高等学校教材

数学物理方程

（第二版）

上　册

陈庆益　李志深　编著

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

高等教育出版社

书 号 13010·01254
定 价 1.20 元

高等学校教材

数学物理方程

(第二版)

上　册

陈庆益　李志深　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书为第二版，是在第一版的基础上修订而成，不仅总结了近几年的教学经验，吸收了兄弟院校的宝贵意见，并从表述方式及材料安排方面作了较大改动，使之更便于教学。

本书共十章，分上、下册出版．上册（前五章）包含古典数学物理方程的基本内容．第 1 章用微元法引出三类典型方程的定解问题，而把变分原理及相应的引出方式放入章末的附录中；第 2 、3 、4 章分别讨论波动方程、位势方程和热传导方程典型定解问题的适定性、解法及解的性质；第 5 章介绍二阶线性偏微分方程的分类和特征概念，并对典型方程作出总结；第 6 章基本上按数学分析的水平介绍广义函数，包括 Соболев 空间、嵌入定理及迹定理；第 7 章讨论一般的常系数方程及其基本解；第 8 章讲述变系数椭圆方程及退化的二阶椭圆方程和退化的二阶双曲方程；第 9 章在对非线性方程的特性作一般性考察后，初步介绍冲击波和孤波；第10章介绍近似解，包括解析近似及数值近似。每章各节除附有习题外，还在各章末列有注释与文献，供进一步学习参考。

本书上册可作为高等院校数学专业的基础课教材；下册可作为选修课教学用书，也可作为有关专业研究生课程的教学用书。

高等学校教材

数学物理方程

（第 二 版）

上　　册

陈庆益　李志深　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本850×1168　1/32　印张 7.125　字数 177,000

1979年 1 月第 1 版　1986年 8 月第 2 版　1986年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—04,150

书号 13010·01254　　定价 1.20 元

序

本书是在第一版的基础上，依据三年的教学实践，并得到一些兄弟院校教师同志的宝贵建议后改写的，在表述方式及材料安排方面，作了较大的更动.

1. 定解问题的引出，仍沿用便于理解的微元法；考虑到变分原理及相应引出方式的重要性，就用附录的形式保留下来.

2. 第一版第二章中的解法过于集中，第三章的定性讨论也有这种情况，所以第二版把这两章的内容分散到三个典型方程的内容中，这样可能更有利于教与学.

3. 前五章应是《数学物理方程》课程的基本教学内容，所以本版把第一版广义函数与基本解一章中的镜像法，移到第3章的位势方程中；并适当地充实了原第二、三、四章的内容，例如第2章中关于弦振动方程最优控制的综合例题.

4. 第6章及其以后几章，可作为选修课教材及有关专业研究生的基础课教材.我们把原来的广义函数与基本解一章分为两章，在广义函数这一章中，基本上是在数学分析的水平上，较完整地讨论了广义函数的主要性质(包括结构)及各种运算，并介绍了Соболев空间及嵌入定理和迹定理；第7章专门讨论一般的常系数方程，特别是基本解的存在性及初值问题的适定类，这方面的内容也可以说是比较基础的；第8章变系数方程也得到了充实和改进，我们较系统地讨论了高阶椭圆方程的一般边值问题，并介绍了退化的二阶椭圆方程和退化的二阶双曲方程；在第9章中补充了正弦Gordon方程及特殊的Bäcklund变换；在最后的第10章中，增加了解析近似方法，介绍了加权余量法、正则摄动及奇摄动，这对于联系工程技术及生产实际，可能是更为有用的.

在引用前面的结果及公式时，采用通常的记法．例如第 3 章第 2 节第 1 段的公式(4)，记作 3.2.1.(4)；第 2 章第 1 节习题中的第 3 题，记作习题 2.1.3.

为了遵循标准化工作，本书中有关的物理量、单位和数学符号，都按照国家标准 GB 3102.11-82 中的规定使用.

最后，我们感谢审阅本稿的一些兄弟院校的同志们，还感谢广西大学数学系的郭信康等同志，对我们的修订工作提出了许多宝贵的建议.

由于水平所限，本书仍难免有缺陷与错误，我们热诚欢迎批评与指正。

陈庆益　李志深

1983 年 1 月于兰州大学

目　　录

上　册

附：下册目录

引　言

随着十七世纪工业生产的发展，力学、天文学和物理学也得到相应的发展，作为基础的数学也发生了根本的变化，于是微积分出现了．在这工业发展的时期，工程技术以及力学、天文学和物理学方面相继提出许多微分方程问题．在偏微分方程方面，工程技术中的多种振动与波动现象导致双曲型方程的研究，许多定常现象和流体、电磁、弹性问题导致椭圆型方程的研究，热传导、粒子扩散等问题则导致抛物型方程的研究．与此同时，人们对偏微分方程的性质也有更多的了解，在此基础上逐渐形成数学物理方程这一学科．对数学物理方程的深入研究，反过来又促进了力学、天文学和物理学等方面的发展，最终推动了工程技术和工业生产的发展．

数学物理方程研究的范围是十分广泛的，它包含描述各种自然现象的微分方程、积分方程和函数方程等．限于篇幅，本书主要讨论波动方程、位势方程和热传导方程．一方面，这些古典方程在一定范围内描述了大宗的基本物理现象，从而能有效地解决一些理论问题和工程技术问题；另一方面，通过这些典型方程的研究，可以掌握一些基本知识和方法，作为探讨工程技术以及力学、物理学等方面提出的新问题的参考，也可为进一步学习现代偏微分方程理论作好准备．

1. 定解问题的引出

为了研究某一特定的物理过程，除了寻求这个物理过程所应满足的方程外，还须考虑这个物理过程在某一起始时刻的状态以及它与周围事物的联系情况. 于是还须对方程给出所谓**初值**以及**边值**等附加条件. 这样或那样的附加条件，统称为方程的**定解条件**；而在一定的附加条件下求解方程的问题，便称为这个方程的**定解问题**.

在这一章，我们将用微元分析法从力学、物理学中引出以后几章所要讨论的一些典型的方程和定解条件. 由于变分问题的重要性，我们还在本章末的附录中统一用变分方法导出这些定解问题.

1.1. 热传导方程及其定解条件

1.1.1. 热传导方程的引出

工程技术中的许多传热问题常归结为某些物体内温度分布的确定. 现在我们根据物理学中的一些基本规律来推导在热传导过程中温度分布所应满足的方程.

考察某物体G的热传导问题. 假设物体G内一点(x, y, z)在时刻t的温度为$u(x, y, z, t)$，以$\boldsymbol{n}$表示点(x, y, z)处曲面面元dS的法向，并规定$\boldsymbol{n}$所指的那一侧为dS的正侧.

由热传导学中的Fourier 实验定律得知：在dt时间内，从面元dS的负侧流向正侧的热量为

$$dQ=-k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dSdt,$$

其中$k(x, y, z)$称为物体在点(x, y, z)处的**导热系数**，它取正值，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$为温度函数在点$(x, y, z)$处沿$\boldsymbol{n}$的方向导数. 由于热量的流向和温度梯度的方向相反，即，若 grad$u$ 与曲面的法向相交成锐角，则$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\text{grad}\ u\cdot\boldsymbol{n}^0$为正①. 沿$\boldsymbol{n}$的方向穿过曲面时温度要增加，而热流方向却从温度高的一侧流向低的一侧，于是沿$\boldsymbol{n}$方向流过曲面的热量应是负的，故等式右端出现负号.

对于G内任一封闭曲面S，以$\boldsymbol{n}$表示它的外法线方向. 因此从时刻t_1到时刻t_2，流入曲面S内部的热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\ \frac{\partial u}{\partial n}\ dS\right]dt.$$

记S所围的区域为D，则D内温度升高所吸收的热量为

$$\begin{aligned}Q_2=&\iiint_D c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z,t_2)\\&-u(x,y,z,t_1)]dxdydz\\=&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c(x,y,z)\rho(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydzdt,\end{aligned}$$

其中$c(x, y, z)$及$\rho(x, y, z)$各为物体的比热容及密度. 由于热量守恒，流入的热量应等于物体温度升高所吸收的热量. 于是

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\ dSdt=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt.$$

假设函数u关于变量t一次连续可微，关于变量x，y，z二次连续可微. 由 Gauss 公式

① $\boldsymbol{n}^0$表示$\boldsymbol{n}$方向上的单位矢量.

$$\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz,$$

有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\right\}dxdydzdt=0.$$

由于时间间隔$[t_1, t_2]$及区域D是任意选取的，而积分号下的函数是连续函数，因此在任何时刻对G内任一点都有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1}$$

若物体内部有热源，设在单位时间内单位体积中所产生的热量为$F(x,y,z,t)$，则在时间$[t_1,t_2]$内D中产生热量

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D F(x,y,z,t)dxdydzdt.$$

考虑到D中热量的平衡，应有$Q_2=Q_3+Q_1$. 于是温度u所满足的方程应该是

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in G. \tag{2}$$

如果物体均匀且各向同性，则c、ρ. k都是常数. 这时令

$\frac{k}{c\rho}=a^2$，$\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}=F_1(x,y,z,t)$，方程(1) 和(2) 分别化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F_1(x,y,z,t). \tag{4}$$

(3) 和(4) 分别称为**齐次热传导方程**和**非齐次热传导方程**.

1.1.2. 定解条件的提法

显然，单靠微分方程还不足以完全确定一个特定的物理过程. 我们知道,对于一个物体，在一个确定的传热过程中，它的温度分布依赖于开始时刻的温度和物体表面上的温度，因此还须对方程附加相应的初值条件和边值条件. 一般，求方程满足一定附加条件的解的问题,称为**定解问题**.

若开始时刻物体的温度分布为$u_0(x,y,z)$,则$u(x,y,z,t)$ 应满足**初值条件**

$$u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z),\quad (x,y,z)\in G. \tag{1}$$

一般地说,物体表面与周围介质会产生热交换. 在通常温度下,在dt时间内,通过物体表面的面元 dS 而散失到周围介质中的热量,根据不同介质间交换热量的 Newton **冷却定律**,应为

$$dQ'=h(u-\theta)dSdt,$$

其中$\theta=\theta(x,y,z,t)$ 是和物体接触处的介质的温度，u 是物体表面的温度,h称为物体对这介质的**热交换系数**.

于是,在单位时间内穿过G的任一部分境界 S' 流入周围介质的热量为

$$Q_1'=\iint_{S'} h(u-\theta)dS,$$

这部分热量应正好是由G内传到S'上的热量

$$Q_2'=-\iint_{S'} k\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

这里的$\boldsymbol{n}$为由G到其余集的法向(外法向). 由$Q_1'=Q_2'$及S' 的任意性,仿上讨论知,在G的表面上任一点,应有

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-\theta)=0, \tag{2}$$

这就是温度应满足的**边值条件**.

如果 $h \gg k$,则边值条件近似地可写为

$$u|_S=\theta,\ S\text{ 表示 }G\text{ 的边界}.$$

这说明当物体与周围介质之间的热交换能力很强时，物体表面的温度可认为与周围介质的温度一致.

如果 $h \ll k$,则边值条件近似地可写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0.$$

这时,物体与周围介质间的热交换能力很弱，也就是通常说的“物体表面绝热”.

所以热传导方程的边值条件一般有三种形式：

1)　$u|_S=f(x,y,z,t),(x,y,z)\in S,t>0,$　(3)

2)　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(x,y,z,t),(x,y,z)\in S,t>0,$　(4)

3)　$\left[h\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_S=f(x,y,z,t),(x,y,z)\in S,t>0.$　(5)

条件(3)、(4)和(5)依次称为**第一、第二和第三边值条件**.

由上述讨论知道，对于物体的热传导问题引出如下数学问题:求方程 1.1.1.(3)或 1.1.1.(4)的满足给定初值条件(1) 及边值条件(3)—(5)之一的解. 这个定解问题称为方程 1.1.1.(3) 或 1.1.1.(4)的**混合问题**(或**初、边值问题**).

如果只在某物体的局部范围内考察热传导过程，以致边界状况的影响在考察的时间内达不到所研究的地方，或虽达到但影响甚小,则此时对方程只须附加初值条件而不提边值条件,这种问题通常称为 **Cauchy 问题**(或**初值问题**).

应该指出,虽然我们习惯上总是称方程 1.1.1.(3) 为热传导方程，但在生产实际中还有很多物理现象都可以用这种方程来描述. 例如在电学中,海底电缆的电压 e 也满足方程

$$\frac{\partial e}{\partial t}=K\frac{\partial^2 e}{\partial x^2},$$

其中$K=RC$，R为电阻，C为电容．又如导电线圈所围的柱体内的磁场H满足方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right),$$

其中$a^2=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$，$c$是光速，$\mu$是磁导率，$\sigma$是电导率．而当研究分子在液体中的扩散现象时，扩散物质的浓度N（单位体积中扩散物质的含量）也满足方程

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right),\tag{6}$$

其中D是扩散系数；所以 1.1.1(3) 也称为**扩散方程**．

习　题 1.1

1．设某溶质在溶液中扩散，它在溶液中各点的浓度用函数 $N(x,y,z,t)$描述，又知溶质在时间 dt 内流过面元 dS 的质量 dm 依 **Nernst 定律**和$\frac{\partial N}{\partial n}$成正比，即

$$dm=-D\frac{\partial N}{\partial n}dSdt,$$

其中D为扩散系数．导出N所满足的方程．

2．设直径为l的均匀细杆在同一截面上有同一温度，杆的侧面和外界无热交换，而其两端与周围介质的热交换服从 Newton 定律，试求杆的传热方程．

3．混凝土在浇筑后有水化热Q逐渐放出，其速率Q_t与所存水化热成正比：$Q_t=-\beta Q$．试求水化热的传导方程．