

有限元语言及其应用

梁国平 周永发 著



科学出版社

013028472

0241.82-39

78

有限元语言及其应用

梁国平 周永发 著



科学出版社

北京

0241.82-39

78



北航

C1634878

内 容 简 介

有限元语言是一种适用于有限元方法求解偏微分方程的模型语言. 采用有限元语言编程就是书写偏微分方程和算法, 然后由生成器产生全部 Fortran 语言的有限元程序. 本书的主要内容包括: 微分方程表达式、单物理场和多物理场耦合算法有限元描述语言; 元件化程序设计方法; 有限元数据结构; 有限元语言在固体力学、Navier-Stokes 方程、达西流、电磁场、结构力学和温度场问题中的具体应用; 形函数库、微分算子库、单物理场算法库等.

本书可作为高等院校计算数学、应用数学、计算机等理工类专业高年级本科生和研究生的参考教材, 也可供相关专业的工程和技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

有限元语言及其应用/梁国平, 周永发著. —北京: 科学出版社, 2013. 2
ISBN 978-7-03-036709-9
I. ①有… II. ①梁… ②周… III. ① 有限元法—程序设计 IV. ① O241.82-39
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 028497 号

责任编辑: 李 欣 赵彦超 / 责任校对: 宋玲玲 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 2 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2013 年 2 月第一次印刷 印张: 39 1/2

字数: 779 000

定价: 178.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书作为《有限元语言》一书的新版,在原书基础上增加了“应用篇”,书名已表明此意。有限元语言是一种采用有限元方法和有限体积法求解偏微分方程的模型语言,采用这种语言编写有限元和有限体积程序,其主要工作就是书写微分方程表达式及其有限元/有限体积算法,然后由该语言的生成器自动产生某种高级语言(如 Fortran, C 等)的有限元/有限体积计算程序。

采用有限元语言编程,其代码量比生成器产生的高级语言程序的代码量减少 90% 以上,因此能极大地提高编程效率。并且由于采用有限元语言编程,就是写微分方程表达式和算法,所以容易阅读、修改和维护。

有限元语言为应用有限元和有限体积法的广大工程师和科技人员免去了繁琐重复的编程劳动,从根本上解决了长期以来难以解决的软件再用性问题。

本书上篇有 5 章,第 1 章是微分方程表达式描述语言,给出有限元和有限体积法编写微分方程表达式的具体形式;第 2 章给出单物理场描述有限元算法的具体形式;第 3 章给出多场耦合有限元算法的编写方式;第 4 章为元件化程序设计方法及五个常用的元件程序;第 5 章给出有限元数据结构的描述方式。下篇共 6 章,分别就固体力学、Navier-Stokes 方程、达西流、电磁场问题、结构力学问题和温度场问题介绍了有限元语言的应用。书中所涉算例主要是为了说明有限元语言的具体应用,部分算例结果的正确性没有进行严谨细致的论证,仅供读者参考,算例的前后处理工作均在 FEPG.GID 平台上完成。本书的附录及符号表是阅读本书时不可忽略的部分,对了解基于有限元语言形成的有限元软件 FEPG 及其应用案例具有工具作用。

有限元语言及随之形成的数值模拟软件 FEPG 雏形形成至今已有二十多年的历史。现代仿真技术和计算机高性能技术相结合,促使软件 FEPG 已从最初只能用于单 CPU、无可视化前后处理功能的软件,发展成为可通过 Internet 使用、面向高性能计算机群的高性能仿真软件。

FEPG 的初期用户,已成为 FEPG 的“粉丝”和有限元程序自动生成技术发展的有力支持者甚至是参与者。囿于中国 CAE 产业的现状,有限元语言及软件 FEPG 的推广工作面临着巨大的挑战。值此书出版之际,望更多数值仿真行业的有识之士共同奋斗,打造出国有的有限元软件技术,助国家科技进步一臂之力。

梁国平

2012 年 10 月于北京

目 录

前言

绪论	1
----	---

上篇 语 言 篇

第 1 章 微分方程表达式描述语言	5
1.1 PDE 文件编写	5
1.1.1 DEFI 信息段	6
1.1.2 FUNC 信息段	10
1.1.3 STIF 信息段	11
1.1.4 MASS 信息段	12
1.1.5 DAMP 信息段	12
1.1.6 LOAD 信息段	13
1.1.7 插入 Fortran 源程序	13
1.1.8 例题	17
1.2 CDE 文件编写	18
1.2.1 DEFI 信息段	18
1.2.2 FUNC 信息段	20
1.2.3 STIF 信息段	21
1.2.4 MASS 信息段	21
1.2.5 DAMP 信息段	22
1.2.6 LOAD 信息段	23
1.2.7 插入 Fortran 源程序	23
1.2.8 例题	24
1.3 VDE 文件编写	25
1.3.1 向量和矩阵说明语句	25
1.3.2 ARRAY 说明语句	26
1.3.3 张量运算表达式	26
1.3.4 例题	28
1.4 FDE 文件编写	31

1.4.1	FDE 文件编写形式	31
1.4.2	FVECT 与 FMATR 语句	31
1.4.3	@l 算子语句	32
1.4.4	常用 @l 算子库	32
1.4.5	@a 算子语句	34
1.4.6	@w 算子语句	35
1.4.7	@s 算子语句	35
1.4.8	@r 算子语句	35
1.4.9	例题	36
1.5	FBC 文件编写	37
1.6	GES 文件编写	37
1.6.1	GES 文件结构	38
1.6.2	GES 文件编写规则	39
1.6.3	例题	57
1.6.4	单元子程序	58
1.7	GLT 文件编写	60
1.7.1	DEFI 信息段	60
1.7.2	VART 信息段	62
1.7.3	插入 Fortran 源程序	62
1.8	有限体积法程序编写	63
1.8.1	GVS 文件结构	64
1.8.2	GVS 文件编写规则	65
1.8.3	FVS 文件编写规则	67
1.8.4	有限体积程序基本流程	69
1.8.5	例题	70
1.8.6	几种类型单元 FVS 文件	78
第 2 章	单物理场算法描述语言	94
2.1	NFE 文件结构	94
2.2	NFE 文件编写规则	95
2.2.1	DEFI 信息段	95
2.2.2	COEF 信息段	96
2.2.3	EQUATION 信息段	96
2.2.4	SOLUTION 信息段	99
2.2.5	插入 Fortran 源程序	100
2.2.6	END 结束符	100

2.3	NFE 算法库	101
2.3.1	ell.nfe	101
2.3.2	nell.nfe	102
2.3.3	parb.nfe	104
2.3.4	par.nfe	105
2.3.5	nparb.nfe	105
2.3.6	npar.nfe	108
2.3.7	wave.nfe	110
2.3.8	wavev.nfe	111
2.3.9	newmark.nfe	112
2.3.10	waveexp.nfe	114
2.3.11	nwave.nfe	115
2.3.12	nnewmark.nfe	118
2.3.13	nwaveexp.nfe	120
2.3.14	str.nfe	121
2.3.15	nstr.nfe	122
2.3.16	hypls.nfe	122
2.3.17	cbsexp.nfe	124
第 3 章	多场耦合有限元算法描述语言	125
3.1	GCN 文件编写	125
3.1.1	编写方式	125
3.1.2	举例说明	126
3.2	GCN 库	127
3.3	MDI 文件编写	127
3.3.1	编写方式	127
3.3.2	举例说明	128
第 4 章	元件化程序设计方法	130
4.1	有限元程序结构与元件化程序设计方法	130
4.1.1	程序结构	130
4.1.2	元件化程序设计方法	131
4.2	五个元件程序	136
4.2.1	START 元件程序	137
4.2.2	BFT 元件程序	145
4.2.3	E 元件程序	152
4.2.4	SOLV 求解器	165

4.2.5 U 元件程序	188
第 5 章 有限元数据结构	194
5.1 有限元计算输入数据组成简述	194
5.1.1 输入数据形式	194
5.1.2 表格文件读写格式	194
5.2 单场问题有限元输入数据	195
5.2.1 坐标数据表格	195
5.2.2 节点规格数表格	195
5.2.3 指定节点位移和节点载荷信息表格	196
5.2.4 初始值表格	196
5.2.5 单元信息数据	197
5.3 有限元输入数据显示和查询	198
5.4 PRE 文件	198
5.4.1 线性稳态例子	199
5.4.2 非线性瞬态例子	202
5.4.3 多场耦合例子	209
5.4.4 PRE 文件自动编写与修改	216
5.5 计算结果图形显示 POS 文件	217

下篇 应 用 篇

第 6 章 固体力学	221
6.1 线弹性小变形	221
6.1.1 静态问题有限元语言程序	221
6.1.2 时间离散采用速度法格式波动问题有限元语言程序	233
6.1.3 时间离散采用 Newmark 格式波动问题有限元语言程序	244
6.2 弹塑性小变形	256
6.2.1 静态问题位移作为求解未知量的有限元语言程序	256
6.2.2 静态问题位移和 λ 联立求解的有限元语言程序	282
6.2.3 采用非关联流动法则理论文本	298
6.3 线性黏弹性小变形	300
6.3.1 GCN 文件	300
6.3.2 MDI 文件	300
6.3.3 位移计算程序	301
6.3.4 应力计算程序	308

6.4	线弹性有限变形	316
6.4.1	GCN 文件	316
6.4.2	MDI 文件	317
6.4.3	位移计算程序	317
6.4.4	应力计算程序	324
6.5	刚塑性	334
6.5.1	稳态问题有限元语言程序	334
6.5.2	动态问题有限元语言程序	345
第 7 章	Navier-Stokes 方程	358
7.1	稳态混合有限元语言程序	359
7.1.1	GCN 文件	359
7.1.2	MDI 文件	359
7.1.3	速度和压力计算程序	359
7.2	稳态有限体积法语言程序	365
7.2.1	GCN 文件	365
7.2.2	MDI 文件	366
7.2.3	速度和压力计算程序	366
7.3	瞬态算子分裂法	374
7.3.1	最小二乘法有限元语言程序	374
7.3.2	CBS 方法有限元语言程序	388
第 8 章	达西流	398
8.1	无压渗流问题有限元语言程序	398
8.1.1	GCN 文件	398
8.1.2	MDI 文件	398
8.1.3	水头计算程序	399
8.1.4	压力计算程序	402
8.2	油水两相渗流问题有限元语言程序	408
8.2.1	黑油模型油水两相基本方程	408
8.2.2	求解算法流程	409
8.2.3	GCN 文件	410
8.2.4	MDI 文件	410
8.2.5	油相压力计算程序	411
8.2.6	饱和度计算程序	415
8.2.7	束缚水和残留油处理	425

第 9 章 电磁场	434
9.1 二维电磁场	434
9.1.1 电流场	434
9.1.2 磁场	446
9.1.3 时谐场	459
9.2 三维电磁场	474
9.2.1 静态场	474
9.2.2 时谐场	492
第 10 章 结构力学	511
10.1 桁架结构	511
10.1.1 二维问题有限元语言程序	511
10.1.2 三维问题有限元语言程序	516
10.2 梁结构	522
10.2.1 二维问题有限元语言程序	522
10.2.2 三维问题有限元语言程序	528
10.3 板壳结构	535
10.3.1 二维 Adini 板单元有限元语言程序	536
10.3.2 三维 Adini 板单元有限元语言程序	540
10.3.3 二维 Mindlin 板单元有限元语言程序	549
10.3.4 三维 Mindlin 板单元有限元语言程序	554
10.4 空间梁板组合结构有限元语言程序	563
10.4.1 GCN 文件	563
10.4.2 MDI 文件	563
10.4.3 位移与转角计算程序	564
10.4.4 组合结构 structure 文件	564
第 11 章 温度场	566
11.1 稳态问题有限元语言程序	566
11.1.1 GCN 文件	566
11.1.2 MDI 文件	566
11.1.3 温度计算程序	567
11.1.4 热流计算程序	569
11.2 瞬态问题有限元语言程序	572
11.2.1 GCN 文件	572
11.2.2 MDI 文件	573
11.2.3 温度计算程序	573

11.2.4 热流计算程序	576
附录 A 插值函数与单元类型	580
A.1 一维 Lagrange 单元	580
A.1.1 一维线性单元	580
A.1.2 一维二次单元	581
A.2 二维 Lagrange 单元	582
A.2.1 4 节点矩形单元	582
A.2.2 9 节点矩形单元	583
A.2.3 8 节点矩形单元	585
A.2.4 3 节点三角形单元	585
A.2.5 6 节点三角形单元	586
A.3 三维 Lagrange 单元	587
A.3.1 8 节点六面体单元	588
A.3.2 27 节点六面体单元	588
A.3.3 20 节点六面体单元	590
A.3.4 4 节点四面体单元	591
A.3.5 10 节点四面体单元	591
A.3.6 6 节点三棱柱单元	592
附录 B 等参单元	594
B.1 自然坐标为直角坐标积分变换	597
B.2 自然坐标为面积坐标积分变换	599
附录 C 数值积分	601
C.1 高斯积分	601
C.2 节点积分	603
附录 D 有限元语言术语总汇	606
附录 E 有限元语言关键字总汇	608
附录 F 符号表	612
参考文献	616
索引	617

绪 论

20 世纪 50 年代, 美国结构力学家发明了有限元方法, 其主要原理是基于变分法和分片低阶插值多项式, 随着近几十年有限元方法应用不断扩展, 这两项基本原理已不能满足应用的需要, 它们分别改进为基于偏微分方程弱解形式和任意逼近函数空间.

在物理学和工程中, 偏微分方程边值问题一般可表示如下:

在求解域 Ω 内满足偏微分方程

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\Omega) \quad (0.1)$$

在边界 $\partial\Omega$ 上满足边值条件

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\partial\Omega) \quad (0.2)$$

其中 A 和 B 为微分算子, u 为未知函数.

这些偏微分方程一般是没有理论解的, 通常需要采用数值方法来求解. 有限元方法是一种求解偏微分方程的数值方法, 它实际上求解的是偏微分方程的弱解形式.

对偏微分方程 (0.1) 乘以检验函数 δu 并在 Ω 上积分得

$$\int_{\Omega} A^T(u) \delta u d\Omega = \int_{\Omega} A_i(u) \delta u d\Omega = 0 \quad (0.3)$$

其中 δu 为任意函数.

假如 $A(u)$ 是一光滑函数, 若积分方程 (0.3) 对于任意 δu 都能成立, 则偏微分方程 (0.1) 必然在域 Ω 内任一点都能得到满足, 因为假如 $A(u)$ 在域 Ω 内某些点或部分子域中不满足, 即出现 $A(u) \neq 0$, 马上可以找到适当的函数 δu , 使 (0.3) 式的积分形式亦不等于零, 可见当 $A(u)$ 是一光滑函数时, 式 (0.1) 和 (0.3) 是等价的. 但在很多情况下, 比如三维时谐电磁场问题中, 两者并不等价, 可以对 (0.3) 式进行分部积分并利用边值条件 (0.2) 得到另一种形式

$$\int_{\Omega} D^T(u) C(\delta u) d\Omega + \int_{\partial\Omega} F^T(u) E(\delta u) dS = 0 \quad (0.4)$$

其中 C, D, E, F 是微分算子, 它们中所包含的未知函数导数的阶数可能较 (0.1) 式的微分算子 A 低, 这样对函数 u 只要求较低阶连续性就可以了, 称式 (0.4) 是微分方程 (0.1) 和边界条件 (0.2) 的弱形式, 弱形式 (0.4) 也有可能采用 Petrov-Galerkin 方法获得.

把有限元近似解 u 写成

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (0.5)$$

把变分变量 (即虚变量) 写成

$$\delta u = \sum_{i=1}^n N_i \delta u_i \quad (0.6)$$

其中 u_i 为待求解的未知变量, δu_i 为对应 u_i 的虚变量, 其中 N_i 为基函数, 有限元空间将由基函数 $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 组成.

把 (0.5) 和 (0.6) 代入 (0.3) 式, 则由虚变量 δu_i 的任意选取而获得 u 的有限维代数方程组, 从而把偏微分方程组的求解化归为求解有限维代数方程组问题.

由 (0.5) 和 (0.6) 式可以看出近似解空间与检验函数空间取相同的基函数, 本书一般不考虑它们分别采用不同基函数的方法.

上篇 语 言 篇

第 1 章 微分方程表达式描述语言

微分方程的描述是有限元语言一个重要的基本内容, 本语言采用一个以 PDE 为扩展名的文件描述基于弱解形式的微分方程表达式, 简称为 PDE 文件. 由这个文件, 单元子程序自动生成系统自动生成计算单元刚度矩阵、单元阻尼矩阵和单元载荷向量等的单元子程序.

GES 文件是最基础最底层的文件, 该文件给出有限元方法的全部公式, 如形函数、数值积分等公式. 其他文件都要先生成该文件, 然后再由该文件生成单元子程序. PDE 文件可通过公式库取得形函数及数值积分的公式, 避免了这些公式的编写.

CDE、VDE 和 FDE 文件是为了节省用户在编写偏微分方程表达式时所花费的时间而设计的, CDE 文件的主要内容是复变量微分方程表达式, VDE 文件的主要内容是微分方程张量表达式, FDE 文件是可以利用算子公式库与算子表达式的微分方程张量表达式文件.

FBC 文件的主要内容是边值条件 (第二类和第三类边值条件) 的微分方程表达式, 由这个文件, 单元子程序自动生成系统自动生成计算边值条件的单元刚度矩阵、阻尼矩阵和载荷向量等子程序, 当问题有第二类或第三类边值条件时编写这种文件. 下面分节介绍这些文件的编写.

1.1 PDE 文件编写

PDE 文件的主要内容是编写微分方程表达式, 由此文件自动生成计算单元刚度矩阵、单元质量矩阵、单元阻尼矩阵和单元载荷向量等单元子程序. PDE 文件结构如下:

(1) 用户最多需编写 6 段信息, 它们分别以 DEFI, FUNC, STIF, MASS, DAMP, LOAD 为信息段关键字, 用户可根据不同情况, 按上述顺序依次编写各段信息.

本语言规定每一段信息 (以下简称信息段) 均以它的关键字开头, 以空行结束, 所有信息段编写完毕后, 还需编写结束字 END 以表示结束.

(2) 本语言允许用户插入自己编写的 Fortran 源程序, 即以 “\$C6”, “\$C0” 和 “\$CV” 字符引导的方式在指定的某些信息段内插入. 本语言另外还允许用户在结束字 END 之后附加 Fortran 源程序, 即以关键字 FORT 开头, 下面信息便是 Fortran 源程序. 关于插入与附加 Fortran 源程序的方式, 将在以后的章节专门讲述.

(3) 本语言规定字符 “\”(反斜杠) 表示续行号, 续行号 “\” 后面的字符将被本语言跳过, 下一行将为本行的续行, 因此反斜杠 “\” 又可作注解行用, 用户可以在 PDE 文件中任意位置加注解行, 此行首字符是 “\”。

下面将逐节讲述各个信息段的编写方式, 每节后面均附有该信息段的编写例子说明, 将在 1.1.8 节中以泊松 (Poisson) 方程为例, 具体说明如何编写一个实际问题的 PDE 文件。

1.1.1 DEFI 信息段

PDE 文件的 DEFI 信息段最多需要 10 行信息, 它的一般方式如下:

DISP = 未知函数名, 未知函数名, ..., 未知函数名

COOR = 坐标变量名, 坐标变量名, ..., 坐标变量名

COEF = 非线性系数函数名, 非线性系数函数名, ..., 非线性系数函数名

FUNC = 自定义函数名, 自定义函数名, ..., 自定义函数名

MATE = 材料参数名, ..., 材料参数名, 材料参数缺省值, ..., 材料参数缺省值

SHAP = 单元几何形状类型符, 单元节点数

GAUS = 单元几何形状类型符或高斯积分点数

MASS = 单元几何形状类型符, 质量密度

DAMP = 单元几何形状类型符, 阻尼系数

LOAD = 表达式, 表达式, ..., 表达式

函数名、变量名和材料参数名可由用户自由定义, 下面分别讲述各行编写的信息及其含义。DISP 右边空一格 (或等号) 后编写需要求解的微分方程未知函数名, 可以有任意多个未知函数名, 每个未知函数名对应一个未知函数, 各未知函数名之间用空格、逗号或分号隔开。COOR 右边空一格 (或等号) 后编写坐标变量名, 可以有任意多个, 每个坐标变量名对应一个坐标变量。坐标变量名之间用空格、逗号或分号隔开。

COEF 右边空一格 (或等号) 后编写系数变量名, 可以有任意多个, 每个系数变量名之间用空格、逗号或分号隔开。它们分别对应微分方程中的一个变系数, 如果没有系数变量, 则此行不编写, 例如对非线性问题或者耦合问题, 需要编写此行。

FUNC 右边空一格 (或等号) 后编写用户自己定义的函数名, 可以定义任意多个函数, 每个函数名对应一个用户自定义函数, 各函数名之间用空格、逗号或分号隔开。本语言提供函数代换功能, 此行信息用于定义函数名字, 后面必须有 FUNC 信息段与之对应, 在那里具体定义各函数名下的函数表达式, 它之后的各信息段中相同的表达式均可以用相应的自定义函数名来代替, 这样做的好处是可以使过分繁冗复杂的信息编写变得简洁, 便于阅读和修改。注意, 该 FUNC 行信息必须与后面的 FUNC 信息段配合使用, 它们的关键字虽然一样, 但是该 FUNC 行信息只是