ,变化范围分别是: $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ 和 $-\infty < z < +\infty$ 。坐标变量 x 、 y 和 z 都是长度量。点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是 $x = x_0$ 、 $y = y_0$ 、 $z = z_0$ 3个坐标平面的交点。由图1.3.1可看出,线元、面元和体积元的表达式如下。

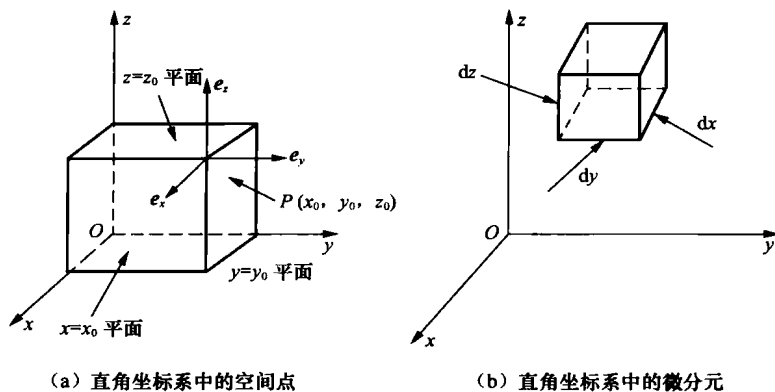


图 1.3.1 直角坐标系

(1) 线元

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1.3.1)$$

(2) 面元

$$d\mathbf{S}_x = \mathbf{e}_x dydz \quad (1.3.2)$$

$$d\mathbf{S}_y = \mathbf{e}_y dxdz \quad (1.3.3)$$

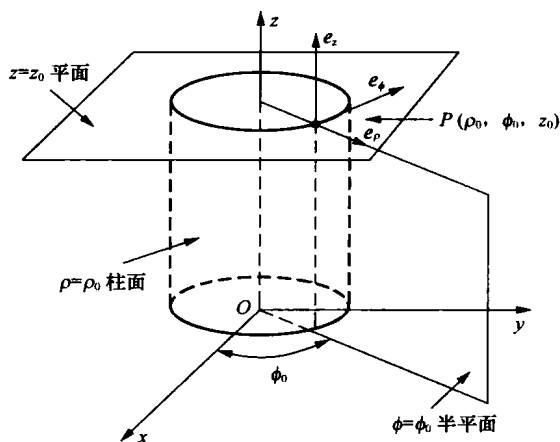
$$d\mathbf{S}_z = \mathbf{e}_z dxdy \quad (1.3.4)$$

(3) 体积元

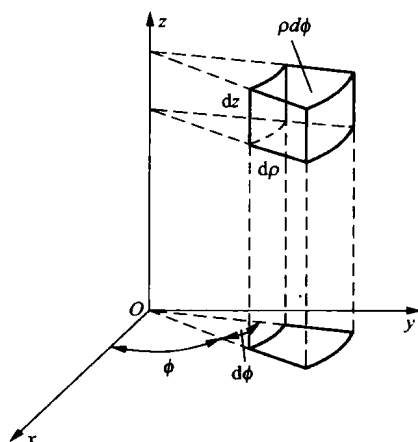
$$dV = dxdydz \quad (1.3.5)$$

1.3.2 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中, 坐标变量为 (ρ, ϕ, z) , 变化范围分别是: $0 \leq \rho \leq +\infty$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 、 $-\infty < z < +\infty$ 。坐标变量 ρ 和 z 是长度量, ϕ 是角度量。如图 1.3.2 所示, 点 $P(\rho_0, \phi_0, z_0)$ 是 $\rho = \rho_0$ 的柱面、 $\phi = \phi_0$ 的半无限大平面、 $z = z_0$ 的平面的交点。由图 1.3.2 可看出, 线元、面元和体积元的表达式如下。



(a) 圆柱坐标系中的空间点



(b) 圆柱坐标系中的微分元

图 1.3.2 圆柱坐标系

(1) 线元

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz \quad (1.3.6)$$

(2) 面元

$$d\mathbf{S}_\rho = \mathbf{e}_\rho \rho d\phi dz \quad (1.3.7)$$

$$d\mathbf{S}_\phi = \mathbf{e}_\phi d\rho dz \quad (1.3.8)$$

$$d\mathbf{S}_z = \mathbf{e}_z \rho d\rho d\phi \quad (1.3.9)$$

(3) 体积元

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.3.10)$$

1.3.3 球坐标系

坐标变量 r 是长度量, θ 和 ϕ 是角度量。如图 1.3.3 所示, 点 $P(r_0, \theta_0, \phi_0)$ 是 $r = r_0$ 的球面、

$\phi = \phi_0$ 的半无限大平面、 $\theta = \theta_0$ 的锥面的交点。由图 1.3.3 可以看出，线元、面元和体积元的表达式如下。

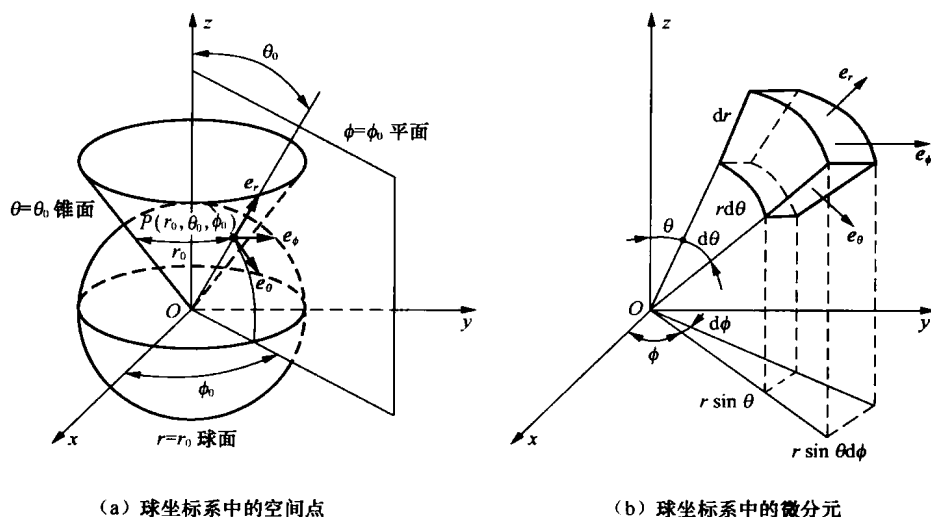


图 1.3.3 球坐标系

(1) 线元

$$dl = e_r dr + e_\theta r d\theta + e_\phi r \sin \theta d\phi \quad (1.3.11)$$

(2) 面元

$$dS_r = e_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.3.12)$$

$$dS_\theta = e_\theta r \sin \theta dr d\phi \quad (1.3.13)$$

$$dS_\phi = e_\phi r dr d\theta \quad (1.3.14)$$

(3) 体积元

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.3.15)$$

1.4 矢量在不同坐标系中的变换

在工程计算中，为了简化计算公式，又需要将某一种坐标系变换到另外一种坐标系——经常遇到的是圆柱坐标系及球坐标系同直角坐标系之间的变换。

1.4.1 圆柱坐标系与直角坐标系间的变换

圆柱坐标系的坐标变量为 ρ 、 ϕ 和 z ，与直角坐标系中的坐标变量 x 、 y 和 z 之间满足下列变换关系（如图 1.4.1 所示）。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1b)$$

若矢量 $\mathbf{A}$ 在直角坐标系中为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.4.2)$$

式 (1.4.2) 中分量 A_x 、 A_y 和 A_z 是坐标 x 、 y 和 z 的标量函数。

同理, 矢量 $\mathbf{A}$ 在圆柱坐标系中为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.4.3)$$

式 (1.4.3) 中分量 A_ρ 、 A_ϕ 和 A_z 是坐标 ρ 、 ϕ 和 z 的标量函数。根据标量积定义可得

$$\left. \begin{aligned} A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\rho \\ A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\phi \\ A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (1.4.4)$$

进一步将标量积展开可得

$$A_\rho = (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x A_x \cdot \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_y A_y \cdot \mathbf{e}_\rho \quad (1.4.5a)$$

$$A_\phi = (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_x A_x \cdot \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_y A_y \cdot \mathbf{e}_\phi \quad (1.4.5b)$$

$$A_z = (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot \mathbf{e}_z = A_z \quad (1.4.5c)$$

只要求出直角坐标系和圆柱坐标系单位矢量的标量积, 式 (1.4.5) 中矢量分量间的变换就可完全确定。如图 1.4.1 所示, 直角坐标系单位矢量 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 在圆柱坐标系 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 和 $\mathbf{e}_z$ 方向上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\rho &= \cos \phi \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.6a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\rho &= \sin \phi \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\phi &= \cos \phi \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.6b)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.6c)$$

式 (1.4.5) 和式 (1.4.6) 是将直角坐标系中矢量变换到圆柱坐标系中的关系式。采用类似的方法, 也可得到圆柱坐标系中的矢量变换到直角坐标系中的关系式。为了便于记忆, 这里采用矩阵形式。我们将上述关系用矩阵方式表示为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.4.7)$$

同理可得

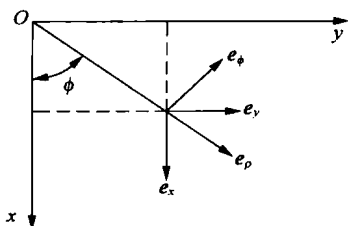


图 1.4.1 圆柱坐标系和直角坐标系中单位矢量间的变换关系

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

【例 1.4.1】 试将圆柱坐标系中的矢量 $\mathbf{A} = -\mathbf{e}_\phi \rho + \mathbf{e}_z z$ 变换为直角坐标系中的表达式。

解法 1 按题意有

$$A_\rho = 0, \quad A_\phi = -\rho, \quad A_z = z$$

设 $\mathbf{A}$ 矢量在直角坐标系中表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$$

其中

$$A_x = \mathbf{e}_\phi A_\phi \cdot \mathbf{e}_x = \rho \sin\phi$$

$$A_y = \mathbf{e}_\phi A_\phi \cdot \mathbf{e}_y = -\rho \cos\phi$$

$$A_z = A_z = z$$

根据坐标变换关系, 由式 (1.4.1b) 最后可得

$$A_x = y$$

$$A_y = -x$$

$$A_z = z$$

因此

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x + \mathbf{e}_z z$$

解法 2 直接利用矩阵式 (1.4.7)

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin\phi \\ -\rho \cos\phi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ z \end{bmatrix}$$

同样得

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x + \mathbf{e}_z z$$

1.4.2 球坐标系与直角坐标系间的变换

类似地, 从图 1.3.3 (a) 中可以看出, 球坐标系的坐标变量 r 、 θ 和 ϕ 与直角坐标系的坐标变量 x 、 y 和 z 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} & (r \geq 0) \\ \theta &= \arccos \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] & (\pi \geq \theta \geq 0) \\ \phi &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right) & (2\pi \geq \phi \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9a)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9b)$$