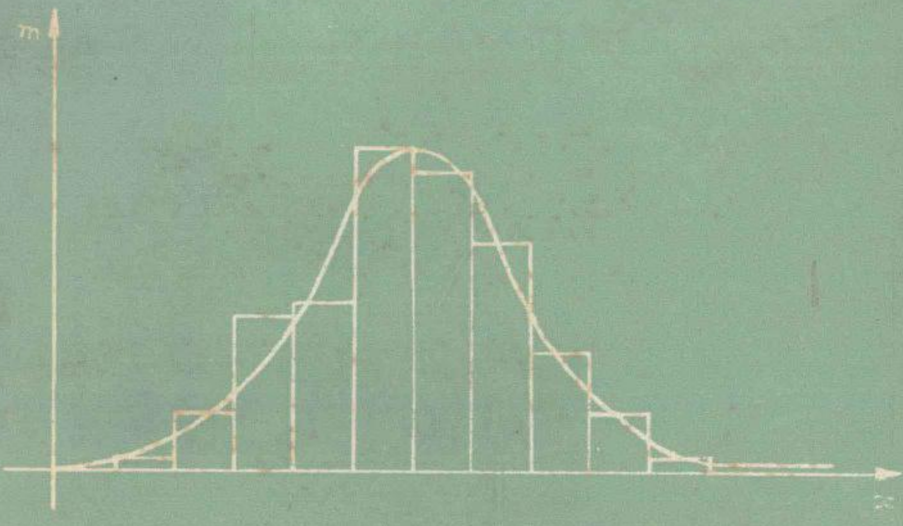
关家骥　等编



概率论与数理统计

中南工业大学出版社

概率论与数理统计

关家骥　李云甫　瞿永然
盛衍采　孙元三　雷宝瑶
编

中南工业大学出版社

概率论与数理统计

关家骐等编

责 任 编 辑：王 嘉 新
插图责任编辑：刘楷英

中南工业大学出版社出版发行
望 城 县 印 刷 厂 印 装
湖 南 省 新 华 书 店 经 销

•

开本：787×1092 1/32 印张：11.25 字数：243千字
1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

印数：0001—7500

•

ISBN 7-81020-245-6／O·038

定价：1.85元

前　言

本书是依据1987年国家教委批准的高等工业学校《数学课程教学基本要求》中有关概率论与数理统计部分的内容，稍加补充编写而成的。

概率论部分（第一章—第五章）是随机性现象的数学的基本理论：随机事件及其概率、随机变量的分布、数字特征、极限定理等；数理统计部分（第六章—第九章）介绍了统计推断的基础知识：参数估计、假设检验、线性回归。其中线性回归虽未列入上述《教学基本要求》，但因其应用日益广泛，因此也编入书中，以供教学中选用或学生自学。此外，由于电子计算机的应用日益普及，书中附录提供了与数理统计有关的若干计算程序，供上机计算时参考。

本书的编写分工是：第一章李云甫，第二章盛衍采，第三章瞿永然，第四、五章雷宝瑶，第六、七、八章关家骥，第九章及计算机程序孙元三。全书由关家骥教授主审。中南工业大学工程数学教研室的全体教师为本书的编写做了不少工作。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，渴诚欢迎读者批评指正。

编　者

1989年2月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1-1　随机事件与样本空间

一、随机现象

在自然界和人类社会中，人们观察到的现象，大体可归纳为两类：一类是可以预言其结果的，即在相同条件下，重复进行试验或观测，它的结果总是确定的，这一类现象称为必然现象或确定性现象。例如，在标准大气压下，温度达到100°C时，水必沸腾；向上抛一石子必然下落等。我们过去所学的微积分和线性代数等就是研究这类现象的数学工具。另一类是不能预言其结果的，即使在相同条件下，重复进行试验或观测，其结果未必相同，而且在每次试验之前并不能确切预料将出现什么结果，这类现象称为偶然现象或随机现象。例如，投掷一枚质地均匀而对称的硬币，其结果可能是正面（国徽面）向上，也可能是反面（币值面）向上；一射手，远距离射击较小目标，其结果可能击中，也可能击不中等。

随机现象既然无法预言其结果，它是否就无规律可循呢？人们经过长期的实践发现，所谓不可预言，只是对一次或少数几次试验和观测而言，而在相同条件下进行大量的试验和观测，它们却呈现出明显的规律性。例如，投掷一枚质地均匀而对称的硬币多次，就会发现出现正面和反面次数的比约为1：1。概率论与数理统计正是研究和揭示这种随机现象的统计规律性的一门数学学科。由于随机现象的普遍存在，这就使得概率统计

的概念与方法具有普遍的意义，它的结果也有着广泛的应用。

二、随机试验与事件

我们这里所说的试验，它包括各种各样的科学实验，也包括对某一事物的某一特征的观测。如果一个试验具有以下三个特征：

1.可在相同的条件下重复地进行；

2.每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3.进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

则称此试验为**随机试验**，简称**试验**，并记作E。今后所说的试验都是指随机试验。现举例如下：

例1 E_1：投掷一枚质地均匀而对称的硬币，观察其出现正面或反面；

例2 E_2：从一批产品中，依次任取10件，记录出现正品与次品的件数；

例3 E_3：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

例4 E_4：在一批灯泡中，任取一只，测试它的寿命。

我们就是通过研究随机试验来研究随机现象的。

在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称之为此随机试验的**随机事件**，简称**事件**。通常用字母A、B、C…表示。

例如，在例2中"没有次品"，"有一件次品"，"有两件次品"，…"10件都是次品"。显然，这些都是随机事件，因为它们是这个试验的最简单的随机事件，我们称这些事件为基本事件。此外，如"次品数不超过3"，"次品数大于3"，"次品数为偶数"，"次品数为奇数"等等，也都是随机事

件；**不过**，这些事件都是由前面的一些基本事件复合而成的，称为**复合事件**。如"次品数不超过3"这一事件，它是由"没有次品"，"有一件次品"，"有两件次品"和"有三件次品"所组成，当且仅当这四个基本事件之一发生，"次品数不超过3"这一事件才发生。

一般地，我们把在一定条件下和一定范围内不能再分解的事件称为**基本事件**，而由多个基本事件组成的事件，称为**复合事件**。

在试验E中，把必然发生的事件，称为**必然事件**，记作Ω；不可能发生的事件，称为**不可能事件**，记作ϕ。例如，在例2中，"次品数不超过10"是必然事件，"次品数大于10"是不可能事件。必然事件和不可能事件都是确定性现象，但为了今后讨论问题方便，我们把它们也看作为两个特殊的随机事件。

三、样本空间

为了利用点集的知识讨论随机事件，我们引入样本空间的概念。

所谓**样本空间**是指随机试验的所有基本事件组成的集合。它作为事件是一个必然事件，也记作Ω。Ω中的元素就是试验的基本事件，基本事件也称**样本点**，用e表示。包含n个基本事件e_1，e_2，…，e_n的试验的样本空间记作

$$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}$$

例如，在例2中，记e_i表示"有i件次品"的事件，$i=0,1,2,\cdots,10$，则

$$\Omega = \left\{e_0, e_1, \cdots, e_{10}\right\}$$

试验E的任一事件，都是样本空间Ω的某些样本点所组成的集合，因而事件可定义为Ω的子集。而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。如在例2中，设A表示"次品数不超过3"的事件，则$A=\left\{e_0, e_1, e_2, e_3\right\}$，A是$\Omega$的子集。因此，在进行某一随机试验时，弄清它的样本空间是由哪些样本点组成，以及某个事件是由哪些样本点组成是十分重要的。

例5 写出下列试验的样本空间。

(1) 投掷一颗骰子，观察其发生的点数；

(2) 投掷3枚硬币，观察其正面（记作H），反面（记作T）出现的情况；

(3) 从A、B、C、D、E 5本书中，任取3本，观察其出现的情况；

(4) 一分钟内，观察某电话交换台接到的呼唤次数；

(5) 在一批灯泡中，任取一只，观察其使用寿命。

解 (1) 设e_i表示出现i点的事件，$(i=1, 2, \cdots 6)$
则
$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}。$$

(2) 我们用HHH表示甲、乙、丙3枚硬币都出现正面，HHT表示甲、乙两硬币出现正面，丙硬币出现反面的事件，其余类推，则投掷三枚硬币的试验的样本空间为

$\Omega=\{$HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT$\}$。

(3) 以ABC表示取到的书一本是A，一本是B，一本是C，其余类推，则从5本书中任取3本书的样本空间为

$\Omega=\{$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$\}$。

(4) 以ω_i表示接到i次呼唤的事件，$(i=0, 1, 2, 3\cdots)$则

$$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$$

(5) 以ω_t表示灯泡使用寿命为t小时的事件。则

$$\Omega=\{t|0\leqslant t\leqslant T\}$$

四、事件的关系与运算

在实际问题中，在同样条件下发生的一些事件，往往不是孤立的，而是彼此之间有联系的。研究几个事件及它们之间的联系，不仅能帮助我们更深入的认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂的事件。

为了直观地表示事件之间的关系，我们常用平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示样本点，矩形中的圆A和圆B分别表示事件A与事件B。

1. 事件的包含及相等

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B**包含事件A**，记作$A\subset B$（或$B\supset A$），此时称A是B的**子事件**。〔如图1-1（a）〕

例如，投掷一颗骰子，设A表示出现两点的事件，B表示出现偶数点的事件，则$B\supset A$。

又例如，一圆柱形零件，如它的直径及高度都合格，则说这个零件是合格的。显然，直径不合格必导致产品不合格，所以产品不合格包含直径不合格。

如果，$A\supset B$与$B\subset A$同时成立，则称事件A与事件B**相等**，记作$A=B$。如“直径与长度都合格”必导致“产品合格”，反之，“产品合格”必导致“直径与长度都合格”。所以“直径与长度都合格”与“产品合格”是相等的。

2. 事件的并（和）

“两个事件A、B中至少有一个发生”的事件，称为A与B的**并**（或**和**），记作$A\cup B$。〔如图1-1 (b)〕

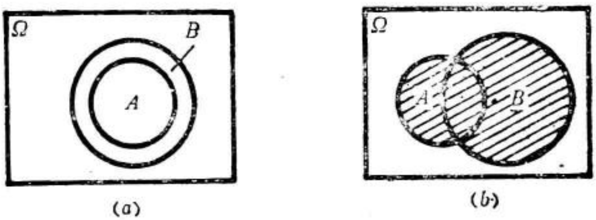


图1－1

例如，“产品不合格”就是“直径不合格”与“长度不合格”的并。又如，一个盒子中有10个完全相同的球，分别标以1、2、3、…10，从中任取一球，设

$A=\{$球的标号为偶数$\}$

$B=\{$球的标号$\leqslant 3\}$

则　$A\cup B=\{$球的标号为1，2，3，4，6，8，10$\}$

两事件的并（或和）的概念可以推广到多于两个事件的并的情况，即n个事件A_1、A_2、…A_n的并记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$（简记为$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$），它表示事件$A_1$、$A_2$、…$A_n$中至少有一个发生。例如，在上例中，记　$A_i=\{$取得球的标号为i$\}$

$C=\{$球的标号$\leqslant 5\}$

则　$C=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$

3．事件的交（积）

“两事件A、B同时发生”的事件，称为A与B的**交**（或**积**），记作$A\cap B$或记为AB。〔如图1-2(a)〕，例如“产品

合格”便是“直径合格”与“长度合格”的交。又如在上例中，$A \cap B$ = {球的标号为2}。类似地，“事件$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生”的事件，称为$A_1, A_2, \cdots A_n$的交（或积），记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$）

4. 互斥事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB = \phi$，则称事件A与B**互斥**（或**互不相容**）。〔如图1-2(b)〕。例如，投掷一枚硬币，“出现正面”与“出现反面”是互斥的。又如，“一分钟内电话交换台接到呼唤次数多于10次”和“一分钟内接到呼唤次数少于10次”是互斥的。

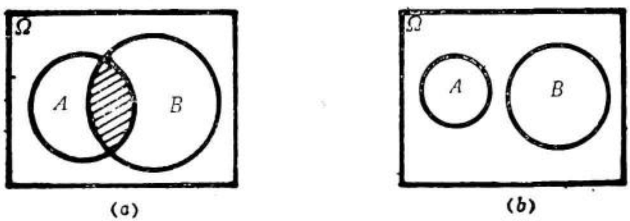


图1－2

如果A、B是互斥事件，则$A \cup B$常写为$A + B$，如果n个事件$A_1, A_2, \cdots A_n$(或无穷多个事件$A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \cdots$)两两互斥，则称$A_1, A_2, \cdots A_n$（或$A_1, A_2 \cdots A_n, \cdots$）互斥。

5.对立事件

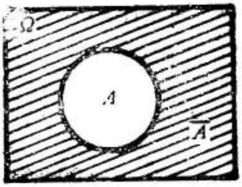
如两事件A、B必发生其一，且仅发生其一，即$A \cup B = \Omega$，且$A \cap B = \phi$，则称A与B**互逆**，或称A是B的**对立事件**(或B是A的对立事件）。记事件A的对立事件为$\overline{A}$〔如图1-3(a)〕。

例如，“产品合格”与“产品不合格”是对立事件，“一分钟内接到电话”与“一分钟内没有接到电话”也是对立事件。

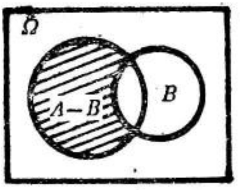
注意：互逆必互斥，但互斥未必互逆。

6．事件的差

“事件A发生而事件B不发生”所组成的事件，称为事件A与事件B的差，记作A－B〔如图1-3（b）〕。



(a)



(b)

图1－3

例如，“直径合格但长度不合格”是“直径合格”与“长度合格”的差。

例6 设一批零件，有正品也有次品，从这批产品中任意抽取7件，用A、B分别表示下列事件。

A：抽到的次品数不多于3（即取得的次品数为：0，1，2或3）。

B：抽到的次品数为奇数（即取得的次品数为1，3，5或7）。

问：事件$A\cup B$；AB；$A-B$；$\overline{B}$各表示什么意思。

解 $A\cup B$：取到的次品数为：0，1，2，3，5或7。

AB：取到的次品数为：1或3。

$A-B$：取到的次品数为：0或2。

$\overline{B}$：取到的次品数为偶数：即0，2，4或6。

例7 如图1-4所示的电路中，以A表示"信号灯亮"这一事件，以B、C、D分别表示继电器接点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ闭合等事件，则

$BC\subset A$，$BD\subset A$，

$BC\cup BD=A$

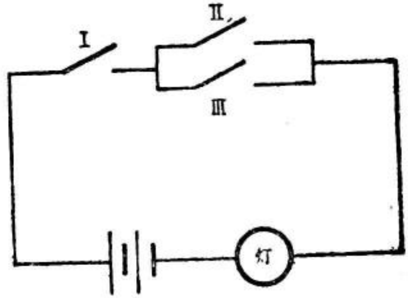


图1-4

解 因为BC发生，即开关Ⅰ、Ⅱ同时闭合，则整个电路接通，于是灯泡亮，即A发生，所以$BC\subset A$，同理可说明$BD\subset A$。

如果$BC\cup BD$发生，即BC或BD中至少有一个发生，则整个电路通，于是灯泡亮，所以

$BC\cup BD\subset A$

反之，如A发生，即灯泡亮，则BC或BD中至少有一个发生，所以，$A\subset BC\cup BD$，由事件相等的定义，知$BC\cup BD=A$。

上述事件间的关系与集合论中集合之间的关系是相互对应的，为便于比较，列表1-1。

从集合的运算规则，可以得到事件的运算规则。

(1) $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) $(A\cup B)C=AC\cup BC$，

$(A\cup C)(B\cup C)=AB\cup C$；

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

表1-1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$A\subset B$	事件A发生导致事件B发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等
$A\cup B$	事件A与事件B的并	集合A与集合B的并集
$A\cap B$	事件A与事件B的交	集合A与集合B的交集
$\overline{A}$	事件A的逆(或对立)事件	集合A的余集
$A-B$	事件A与事件B的差	集合A与集合B的差集
$A\cap B=\phi$	事件A与事件B互斥	集合A与集合B无公共元素

§1-2 随机事件的概率

当我们观察一个随机试验的各种事件时，常常发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同。因此，研究随机事件出现可能性大小，揭示出现这些事件的内在的统计规律性，在生产实践中具有重要的意义。为了研究事件发生的可能性，就需要用一个数字来描述这种可能性的大小，我们把刻划这种可能性大小的数量指标叫做事件的概率。事件A、B、C的概率分别用P(A)、P(B)、P(C)表示。

一、古典概型 概率的古典定义

先考察两个例子：