北京邮电大学数学系◎编

GaoDengShuXue

高等数学

（下册）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学(下册)

北京邮电大学数学系　编

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内容提要

本书根据高等数学课程教学基本要求，结合“把数学建模思想融入到数学课程中”的基本思想及作者多年的教学实践编写而成。

本书在内容取材上兼顾到与高中新课标数学课程的衔接，注重数学思想和方法，增加了 Mathematica 数学软件的介绍。在例题和习题中尽可能反映数学建模的方法。本书分上、下两册，下册包括多元微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、Mathematica 软件介绍等。

本书可作为高等院校理工科非数学专业的高等数学教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/北京邮电大学数学系编. --北京：北京邮电大学出版社，2012. 7

ISBN 978-7-5635-2904-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①北… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 016476 号

书　　名：高等数学(下册)

责任著作者：北京邮电大学数学系

责 任 编 辑：赵玉山　张国申

出 版 发 行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：17

字　　数：366 千字

印　　数：1—3 000 册

版　　次：2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2904-9　　定　价：34.00 元

前　　言

“高等数学”是高等工科院校最重要的基础课程之一，它最主要的任务除了使学生具备学习后续数学课程所需要的基本数学知识外，还有提高学生应用数学工具解决实际问题的能力。目前，北京市乃至全国各高校都在积极参与“把数学建模的方法和思想融入到数学课程中”的课题研究，我们在此方面也做了大量的工作，学校给予了极大的支持。

由于高中新课标的实行，如何将“高等数学”教学和高中数学内容较好地衔接起来也是各高校重点考虑的内容。基于以上考虑，我们编写的这套《高等数学》具有以下特点：

1. 注重数学建模思想，减少理论性太强的内容；

2. 结合高中内容，增加了极坐标等内容，减弱了导数、极限的简单计算；

3. 选配应用性的例题与习题，注重与后续课程的衔接；

4. 增加了“数学实验”内容，介绍数学软件的应用，使学生对函数的图像、近似计算等在直观上有初步了解，帮助理解一些概念和性质。

参加本书编写的有丁金扣（第一、第二章）、马利文（第三、第四、第五章）、李鹤（第六、第七章）、刘宝生（第八、第九、第十、第十一章）。在本书的编写过程中，得到了北京邮电大学数学系老师的无私帮助并提出了宝贵意见。北京邮电大学教务处对本书的编写给予了大力支持，在此我们表示衷心地谢意。

编者

2012 年 7 月

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用 ········· 1

第一节　多元函数的基本概念 ········· 1

一、平面点集与 n 维空间 ········· 1

二、多元函数的概念 ········· 3

三、多元函数的极限 ········· 5

四、多元函数的连续性 ········· 7

习题 7-1 ········· 9

第二节　偏导数 ········· 9

一、偏导数的定义及其计算 ········· 10

二、高阶偏导数 ········· 12

习题 7-2 ········· 14

第三节　全微分 ········· 15

一、全微分的概念 ········· 15

二、可微分、可偏导和连续的关系 ········· 16

三、全微分在近似计算中的应用 ········· 19

习题 7-3 ········· 20

第四节　多元复合函数的求导法则 ········· 20

一、多元复合函数的链式求导法则 ········· 21

二、一阶全微分形式不变性 ········· 26

习题 7-4 ········· 27

第五节　隐函数的求导公式 ········· 28

一、一个方程的情形 ········· 28

二、方程组的情形 ········· 31

习题 7-5 …… 34
第六节　多元函数微分学的几何应用 …… 35
一、空间曲线的切线与法平面 …… 35
二、曲面的切平面与法线 …… 38
习题 7-6 …… 41
第七节　方向导数和梯度 …… 42
一、方向导数 …… 42
二、梯度 …… 46
习题 7-7 …… 49
第八节　多元函数的极值及其求法 …… 50
一、多元函数的极值及最值 …… 51
二、条件极值与拉格朗日乘数法 …… 54
习题 7-8 …… 57
总习题七 …… 58

第八章　重积分 …… 61

第一节　二重积分的概念与性质 …… 61
一、二重积分的概念 …… 61
二、二重积分的性质 …… 63
习题 8-1 …… 66
第二节　二重积分的计算法 …… 67
一、利用直角坐标计算二重积分 …… 67
二、利用极坐标计算二重积分 …… 71
*三、二重积分的换元法 …… 74
习题 8-2 …… 78
第三节　三重积分 …… 80
一、三重积分的概念 …… 80
二、三重积分的计算法 …… 81
习题 8-3 …… 87
第四节　重积分的应用 …… 89
一、曲面的面积 …… 89
二、质心 …… 91
三、转动惯量 …… 92

四、引力 …… 94
习题 8-4 …… 95
*第五节　含参变量的积分 …… 95
*习题 8-5 …… 99
总习题八 …… 100

第九章　曲线积分与曲面积分 …… 102

第一节　弧长的曲线积分 …… 102
一、弧长曲线积分的概念与性质 …… 102
二、对弧长曲线积分的计算法 …… 103
习题 9-1 …… 107
第二节　对坐标的曲线积分 …… 108
一、对坐标曲线积分的概念 …… 108
二、对坐标曲线积分的计算法 …… 110
三、两类曲线积分之间的联系 …… 113
习题 9-2 …… 115
第三节　格林公式及其应用 …… 116
一、格林公式 …… 116
二、平面曲线积分与路径无关的条件 …… 121
习题 9-3 …… 128
第四节　对面积的曲面积分 …… 129
一、对面积的曲面积分的概念 …… 129
二、对面积曲面积分的计算法 …… 130
习题 9-4 …… 132
第五节　对坐标的曲面积分 …… 133
一、对坐标曲面积分的概念及性质 …… 133
二、对坐标曲面积分的计算法 …… 136
三、两类曲面积分的联系 …… 139
习题 9-5 …… 140
第六节　高斯公式、通量与散度 …… 141
一、高斯公式 …… 141
二、通量与散度 …… 147
习题 9-6 …… 148

第七节　斯托克斯公式、环流量与旋度 …… 150

一、斯托克斯公式 …… 150

* 二、空间曲线积分与路径无关的条件 …… 153

三、环流量与旋度 …… 156

* 四、算子∇ …… 157

习题 9-7 …… 157

总习题九 …… 158

第十章　无穷级数 …… 160

第一节　常数项级数的概念与性质 …… 160

一、常数项级数的概念 …… 160

二、收敛级数的基本性质 …… 161

习题 10-1 …… 164

第二节　常数项级数的审敛法 …… 165

一、正项级数及其审敛法 …… 165

二、任意项级数及其审敛法 …… 171

三、绝对收敛与条件收敛 …… 174

习题 10-2 …… 177

第三节　幂级数 …… 178

一、函数项级数 …… 178

二、幂级数的收敛半径及收敛域 …… 179

三、幂级数的运算 …… 183

习题 10-3 …… 188

第四节　函数的幂级数展开 …… 189

一、泰勒级数 …… 189

二、泰勒级数的应用 …… 195

习题 10-4 …… 197

第五节　傅里叶级数 …… 198

一、三角级数及三角函数系的正交性 …… 198

二、函数展开成傅里叶级数 …… 200

三、正弦级数和余弦级数 …… 207

习题 10-5 …… 210

总习题十 …… 211

第十一章　Mathematica 软件介绍 …… 213

第一节　Mathematica 的基本操作及语法初步 …… 213
第二节　Mathematica 中的数、运算符、变量和函数 …… 216
一、数与运算符 …… 216
二、变量 …… 217
三、函数 …… 218
第三节　Mathematica 中的微积分 …… 222
一、求极限 …… 222
二、求导数或偏导数、全微分 …… 223
三、求积分及重积分 …… 224
四、无穷级数 …… 226
五、常微分方程 …… 227
第四节　图形 …… 228
一、二维图形 …… 228
二、三维图形 …… 233
总习题十一 …… 243

部分习题答案与提示 …… 244

习题 7-1 …… 244
习题 7-2 …… 244
习题 7-3 …… 245
习题 7-4 …… 245
习题 7-5 …… 246
习题 7-6 …… 247
习题 7-7 …… 248
习题 7-8 …… 248
总习题七 …… 249
习题 8-1 …… 249
习题 8-2 …… 249
习题 8-3 …… 250
习题 8-4 …… 251
* 习题 8-5 …… 251

总习题八 …… 252
习题 9-1 …… 253
习题 9-2 …… 253
习题 9-3 …… 254
习题 9-4 …… 254
习题 9-5 …… 254
习题 9-6 …… 255
习题 9-7 …… 255
总习题九 …… 255
习题 10-1 …… 256
习题 10-2 …… 256
习题 10-3 …… 257
习题 10-4 …… 257
习题 10-5 …… 258
总习题十 …… 259

第七章　多元函数微分法及其应用

只有一个自变量的函数是一元函数.然而,在很多实际问题中,经常会遇到一个变量依赖多个自变量的情形.这就提出了多元函数及多元函数微积分问题.创立多元函数微积分是18世纪数学最伟大的成果之一,有着更为丰富多彩的应用.多元函数微积分是在一元函数微积分基础上发展起来的,在许多方面与一元函数具有形式一致性,但又有许多本质的不同.

本章讨论多元函数微分法及其应用.

第一节　多元函数的基本概念

一、平面点集与 n 维空间

为了给出多元函数的概念,先介绍有关多维空间中点集的一些基本知识.我们首先引入平面点集的一些基本概念,将有关概念从 $\mathbf{R}^1$ 中的情形推广到 $\mathbf{R}^2$ 中;然后引入 n 维空间,以便推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中.

1. 平面点集

由平面解析几何知,引入了平面直角坐标系后,平面上的点 P 和二元有序实数组 (x,y) 之间建立了一一对应的关系.这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.可用 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,即二元有序实数组 (x,y) 的全体表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 Q 的点的集合,称为平面点集,记作 $E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{具有性质}Q\}$.

现在来引入 $\mathbf{R}^2$ 中邻域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体称为点 P_0 的 δ 邻域,记作 $U(P_0,\delta)$,即 $U(P_0,\delta)=\{P\mid|PP_0|<\delta\}$,也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

点 P_0 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$.

在几何上,$U(P_0,\delta)$就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为圆心,$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$全体.

如果不强调邻域的半径,则用 $U(P_0)$及$\mathring{U}(P_0)$分别表示点 P_0 的某个邻域及某个去心邻域.

下面利用邻域描述点和点集之间的关系.

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种:

(1) 内点:若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的内点;

(2) 外点:若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 E 的外点;

(3) 边界点:若点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点.

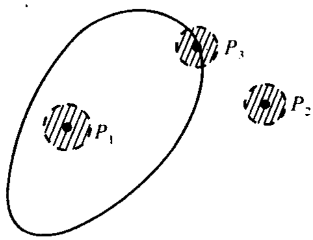

图 7-1

在图 7-1 中,P_1 为 E 的内点,P_2 为 E 的外点,P_3 为 E 的边界点.

E 的边界点的全体称为 E 的边界,记作∂E.

由上述定义及图 7-1 可知,E 的内点必属于 E;E 的外点必不属于 E;E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E.

任意一点 P 与一个点集 E 之间除了上述三种关系之外,还有另外的关系形式,即下面定义的聚点和孤立点.

聚点:若对任意给定的 $\delta>0$,点 P 的去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$内总有 E 中的点,则称 P 是 E 的聚点.

孤立点:若存在 $\delta>0$,使得 $U(P,\delta)\cap E=\{P\}$,则称 P 是 E 的孤立点.

点集 E 的孤立点一定属于 E. 点集 E 的聚点 P 本身可以属于 E,也可以不属于 E. 且 E 的聚点应由内点和非孤立边界点构成.

例如,设平面点集 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点(x,y)都是 E 的内点;满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点(x,y)都是 E 的边界点,它们都不属于 E;满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点(x,y)也是 E 的边界点,它们都属于 E;点集 E 以及它边界∂E 上一切点都是 E 的聚点.

根据点集所属点的特征,再来定义一些重要的平面点集.

开集:若点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

闭集:若点集 E 的余集 E^C 为开集,则称 E 为闭集.

有界集:对于平面点集 E,若存在某一正数 r,使得 $E\subset U(O,r)$,其中 O 是坐标原点,则称 E 为有界集.

无界集:一个集合若不是有界集,则称为无界集.

例如,集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$是有界开集;集合$\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$是无界闭集;集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$有界既非开集也非闭集.

可见，一个集合的有界性和闭性不是一对等价的概念.

连通集：若点集 E 内任何两点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

区域(或开区域)：连通的开集称为区域或开区域.

闭区域：开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是有界开区域；集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 0\}$ 是无界闭区域.

2. n 维空间

设 n 为取定的一个自然数，用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成集合，即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

为了在集合 $\mathbf{R}^n$ 中元素之间建立联系，在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算如下：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$$

称定义线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离记作 $\rho(x,y)$，规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

$\mathbf{R}^n$ 中元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 θ 之间的距离 $\rho(x,\theta)$ 记作 $\|x\|$，即

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$\mathbf{R}^n$ 中线性运算和距离的引入使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念可以方便地引入到 $n(n\geqslant 3)$ 维空间中，例如，设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，则 n 维空间内的点集 $U(a,\delta)=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\rho(x,a)<\delta\}$ 定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 a 的 δ 邻域. 以邻域为基础，可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点、孤立点，以及开集、闭集、区域等一系列概念.

二、多元函数的概念

在现实世界中，很多物理量都依赖两个或多个变量，如地球上任何一点的温度 T 依赖这点所在经度 x 和纬度 y；一定量的理想气体的压强 P 依赖体积 V 和绝对温度 T. 下面再举几例.

例 1　长方形的面积 A 和它的长 x、宽 y 之间的关系为

$$A=xy$$

这里，当 x,y 在集合 $\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 内取定一对值 (x,y) 时，A 的对应值随之确定.

例 2　设 R 是电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻，由电学知识得

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

当 R_1,R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时,R 的对应值就随之确定.

抽出上述二例共性可以给出二元函数的定义.

定义 1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数,通常记为 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 或 $z=f(P),P\in D$,其中点集 D 为该函数定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量.

记 $f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为函数 f 的值域,其中 $f(x,y)$ 称为 f 在点 (x,y) 处的函数值.

与一元函数情形相仿,记号 f 与 $f(x,y)$ 的意义有区别,但习惯上常用记号"$f(x,y),(x,y)\in D$"或"$z=f(x,y),(x,y)\in D$"表示 D 上的二元函数 f,表示二元函数的记号 f 也可以任意选取,例如也可记为 $z=\varphi(x,y),z=z(x,y)$ 等.

若将上述定义中平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集 D,则可以类似定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$,或 $u=f(P),P\in D$.

当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数;当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

多元函数的定义域与一元函数相类似,约定:在一般讨论用算式表达的多元函数 $u=f(x,y)$ 时,就以使这算式有意义的变元 (x,y) 的值所构点集为多元函数的自然定义域.有时这类定义域不再特别标出.

例 3 写出下列函数的定义域:

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;　　(2) $z=\ln(y^2-4x+8)$.

解 (1) 定义域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,如图 7-2 所示,是有界开区域;

(2) 定义域 $D_2=\{(x,y)\mid y^2-4x+8>0\}$,如图 7-3 所示,是无界开区域.

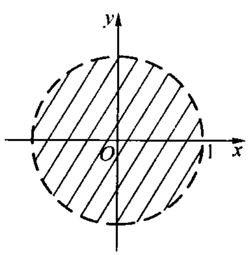

图 7-2

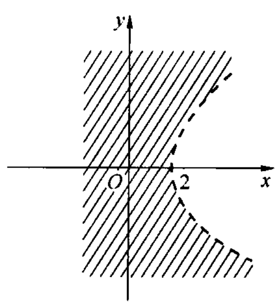

图 7-3

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为

$z=f(x,y)$，其几何意义是以 x 为横坐标，y 为纵坐标，$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上点时，得空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形（见图 7-4）. 通常称二元函数图形是一张曲面，且此曲面在 xOy 面上投影区域就是函数的定义域 D.

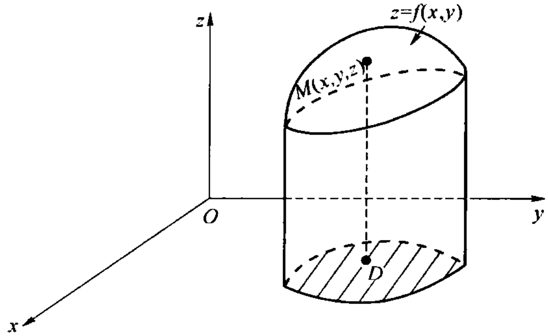

图 7-4

三、多元函数的极限

下面给出多元函数极限的概念，它是研究多元函数微积分的基础与工具. 二元函数自变量的变化方式可以有许多种情况，仅以 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时为例来讨论. 即若 $P(x,y)$ 在无限接近 $P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，称 A 是 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限.

下面用 ε-δ 语言描述极限概念. 约定 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 可以表示成 $\begin{matrix}x\to x_0\\ y\to y_0\end{matrix}$ 或 $P\to P_0$，也等价于 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$.

定义 2　设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 若存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，也记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $f(P)\to A(P\to P_0)$.

如此定义的极限称为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的二重极限.

例 4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证　函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{0,0\}$，点 $O(0,0)$ 是 D 的聚点.

$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon$$

成立,只须取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$,当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

虽然二元函数极限与一元函数极限从定义叙述上并无多大差异,但本质上,二元函数极限比一元函数极限复杂得多.在一元函数极限中 $x\to x_0$ 表示 x 从 x_0 左右两侧趋于 x_0 的函数趋于同一值,而二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 意味着当点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的值都应趋于 A.因此若当 $P(x,y)$ 以某种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 无极限,则可判定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在;若当 $P(x,y)$ 以不同的方式(如沿不同的曲线)趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时.函数 $f(x,y)$ 趋于不同的值,则也可判定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在.

类似可定义 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty}}f(x,y)$,$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x,y)$,…,以及三元以上函数的极限.

例 5 考察下列函数在点 $O(0,0)$ 处的极限:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解 (1)当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2k}{1+k^2}=\frac{2k}{1+k^2}$$

由于当 k 不同时,此极限值也不同,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在;

(2) 当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^4+x^2}=0$$

当点 (x,y) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

此极限值不相等,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

多元函数极限的运算法则与一元函数极限的运算法则类似,如关于极限的四则运算、不等式、夹逼定理等都可以平移到多元函数.

例 6 证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{2xy}\right|=\dfrac{|x|}{2}$,又

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{|x|}{2}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{2}=0$$

根据夹逼定理,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$$

例 7　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

解　令 $t=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x\to0,y\to0\Leftrightarrow t\to0$，故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}.$$

四、多元函数的连续性

借助二元函数极限的概念就可以定义二元函数连续性.

定义 3　设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是区域 D 上的连续函数.

定义 4　设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

以上关于二元函数的连续性概念可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$.

例 8　讨论下列各函数在(0,0)处的连续性.

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$；

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2-y^2}, & x\neq y,\\ 0, & x=y;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x(y^2+1)}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) 因 $f(x,y)$ 在(0,0)无定义，故 $f(x,y)$ 在(0,0)不连续.

(2) 因 $f(0,0)=0$，又选沿 $y=kx(k\neq0,1)$ 趋向(0,0)，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\\(k\neq0,1)}}\frac{xy}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1-k^2)x^2}=\frac{k}{1-k^2}，与 k 有关.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，即 $f(x,y)$ 在(0,0)不连续.

(3) $f(0,0)=0$，又