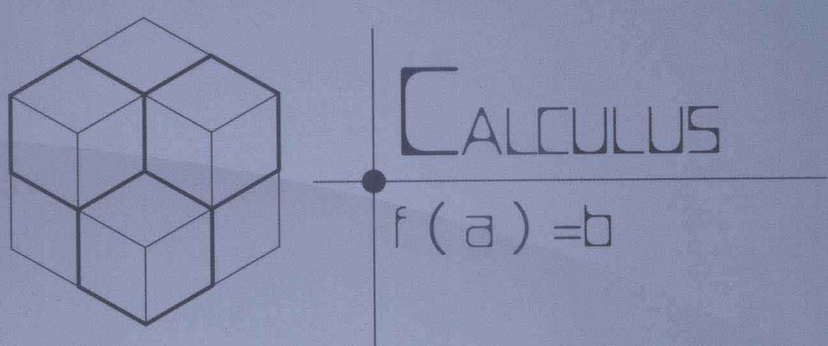
高等教育“十一五”规划教材

微积分（上册）

WEIJIFEN

史天勤　王永学　主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

微　积　分

（上　册）

史天勤　王永学　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

微积分是现代数学的重要基础与起点，它不仅在物理学、化学和生物学等自然科学领域有着非常广泛的应用，而且也广泛地应用于社会学和经济学等人文学科领域，成为这些领域重要的研究工具，尤其是经济学，它与现代数学有着极为密切的关系。本书主要内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理及其应用、积分、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程与差分方程初步等。

本书可供本科院校和高职高专院校各专业公共基础课使用。学好这门课程，对于培养社会所需要的高级经济技术和工程管理人才有着十分重要的意义。

图书在版编目（CIP）数据

微积分（上册）/史天勤，王永学主编. —北京：科学出版社，2010

（高等教育“十一五”规划教材）

ISBN 978-7-03-027944-6

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①史…②王…　Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第110695号

策划：姜天鹏　李洪旺

责任编辑：王纯刚　隽青龙／责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉／封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010年8月第一版　开本：B5（720×1 000）

2010年8月第一次印刷　印张：13 1/4

印数：1-4 000　字数：265 000

定价：44.00元（本册定价：21.00元）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62135517-2037

前　言

自从高等教育由精英教育转向大众教育以来，一般院校，特别是独立学院这一类高校在高等数学教学中的困惑也随之而来。学生对高等数学的学习普遍感到困难，甚至缺乏信心。广大数学教育工作者都在思考并运作高等数学教学的改革。社会在发展，高等数学是高科技和信息化的基础，只能加强，不能削弱，这是不该也不能动摇的信念。那么，在当前为数众多的学生对高等数学学习处于畏难情绪相当严重的情况下，如何切实有效地加强高等数学的教学呢？这是一个亟待解决的问题。通过几年来的改革实践，我们认为，要解决好这个问题，必须从转变观念开始，从教材改革入手。

其实，对于非数学专业的学生，如同汽车司机不必费很大精力去学习汽车的制造和发动机原理，要紧的是掌握驾驶技术一样，数学教育也是如此。对于数学理论的某些证明不是必需的，重要的是让学生学会应用数学理论去解决问题。其道理是很清楚的，尤其对独立学院，其培养目标都定位在应用型人才上，更不该在数学理论上做太多的纠缠。

数学教师出于专业特点，养成了对事物追根问底的习惯，只有在把每个定理、每个公式的来龙去脉都说清楚以后才感到欣慰。这种想法虽然有助于加强对数学理论的理解与掌握，但也不过如汽车司机懂得汽车制造原理加深对汽车的了解一样，不是问题的主要方面。非数学专业的学生关心的是应用数学理论去解决问题；更何况，要让学生去追求数学理论的由来，不仅完全没有必要，反而会使学生产生畏难情绪，导致学生丧失学习信心，其效果适得其反。对于数学教育工作者，长期在“抽象而严谨”的氛围中孜孜以求，转变观念是不容易的，甚至是痛苦的。但是，无论是从客观实际出发，还是从科学发展观的角度看，我们都必须“忍痛割爱”——淡化理论，加强应用。

据此，在我们编写的《微积分》教材里，在数学理论上，略去了一些证明，代之以对理论的诠释和直观形象，加强了对理论的应用。通过例题，熟悉理论，掌握应用理论解决问题的方法和技巧，每章均有小结，概要总结全章基本内容，特别对问题类型和解题方法进行了归纳，既便于学生复习，又利于教师在组织习题课时参考使用。章末均配有大量习题，分 A、B、C 三个层次，分别为基本题、达标题和提高题。使用时可以针对学生具体情况适量选用。

本教材适合“精讲多练”的教学方法。精讲：简单明了，通俗易懂，方便学

习；多练：加强训练，在训练中掌握解决问题的方法和技巧，增强思维能力。最终达到提高高等数学教学质量的目的。

本教材的编写充分考虑了分层次教学改革。对于学习感到吃力的学生以解决A层次(基本)题为准，多数学生应当掌握B层次(达标)题，而对于部分今后准备考研的学生还可以做C层次(提高)题。

鉴于理工类专业与经管类专业对高等数学要求上的差异，在教材中用记号标明。“*”号表示经管类可以不学的内容，而“△”号表示理工类可以不学的内容。

本教材是教育部课题《独立学院高等数学分层次教学改革与实践》的成果，在吉林农业大学发展学院院长宗占国教授、副院长赵中岳教授的关心和支持下，由吉林农业大学发展学院史天勤教授和长春大学光华学院王永学教授根据独立学院的实际，共同组织本校教师编写完成的，其中，长春大学光华学院于新艳、刘春红、孟繁洪、郭宝珠、卢兰、王帅、许佰雁、张少槐、杨恩孝、闻学娟分别对第一至第十章的习题进行了配备，吉林农业大学发展学院李东升、刘燕、王红芳、王健、魏延吉、王雪、王晶、陆晶对各章习题进行了核对。

编　者

2010 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

中学时已经学过函数与极限的一些知识，本章是在中学数学基础上的进一步讨论和深入. 函数与极限的知识和理论既是本章的基本内容，同时也是整个微积分的基础.

第一节　函　　数

一、变量与数集

在观察自然现象或处理技术过程中所遇到的量一般可以分为两种：一种是在考察过程中保持不变的量，我们称之为常量；另一种是变化着的量，我们称之为变量.

例如，在给一个密封容器内的气体加热的过程中，容器内气体的质量是保持不变的，气体分子的个数也是不变的，因而是常量；而气体的温度和压强都是变量. 再如，全班的学生数是个常量，但班上每天早晨出操锻炼的人数是个变量.

常量是相对的，常量本身可以看作在某一过程中取同一个数的变量的特例. 因此，变量是我们的主要研究对象.

微积分是在实数范围内讨论的. 我们今后遇到的量都是实数，下面的实数集合尤为常用(其中 a，b 为常数)：

数集	名称	记号
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)
$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$
$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	半开区间	$(a, b]$
$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	半开区间	$[a, b)$
$\{x \mid a < x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$
$\{x \mid a \leqslant x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$
$\{x \mid x < a\}$	无限区间	$(-\infty, a)$
$\{x \mid x \leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$
$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	无限区间	$(-\infty, +\infty)$或 $\mathbf{R}$

上述数集，我们统称为区间，有时用大写英文字母 A，B，C 等表示.

对于常数 $\delta>0$，区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为以 a 为中心，δ 为半径的邻域，简称 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$，简记为 $U(a)$.

有时还要用到数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$，称为 a 的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，简记为 $\mathring{U}(a)$.

我们知道，在用数轴表示全体实数时，实数与数轴上的点是一一对应的，所以我们对“数”和“点”常常不加区别地称呼.

二、函数

与一个实际问题相关的量常常是很多的，它们又往往是相互联系、相互依赖的.

例 1.1 在自由落体运动中，路程 s 随时间 t 而变化，两者的依赖关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中 g 是重力加速度.

例 1.2 某商店上半年每个月的营业额，有如下结果：

月　份	1	2	3	4	5	6
营业额(万元)	128.2	233.4	301.8	308.5	296.3	372.6

表中反映了上半年每月的营业额情况.

例 1.3 图 1.1 是一条股价线，它反映了股价随时间的变化状况.

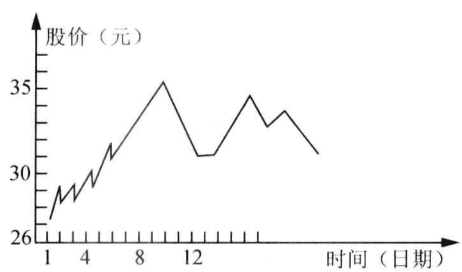


图 1.1

以上例子都表示了两个变量之间的关系，一般地，我们有

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集，如果按照某一法则 f，对 D 中每一个实数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为该函数的定义域，函数值的集合

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为该函数的值域.

关于函数的定义，需要注意以下几点：

(1) 本定义中的函数概念仅限于在实数范围内讨论，而且，与每个自变量相对应的函数值是唯一的，所以是单值函数. 还由于只讨论一个自变量的情况，因此，这里的函数又称为一元函数.

(2) 从函数的定义可以看到，确定一个函数有两个要素，即定义域和对应法则，定义域不同的两个函数是不相同的；同样，对应法则不一样的函数也是不同的.

(3) 前面三个例子都是函数，函数的表示既可以用解析表达式表示，也可以通过列表或图像表示，函数的表示形式是非本质的，我们一般采用解析表达式表示函数.

(4) 函数的每一对自变量和相应的函数值是平面直角坐标系上的一个点，因此，定义在某个数集上的函数都有它的图像.

三、与函数有关的若干性质

1. 函数的有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在实数集 D 上有定义，如果存在 $M>0$，对任意 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数；反之，即若对任意 $M>0$，恒有 $x'\in D$，使 $|f(x')|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

如果存在实数 P，对任意 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant P(f(x)\geqslant P)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界(下界)，或者说 $f(x)$ 在 D 上方有界(下方有界)，并称 P 是 $f(x)$ 在 D 上的一个上界(下界).

注意：(1) 函数在 D 上有界当且仅当函数在 D 上既有上界，又有下界. 由此可见，一个在 D 上没有上界或没有下界的函数是无界的. (2) 一个有界函数的“界”不是唯一的.

例 1.4　函数 $y=\lg x$ 在 $[1,\ 10]$ 上，由于对任意 $x\in[1,\ 10]$，均有 $|\lg x|\leqslant 1$，因而是有界的.

例 1.5　函数 $y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上虽有下界，但无上界，从而无界.

2. 函数的单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对任意的 x_1，$x_2\in I$，$x_1<x_2$，总有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{(或 } f(x_1) > f(x_2)\text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的(或单调减少的).

单调增加或单调减少的函数为单调函数.

根据定义，容易判断，函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的，函数 $y = 3x^2 + 2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在 $[0, -\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上有定义(a 为正数或 $+\infty$)，如果对任意的 $x \in (-a, a)$，都有

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{(或 } f(-x) = f(x)\text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

例如，函数 $y = \sin x$，$y = x^3$ 均是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；函数 $y = \cos x$，$y = x^2$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

再如，符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

是一个 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

4. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，如果存在正数 l，对任意 $x \in \mathbf{R}$，有 $x + l \in \mathbf{R}$，且

$$f(x + l) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数，l 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

我们容易知道，如果 l 是函数 $f(x)$ 的一个周期，那么 nl（n 是自然数）也是函数 $f(x)$ 的一个周期，我们把最小正周期称为函数 $f(x)$ 的周期.

四、反函数

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 在区域 D 上有定义，它的值域为 $f(D)$，如果对于每个 $y \in f(D)$，必有唯一 $x \in D$，使 $f(x) = y$，则确定了以 y 为自变量以 x 为因变量的函数 $x = f^{-1}(y)$，$y \in f(D)$，称函数 $x = f^{-1}(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上，常用 x 表示自变量，因此，函数 $y = f(x)$ 的反函数往往记为 $y = f^{-1}(x)$. 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 是对称的.

一般地，一个函数在定义域内不一定存在反函数，但是，我们可以将函数限制在某个小范围内，就可能存在反函数，例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数，但在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上就存在反函数 $y=\arcsin x$.

五、复合函数

定义 1.7 设函数 $y=f(u)$ 是实数集 A 上有定义的函数，$u=\varphi(x)$ 是定义在实数集 B 上的函数，$G=\{x \mid x\in B, 且\ \varphi(x)\in A\}$，则对任意 $x\in G$，按照对应关系 φ，确定了唯一 $u=\varphi(x)\in A$，再按对应关系 f 确定了唯一 $y=f(u)$. 即对 $x\in G$，有唯一 y 值与之对应，这就确定了 G 上的一个函数，称为函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 在 G 上的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 称为中间变量.

例如 函数 $y=\tan^4[\lg(1+x)]$ 是由 $y=u^4$，$u=\tan v$，$v=\lg w$，$w=1+x$ 这四个函数复合而成的.

六、初等函数

我们在中学已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常值函数，称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所得到的函数，统称为初等函数.

关于初等函数，作如下说明：

(1) 在指数函数中，最重要也是今后常用的是以无理数e为底的指数函数 $y=e^x$，其中 $e\approx 2.718281828$.

(2) 在对数函数中，指数函数 $y=e^x$ 的反函数，记作 $y=\ln x$，称为自然对数函数.

(3) 在幂函数 $y=x^\alpha$ 中，幂指数 α 可以是一切实数，当 α 是无理数时 x^α 可以理解为 $e^{\alpha\ln x}$.

(4) 函数 $y=\operatorname{sgn}x$，$y=|x|$ 以及分段函数

$$y=\begin{cases}1+x & 当\ x\in(-\infty,0)时\\ 2^x & 当\ x\in[0,+\infty)时\end{cases}$$

等都不是初等函数.

(5) 在力学和工程学中有重要应用的双曲函数：

$$shx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad chx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

分别称为双曲正弦函数和双曲余弦函数，它们都是初等函数.

第二节　数列的极限

一、极限思想

早在公元3世纪，我国古代数学家刘徽创立了割圆术，用96边形的面积近似代替圆面积，求出 $\pi = 3.141\,024$. 刘徽求圆周率的方法是从圆内接6边形算起，并指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 刘徽的极限思想，及他对面积的深刻认识和他的割圆术，与现在积分学中的定积分概念及定积分的近似计算具有相似之处. 到了5世纪，祖冲之应用刘徽的割圆术将圆周率精确到7位有效数字.

割圆术的思想方法特点是：由已知的直线形的知识，借助无限的过程，去认识未知的曲线形；利用已知的一串近似值去无限接近我们所要寻求的未知的精确值. 这种思想方法，本质上就是“极限”方法.

二、数列 $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ 的极限

考察数列 $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$：

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{11},\ \cdots,\ \frac{n}{2n+1},\ \cdots$$

可以发现，当 n 不断增大时，数列第 n 项的值越来越接近 $\dfrac{1}{2}$. 我们如何对此作出精确的描述呢？

“$\dfrac{n}{2n+1}$ 无限趋近于 $\dfrac{1}{2}$”与“$\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|$ 无限趋近于0”意思相同，也就是说，当 n 充分大时，$\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|$ 可以任意小.

比如，要使 $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right| < 0.01$，解此不等式知，只要 $n > 25$ 即可.

再如，要使 $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right| < 0.001$，只要 $n > 250$ 就行.

对于更小的数值，例如 10^{-10}，只要 $n > 25 \times 10^{8}$，便有

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < 10^{-10}$$

总之，不管事先指定多么小的正数(记为 ε)，总有自然数(记为 N，在这里，

取 $N \geqslant \frac{1}{4\varepsilon}$)，则当 $n > N$ 时，便有 $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. 于是对于“$\frac{n}{2n+1}$ 无限趋近于 $\frac{1}{2}$”的过程可以用如下精确的语言表述：

对任意 $\varepsilon > 0$，恒有自然数 $N \geqslant \frac{1}{4\varepsilon}$，当 $n > N$ 时，$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

三、数列极限定义

定义 1.8　已知数列 $\{a_n\}$，以及常数 a，如果对任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，使当 $n > N$ 时，恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

则称当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，或者称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a \ (n \to \infty)$$

如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称这个数列不收敛，或称它是发散的.

在上一段讨论中，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

关于数列极限定义，说明如下：

(1) 定义中自然数 N 一般与 ε 有关，但它们之间构成的不是函数关系，N 不是唯一确定的，只要能找到一个 N，比此数大的正整数都可以作为“N”.

(2) ε 是任意给定的，是用来表示“小的正数”的，由于其任意性，所以可以用 2ε，ε^2，$\sqrt[3]{\varepsilon}$ 等来代替.

(3) 定义中“$n > N$”中的不等号“$>$”换成“$\geqslant$”不会改变定义实质.

(4) 定义中“$|a_n - a| < \varepsilon$”中的不等号“$<$”换成“$\leqslant$”不会影响定义.

根据极限定义，我们可以证明：

当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，当 $|q| \geqslant 1$ 时 $\{q^n\}$ 发散.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0 \text{（其中 } k \text{ 是某固定的自然数）}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \text{（其中 } k \text{ 是某固定的自然数，} a \text{ 是大于 1 的常数）}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{（其中 } a \text{ 是大于 0 的常数）}$$

四、收敛数列的性质

利用极限定义，可以证明收敛数列具有如下性质.

(1)(唯一性)收敛数列的极限是唯一的.

(2)(有界性)如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,那么数列$\{a_n\}$必有界,即存在$M>0$,使对一切自然数$n$,均满足不等式$|a_n|\leqslant M$.

注意:该结论的逆命题不一定成立.即若数列$\{a_n\}$有界,但极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$未必存在.例如,数列$\{(-1)^n\}$有界但不收敛.

(3)(保号性)如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或$a<0$),则存在正整数$N$,当$n>N$时,$a_n>0$(或$a_n<0$).

(4)(保序性)如果$a_n\leqslant b_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$a\leqslant b$.

注意:该命题中若把"$a_n\leqslant b_n$"换成"$a_n<b_n$",不一定有结论"$a<b$".例如 当$a_n=\dfrac{1}{n^2}$,$b_n=\dfrac{2}{n}$时,显然$a_n<b_n$,但此时$a=b=0$.

(5)(四则运算)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$

③ 若还有$b\neq0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$

注意:该性质表明,在数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均收敛的条件下,数列$\{a_n\pm b_n\}$、$\{a_nb_n\}$、$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$($\{b_n\}$的极限不为零)也收敛,而且极限值保持取极限前的运算关系.此外,由此性质,容易导出如下结论:

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$c$为常数,则$\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=ca$.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_{kn}=a_k(k=1,2,\cdots,m)$则

$$\lim_{n\to\infty}(a_{1n}\cdot a_{2n}\cdot\cdots\cdot a_{mn})=a_1a_2\cdots a_m$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{1n}\pm a_{2n}\pm\cdots\pm a_{mn})=a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_m$$

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$k$为某个正整数,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^k=a^k$.

利用以上性质,我们计算极限.

例 1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2}{n^2+1}-\dfrac{n(n+1)}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n^2+n+4}{(n^2+1)(n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{1-0+0+0}{(1+0)(1+0)}=1$$