M | 数学教育研究丛书 Mathematics Educational Studies Series

数学方法论稿（修订版）

张奠宙 过伯祥 方均斌 龙开奋 著

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据
数学方法论稿 / 张奠宙等著. —修订版. —上海:上海教育出版社,2012.12
ISBN 978-7-5444-4508-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学方法—方法论 Ⅳ.①01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第320339号

责任编辑 陈洪杰 赵海燕
张莹莹 蒋徐巍
封面设计 郑 艺

数学方法论稿(修订版)
张奠宙 过伯祥 方均斌 龙开奋 著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易文网 www.ewen.cc
地 址 上海永福路 123 号
邮 编 200031
经 销 各地新华书店
印 刷 太仓市印刷厂有限公司
开 本 700×1000 1/16 印张 16 插页 2
版 次 2012 年 12 月第 2 版
印 次 2012 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-4508-5/O·0144
定 价 35.00 元

目录 CONTENTS

第一篇

数学方法通论

数学思想方法，是一个“元数学”概念，不能严格定义。本篇通过一些描述，希望能够看得更清楚些。然后将数学方法按照内涵的宽泛程度进行分别论述。其中，数学方法和哲学范畴的关系，是论述的一个重点。

第一章

数学方法综述

本章讨论“什么是方法和数学方法”“数学方法与数学思想”“数学方法论”等一般性的问题。目的是探讨数学方法的一般含义，及其价值和研究途径。“数学方法论”还不是成熟的学科，也许中国是最重视它的国家，国际未见有“数学方法论”的专著。权威的美国《数学评论》文献杂志的分类目录中，将数学方法论(methodology of mathematics)和教学法(Didactics)合并在一起，作为“数学一般”(General)的一个子目(编号是00A35)。

我国徐利治教授倡导“数学方法论”研究，发表《数学方法论选讲》专著，居功厥伟。由于波利亚的《怎样解题》也是一部数学方法论的著作，加之“中学数学解题”的社会需求，数学方法论在中学数学教育界得到迅速普及，著作和论文迭出。不过，在大学数学教育界以及数学研究圈内，却相对地较为平淡。究其原因，一方面是数学方法论研究有待深入，尚不能为大学教师所重视；另一方面，则是形式化的冰冷美丽，掩盖了火热的数学方法的思考。这一章拟讨论数学方法论的一些本原问题，直抒己见，参与争鸣。

第一节 方法与数学方法

《辞海》中未收录“方法”辞条。实际上，“方法”是一种元概念。它和“物质”“运动”“集合”等概念一样，不能逻辑地精确地定义，只能概略地描述。例如，可把“方法”说成是人们在认识世界和改造世界的活动中所采取的办法、手段、途径等的统称。这里的“办法”“手段”“途径”等，就都和“方法”大体上是“同义词”，并非“属”和“种差”式的严格定义。

但是，人们却熟知“方法”的含义，也从未有什么大的争论。一个通俗的比喻是：要过河，必须采用架桥和造船等方法，“不解决桥和船的问题，过河就是一句空话”。因此，方法是相对于某一目的而言的。方法是人的一种活动，人在活动中为达到某一目的，可以主观能动地选择、组合和创造各种手段、方式加以实行。这便是方法的真实含义了。

方法和规律有密切关系。为了达到预想的目的(如过河)，人们所采取的方法可以有多种选择，发挥主观能动性(如架桥、坐船、游泳，甚至乘飞机)，但是任何“成功的方法”必需符合客观规律。你要坐船过河，就必须造船，造船必须遵循阿基米得(Archimedes)的浮力定律，违背了这条规律，船浮不起来，过河的目的也就达不到了。

于是，人们对方法进行研究，这便产生了“方法论”，或称“方法学”。当然，这也是一种描述而已。如果放在哲学层面来分析，方法论和世界观是统一的。马克思主义哲学认为，用世界观去指导认识世界和改造世界，就是方法论。

现在，我们可以来谈数学方法。顾名思义，数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法。数学方法论则是对古往今来的数学知识进行概括、分类、评介以及如何运用的论述。

徐利治先生认为：“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问”。①

我觉得这一提法似乎过于宽泛，它几乎包容了数学史，数学哲学及至整个数学，

① 徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社，1998 年第二版。

可能把框架做得大了一些。

也有人认为，数学方法论是数学的元理论之一，又是数学理论的基础之一，道理上似乎也说得通。但是，数学方法论现在还很不成熟，如上所述，国际国内的数学界还没有“承认”这一“元理论”，似乎也没有把它当作非掌握不可的“基础”。把自己提得太高，反而会引起反作用。我想，每个数学家都有他自己的方法论观点，我们的任务是向他们学习，帮助他们总结，用我们的眼光去进行评价，作出一些建议，以便后学者能够比较自觉地运用这些方法，获得更大的效益，如此而已。如果说数学方法论已形成一套完整的理论，有自己的基本规律（我还不知道），能够成为数学的基础，我想是言过其实的。

最后，想谈谈数学思想和数学方法之间的关系。数学思想，尚不成为一种专有名词，人们常用它来泛指某些有重大意义的、内容比较丰富、体系相当完整的数学思想。比如微积分思想、概率统计思想、变换群下的不变量思想，等等。往小一点方面说，有函数映射观点、方程平衡观点、向量观点、参数观点，等等。但就这些思想和观点而言，都可说成是方法而一样适用。同一个数学成就，当用它去解决别的问题时，就称之为方法。比如，“极限”，用它去求导数、求积分时，人们就说极限方法。当我们讨论它的价值，即将变化过程的趋势用数值加以表示，使无限向有限转化时，人们就讲“极限思想”了。为了将这两重意思合在一起说，于是也有“极限思想方法”“数学思想方法”之类的提法。

其实，数学思想和数学方法往往不加区别。M. 克莱因（M. Klein）的巨著《古今数学思想》，其实说的都是“古今数学方法”。只不过从数学史角度看，人们更多注意那些数学大家们的思想贡献、文化价值，较少从“方法”的运用去考虑，因而才称之为数学思想。

第二节　数学方法的内容和范围

数学方法究竟应该包含哪些内容？目前似乎还没有一致的看法。徐利治先生将它分为宏观和微观两类。宏观的数学方法是指研究“数学发展规律”，这好像属于数学史与数学哲学范畴，所以大家讨论得不太多。微观的数学方法涉及研究工作者个人必须遵循的方法与法则的研究，因而有特定意义。近来看到的数学方法论著作

多属“微观”范畴。

那么微观的数学方法应包括哪些内容？看法上的差别也很大，有的强调逻辑推理方法，以公理法、集合论悖论、数学基础的三大流派为主线，有的强调化归、类比、归纳演绎、分析综合的科学方法论线索，有的则以逻辑思维、形象思维、灵感思维、经验思维等思维方法为特色。更多的则标明中学解题方法，以具体的解题技巧和思路为研究对象。

这么多的不同看法，引起了我们的深思。我们觉得，应当将所有的数学方法作一个总体的分析，将它们分成不同层次，判定不同类别，以便有一个系统性的认识。这样做，没有先例可以援引，只好自己去思考。以下是我们设计的一个数学方法论的框架，是否恰当，尚请方家批评指教。

我们的基本观点有以下一些：

1. 数学本身是一种方法，数学的各主要分支也都是一种方法。例如，极限方法、统计方法、拓扑方法、调和分析方法等。这种“大方法”很少著作涉及，应该加强研究。

2. 数学方法必须和科学方法有所区分，或者指出它的数学特点。如果只是一味讲分析综合、演绎归纳、类比联想、猜想证明等，把数学方法都“化归”到科学方法上去，那么数学方法论就变成科学方法的数学应用，数学方法岂不是太贫乏了吗？

3. 常用数学方法应当筛选，即从一个数学工作者应具备的素养出发，选择最基本的数学思想方法加以论述。如果过分倚重数学哲学，恐怕未必精当。例如，过分偏爱公理法中的非欧几何产生，集合论悖论中的三大主义，似乎没有必要。现在的不少数学方法论著作，大讲公理化方法，却不谈布尔巴基的结构主义数学观；介绍集合论悖论，却大肆渲染第三次数学危机，实在令人不解。“公理”“悖论”“三大数学哲学派别”不是不可介绍，只是人们更需要了解“公理化”方法的进一步发展，包括结构主义观点。“悖论”和“三大主义”是 20 世纪前 30 年的事，数学家现在已很少关心。至于“第三次数学危机”恐怕是数学史家和数学哲学家提出来的。今日的任何一名数学家，都不会感到有什么“危机”，因为数学正在健康地、一日千里地发展着。

4. 对形象思维、灵感思维、发散思维等思维过程的研究，似乎属心理学或思维科学领域。我们最好先把数学方法本身的事先弄清楚。因此，本书不涉及这类问题。

5. 数学解题方法是数学方法论研究的重要组织部分。波利亚的《怎样解题》等著作为我们作出了很好的榜样，摆在我们面前的任务是站在巨人的肩膀上向前看。

在此再说一次，我们向徐利治先生以及其他的数学方法论著作学习了很多东西；而最好的学习是思考，提出自己的见解。

第三节　数学方法的四个层次

根据上节中的基本观点，我们设想数学方法有以下四个层次：

第一，基本的和重大的数学思想方法，如模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法，等等，它们决定一个大的数学学科方向，乃是数学大厦的基石。我们感到，这些重大数学方法能和某个哲学范畴相联系。可以说，数学方法是一些哲学范畴的数量侧面。

第二，与一般科学方法相应的数学方法。类比联想、分析综合、归纳演绎等一般科学方法，在用于数学时具有它自己的特点。

第三，数学中的特有的方法，如数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换等方法。这些方法主要在数学中产生和适用（当然也可部分地迁移到其他学科），值得深入探讨。其中"关系、映射、反演"方法因徐利治先生的提倡，为大家所一致重视，理所当然。

第四，中学数学中的解题技巧，它的内容是初等数学，规律较为明确，又易于深入解剖，所以具有特殊的重要意义。此外，各种解题技巧内容十分丰富，变化无穷，要概括起来也相当难，本书第二篇作了一次尝试，试图体现出层次，给出基本原理、原则。

上述四个层次，从重大数学思想引申到具体数学技巧，各有特点和变化规律，我们将在以后各章和第二篇内逐步展开。

照理，我们还可以有第五个层次，即局部有用的特殊数学技巧。例如，因式分解中的十字相乘法，解二次方程中的配方法，几何中的尺规作图法，解析几何中确定直线的点斜式、两点式，等等。这些方法已经具体到与某个特定的数学知识相联结，没有广泛的意义，我们也就忽略不谈了。

本章小结：

数学思想方法是一个元概念。数学思想和数学方法之间互相联系又有区别。

数学思想方法，按照适用的范围，可以分为：与哲学范畴相适应的重大数学思想方法，各门学科共同使用的思想方法，数学特有的思想方法，中学数学解题方法。

第二章

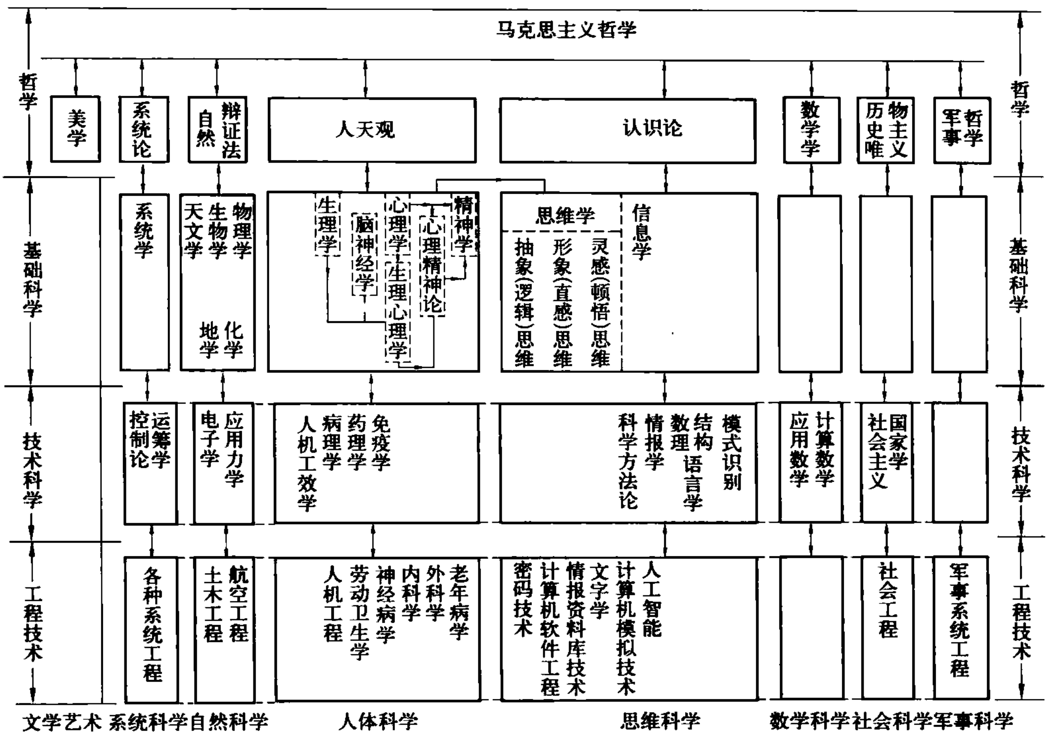
重大数学方法与哲学范畴

数学是人们认识世界和改造世界的有力工具，数学本身就是一种方法。在数学发展的历史上，我们可以看到，在一些重要的变革时期，一些伟大人物创造了一些重大的新的数学方法，成为一门数学新学科的开端，为学科的发展奠定了基础。例如，研究差商的极限方法，就成为微积分学的开端。

仔细分析一下数学学科，会发现它们都和某个哲学范围或某对基本矛盾相联系。例如，微积分方法处理运动与静止，概率方法研究偶然与必然，拓扑学描绘局部与整体，计算方法讨论近似与精确，等等。一般地说，重大的数学思想方法，都会反映某个哲学范畴或基本矛盾的数量方面。

对数学和哲学的关系，已有许多论述。这里引述钱学森的观点，他在《关于思维科学》的第 20 页中有一张表(表 2-1)，其中将数学与自然科学并列，不像通常的分类方法把数学看成自然科学的一部分。表中有一项称为"数学学"，我以为数学方法论是"数学学"的一部分，它和"自然辩证法"处于同一水平，都属于哲学范围。因此，数学方法论可以看成哲学的一个分支。

表 2-1



哲学是普遍适用于自然、社会和思维的基本规律和范畴的科学体系。其基本规律有"量与质的转化""对立统一"及"否定之否定",等等。哲学范畴是对事物、现象间普遍联系的概括和反映。基本范畴包括物质、意识,运动、静止,时间、空间,以及量变、质变,对立、统一、肯定、否定等。此外,还有形式与内容,现象与本质,必然和偶然,原因和结果等各对范畴。

作为哲学一部分的数学学,不可避免地会联系这些范畴来展开。另一方面,数学又有自己特别关注的范畴,如有限与无限,近似与精确,同一与差异,离散与连续,等等。它们都是客观事物运动过程呈现的数量方面的范畴或基本矛盾。

这一章,我们将研究重大数学思想方法与哲学范畴之间的关系。

第一节　数学方法·形式与内容

现实中任何一个事物都有形式和内容这两个侧面。一般来说，内容决定形式，而形式又积极地影响内容。

在形式与内容这一对范畴中，数学方法从数量方面揭示形式的多样性。可以说运动事物在数量上和空间上的形式，构成了数学研究的对象。

数学具有高度抽象性，毋庸置疑，但是它的抽象特点是什么？应该说是数学的形式化。这就是说，“为了要能够研究这些形式及其关系的纯粹情形，就必须完全把它们与其内容相分离，把内容暂置不管，当作无所可否的东西”①。苏联数学家辛钦(Хинчин)说，“一切数学学科的决定性特点总是某种形式化的方法”②。

数学抽象的另一个特点是研究思想材料。比如，世界上本来并没有“二次方程”这个实物。“二次方程”是人们研究数量关系产生出来的思想材料。没有人，就不会有自然数、函数和勾股定理。与此相对照的是，自然科学研究的是大自然本身，是客观存在的运动物质。

总之，数学的研究对象是形式化的思想材料，整个数学是一个形式化的思想体系。数学正因此而和自然科学有质的不同。

数学方法的重要性之一，在于它能为科学研究提供简明精确的形式化语言。一门学科使用数学的形式语言越多，表明这门学科越成熟。从早期的记数法到四则运算，创造了“＋”“－”“×”“÷”“＝”等符号语言。阿拉伯人的代数语言给出了方程式，二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 可以描绘行星运动及许多其他事物。牛顿(I. Newton)创立微积分，又发明了一套微分语言，用微分方程描述麦克斯韦(Maxwell)电磁场，最后又导致 $\varepsilon-\delta$ 语言的产生。今日的拓扑学，用一套同伦、同调的语言来表述。数理逻辑则是一套形式的符号语言。计算机的出现，又从数学借用

① 恩格斯:《反杜林论》。

② 张永春等:《苏日数学论文选》，第 141 页。

并发展出一套形式化的机器语言。

数学的形式化特点，并不是它没有内容，仅仅是一堆毫无意义的符号堆砌。数学的内容在于它能反映事物的数量变化规律。而且说到底，数学(作为一种形式)是否重要和有意义，仍是由它所反映的内容所决定的。反映得越深刻越准确，数学成果的价值就越大。数学有"好的数学"和"不太好的数学"，甚至"坏的数学"之分，其检验标准仍是由现实内容所规定的。现在全世界每年要发表几万篇数学论文，能够流传下来的为数很少。并不是这些论文的"证明"不严格，它的结论并不错，只是它的形式不能更好地表示内容，因而被冷落了，被扬弃了，或者被更好的数学形式所涵盖、替代了。

既然数学是一种数量的形式表示，就有一个形式阻碍内容发展还是促进内容发展的问题，对于一个人来说也是如此。假如一位中学生，学了很多数学形式，却不会用三角函数去描述周期运动，用对数去计算复利，用统计方法去解释为什么在评分时要"去掉最高分与最低分"，那么，数学形式的题目解得再多，一旦脱离了现实内容的需要，数学形式和内容脱节，人们就会感到数学枯燥且无用。

1993年，西南师范大学的陈重穆教授发表文章《淡化形式、注重实质》①。文章的主旨是批评过度的形式化，将生动活泼的数学内容淹没在形式演绎的海洋之中。这和欧美国家的数学教育理论中的"informal"提法相当一致。

另一方面，当代的科学技术提出了许多新的数学问题。例如，非线性问题，混沌与分形，低维拓扑，人工智能，计算机复杂性，等等。而我们不去适应发展着的内容，却做一些意义不大的推广和雕琢，形式也会脱离内容。

哲学告诉我们，形式与内容这一对矛盾中，内容是积极的，最活跃的，居第一位的；形式相对稳定，比较"保守"。当我们认识到数学是一种形式的时候，更应注意数学所反映的内容，以便积极地反映现实事物的数量发展，与此同时，也充实了数学自身的形式和内容。

总之，数学要形式化，但是不可局限于形式，不能搞"形式主义"。形式毕竟是为内容服务的。

① 陈重穆，宋乃庆：《淡化形式、注重实质》，《数学教育学报》，1993年第4期。