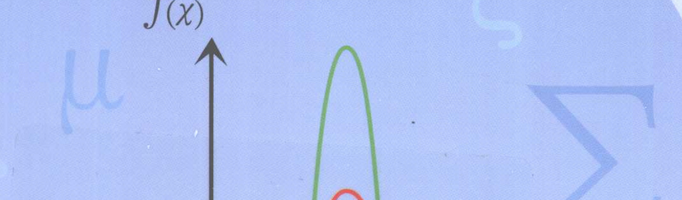
概率论与数理统计

（第二版）

杨万才　主编



科学出版社

概率论与数理统计

（第二版）

杨万才　主编

成军祥　武新乾　田　萍　鲁　鸽　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共11章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、Mathematica软件应用、常见的概率论与数理统计模型.各章配有一定数量的习题，书末附有习题选解与提示，并提供预备知识及6种附表以备查用.本书的编写始终以强化理论学习为基础，以应用为目的，力求做到深入浅出、通俗易懂、便于自学、提高成效.

本书可作为高等院校理工科、经济学、管理学等各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为教师、学生和科技工作者学习概率论与数理统计知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨万才主编.—2版.—北京:科学出版社，2013.2
ISBN 978-7-03-036484-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第012748号

责任编辑:吕 盛 胡海霞/责任校对:邹慧卿
责任印制:阎 磊/封面设计:迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009年1月第 一 版 开本:720×1000 B5
2013年2月第 二 版 印张:20 3/4
2013年2月第五次印刷 字数:402 000

定价: 35.00元

前　言

教育部颁布实施的《普通高中数学课程标准》(简称高中新课标)，已贯穿于全国普通高中新课程教学中，河南省于 2008 年起普遍使用于普通高中的数学课程教学. 新课标中的教学要求已涵盖了部分大学数学课程的知识，以至于目前大学数学教学与高中新课标培养出来的入校学生(2011 级始)的基础不相适应，高校教师的大学数学教学遇到了困难和问题. 鉴于此现状，河南省教育厅高教处、基础教育教学研究室，郑州大学，河南科技大学等单位针对新课标实施后大学数学的教学改革召开了座谈会、研讨会，并以河南省教育教学改革立项形式开展了研究. 河南省数学会的教学、科研研讨会上，不少专家、教授对此问题发表了看法，并提出了改革意见. 通过多种形式的会议研讨及意见征询，大家普遍认为高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学理、工、经、管、农、医等学科专业的必修基础课，也是大学数学教学与高中新课标教学联系最为紧密的课程，所以这三门公共基础数学的课程体系、教学内容及教学要求必须与中学数学教育接轨，否则在各高校课程教学学时减少的情况下，造成了时间上的浪费及教学效果的低下，不利于因材施教、人才培养，影响着教育质量的提高. 因此，这三门课程的教材建设是一个十分紧迫而又重要的工作，是大学数学教学改革的核心问题之一.

本书第二版是在概率论与数理统计的课程体系、教学内容及教学要求与高中新课标接轨的情况下编写而成的. 编写的基本指导思想和目的是：以教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的概率论与数理统计教学体系、教学内容、教学基本要求为指导，以做好与中学新课标的衔接为原则，以现行的教学大纲、教学要求为基础，以兼顾部分学生继续深造的入学要求为基本点，以为教师、学生提供一套使用方便、适于现实教学的良好教材为目的. 编写中基本保留了第一版的编写风格和内容框架，但对涉及与中学数学内容重复的知识点做了较大修改，将一些与学习概率论与数理统计相关的知识放在附录中，对第一版中的例题、习题做了精选、调整和补充，增加了“每章小结”.

参加第二版编写的有武新乾(第 1 章，第 6 章，第 10 章，附录 1)、成军祥(第 8 章，第 9 章)、田萍(第 7 章，第 11 章)、杨万才(第 4 章，第 5 章)、鲁鸽(第 2 章，第 3 章，附录 2，习题选解与提示). 杨万才教授担任主编，成军祥、武新乾、田萍、鲁鸽担任副主编. 郑州大学、河南理工大学、河南工业大学、许昌学院、华北水利水电学院、郑州轻工业学院、洛阳师范学院、安阳师范学院、周口师范学院、洛阳理工学院等高校同仁为本书的编写提出了宝贵意见和建议，科学出版社的编辑为本书的出版付

出了辛勤劳动，对此我们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中定有一些不当之处，恳请各位读者能惠予批评，不吝赐教.

编　者

2012 年 2 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会中存在着三类不同的现象，即确定性现象(或必然现象)、随机现象(或偶然性现象)和模糊现象. 所谓确定性现象，是指事前可以预知一定条件下具体结果的现象. 早期的科学研究主要是基于数学分析、几何、代数、微分方程等数学工具揭示确定性现象的规律性，例如，一个质点在 t 秒钟沿着直线移动的距离为 $s(t)$，则该质点移动的速度肯定是 $v(t)=\frac{ds(t)}{dt}$. **随机现象**是刻画具有多个可能结果，但哪一个结果会出现，事先无法断定的现象，例如，投资某一股票，可能赚钱，可能亏本，也可能保本，最终结果究竟是赚钱、亏本还是保本，事前无法确定，这是一个随机现象. 模糊现象是指概念外延的不确定性，从而造成判断的不确定性，例如，一个人是 19 岁，我们说他是青年人；当他是 20 岁时，我们还说他是青年人；那么，当他是 45 岁时，我们还说他是青年人吗？ 50 岁呢？ 因为青年人的外延是不清晰的，所以这导致了人们判断的不确定性，这是一种有别于随机现象的模糊现象.

随机现象不能理解为“碰巧的现象”、“出乎意料的现象”，它蕴含着内在必然性的规律. 人们通过长期的反复观察和实践发现，尽管对随机现象进行一次或少数几次观察的结果具有不确定性，但在相同条件下进行大量重复观察时，观察结果又遵循某种规律. 例如，投掷质地均匀的硬币多次，正面和反面出现的次数之比接近 1∶1；近代遗传学奠基人孟德尔用豌豆做试验，结果表明显性和隐形性状(子叶的颜色、种子的性状和茎的高度)之比接近3∶1；某射手射击次数足够多时，弹着点关于目标的分布略呈对称性，偏离目标远的弹着点比偏离目标近的弹着点少等. 这种在大量重复观察中呈现出的规律性称为**统计规律性**，它是随机现象本身所固有的、不随人们意志而改变的客观属性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学分支.

本章部分内容在《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称高中新课标)数学教材中已有介绍，这里从不同的角度进行阐述，以期全面系统地了解和认识概率论的基本知识.

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

对于随机现象的研究通常是通过随机试验来进行的. 我们把对某种现象作一

次观察或进行一次科学实验,统称为一个**试验**. 一个试验称为**随机试验**,如果它满足如下特点:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且所有可能的结果是事先已知的;

(3) 每次试验的结果恰是这些可能结果中的一个,但在一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验,简称试验,记作 E. 今后,如不特别声明,本书中所提及的试验都是指随机试验.

对随机试验,我们感兴趣的是试验结果. 例如,掷一枚骰子,能够直接观察到的可能出现的基本结果是 1,2,3,4,5 或 6 点,且这些结果在一次试验中不会同时出现. 这种可能出现的基本结果称为**样本点**,用 ω 表示. 样本点全体构成的集合称为**样本空间**,用 Ω 表示.

例 1 试验 E_1:将一枚硬币连掷两次,观察正反面出现的情况,则样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$.

例 2 试验 E_2:将一枚硬币连掷两次,观察正面出现的次数,则样本空间 $\Omega_2=\{0,1,2\}$.

例 3 试验 E_3:记录某大超市一天内进入的顾客人数. 由于人数可能很多,难以确定一个合适的上界,因此,取样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$.

例 4 试验 E_4:某射手打靶,测量其弹着点与靶心的距离,则样本空间 $\Omega_4=\{\omega|\omega\geqslant 0\}$.

需注意的是,对一个具体的随机试验来说,样本空间并不唯一,它依赖于试验目的. 例如,试验 E_1 和 E_2 都是将一枚硬币连掷两次,但由于试验目的不一样,两个样本空间截然不同,后者显然更为简单. 通过进一步的学习我们将会发现,正是样本空间构建上的灵活性给解决实际问题带来了很大方便,对于具体问题,怎样选取一个恰当的样本空间是值得研究的,也是解题的关键.

1.1.2 随机事件

进行随机试验时,人们常会关心具有某种特征的样本点构成的集合. 例如,掷一枚骰子,人们关心是否“掷出偶数点”,这是一个可能发生也可能不发生的事件,我们称它为随机事件,它涉及样本空间中的三个样本点,即样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$的一个子集$\{2,4,6\}$.

由此可见,**随机事件**是试验中可能出现也可能不出现的结果,是由某些样本点构成的集合,或者说是样本空间的一个子集. 随机事件是概率论最基本的概念之一,也简称**事件**,用字母 $A,B,C,\cdots$表示.

例 5 掷两枚骰子,观察点数. 若用 x 表示第一枚骰子出现的点数,y 表示第

二枚骰子出现的点数，则试验的样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$；$\Omega$ 的某些子集构成以下事件：

A_1＝“点数之和等于 2”$=\{(1,1)\}$，该事件只包含单个样本点，这说明一个样本点本身就是一个随机事件；

A_2＝“点数之和等于 5”$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$；

A_3＝“点数之和超过 9”$=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

事件对应于样本点的集合，对任一事件 A 来说，一个样本点 ω 要么属于 A 要么不属于 A. 若随机试验出现的基本结果（即样本点）$\omega\in A$，就称事件 A 发生；反之，一个试验发生了结果 A，就意味着 A 所包含的某个样本点 ω 恰为试验的结果. 如例 5 中两枚骰子掷出(5,5)，则事件 A_3 发生，事件 A_1，A_2 没有发生.

如果一个随机事件只包含一个样本点，则称此事件为**基本事件**. 换句话说，随机试验的每一个可能的结果（对应于一个样本点）就是一个基本事件，因此，有些书中直接称样本点为基本事件. 由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**（或**复杂事件**）. 例如，A_1 是基本事件，A_2 和 A_3 都是复合事件.

从集合论的观点来看，一个随机事件就是样本空间 Ω 的一个子集. 样本空间 Ω 含有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，另一个是空集 $\varnothing$. 为了方便研究，可将两者视为随机事件的极端情形. Ω 包含了所有可能的样本点，在每次试验中它总是发生，称 Ω 为**必然事件**；$\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中它总是不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**. 例如，掷一枚骰子，“出现点数不超过 6”是一个必然事件，“出现 7 点”是一个不可能事件.

1.1.3　样本空间的容量及事件数

在具体问题中，了解样本空间是研究随机现象的第一步. 样本空间的构成有时很简单，有时也相当复杂. 例如，将一枚硬币连掷 5 次，观察正反面出现的情况，此时罗列所有的样本点将是非常繁重的工作，幸好一般情况下不必如此，只需知道样本点的个数即可.

样本空间包含的样本点个数称为**容量**. 若容量有限，就是有限样本空间，如试验 E_1，E_2 中的 Ω_1，Ω_2. 有限样本空间是最简单的样本空间，研究它有助于深入分析更为复杂的样本空间.

若样本空间包含无穷多个样本点，即无限样本空间，此时又可细分为两类：一则包含无穷但可列个样本点，如 E_3 中的 Ω_3，这类空间的性质类似于有限样本空间；二则包含无穷但不可列个样本点，如 E_4 中的 Ω_4.

类似地，事件作为样本空间的子集，包含的样本点个数可以是有限个，也可以是无穷多个. 随机事件包含的样本点个数称为**事件数**，用 $N(A)$，$N(B)$ 等表示. 例如，E_3 中令事件 A 为“顾客人数小于 100”，则 $N(A)=100$；E_4 中令事件 B 为“弹着

点与靶心的距离大于 2cm”，则 $N(B)=\infty$.

1.2 事件间关系及运算

在一个样本空间中可以有很多的事件，不同的事件有各自不同的特性，彼此之间又存在一定的联系. 对事件之间关系的研究，有助于我们认识随机现象的本质，简化复杂事件的概率计算. 由于事件是一个集合，因此，事件之间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω. $A,B,A_k,B_k(k=1,2,\cdots)$ 为 E 中事件.

1.2.1 事件的运算

1. 事件的并

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”——这一事件称为 A 与 B 的**并事件**或**和事件**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 这个事件发生等价于事件 A 发生或事件 B 发生. 图 1-1中阴影部分即为 $A\cup B$. 显然，$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地，“事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生”的事件称为事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$. 这个事件发生等价于事件 A_1 发生，或事件 A_2 发生，…，或事件 A_n 发生.

无穷个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的并事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 定义为“事件 $A_1,A_2,A_3\cdots$ 中至少有一个发生”的事件.

例 1 掷一颗骰子，用 A_k 表示“出现 k 点”$(k=1,2,3,4,5,6)$. 设事件 A 为“出现奇数点”，则 $A=A_1\cup A_3\cup A_5$，即 A 是“出现 1 点”、“出现 3 点”和“出现 5 点”这三个事件的并事件.

2. 事件的交

“事件 A 与事件 B 同时发生”——这一事件称为 A 与 B 的**交事件**或**积事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB(图 1-2). $AB=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

例 2 随机地抽取一长方形工件进行检验，令 A 表示“长度合格”，B 表示“宽度合格”，A_1 表示“产品合格”，则 $A_1=AB$.

类似地，“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交事件**，记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

无穷个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的交事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 定义为“事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 同时发

生”的事件.

3. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”——这一事件称为 A 与 B 的**差事件**，记作$A-B$(图 1-3). $A-B=\{\omega|\omega\in A,但\ \omega\notin B\}$.

在例 2 中，令 A_2 表示“只有长度合格”，则 $A_2=A-B$.

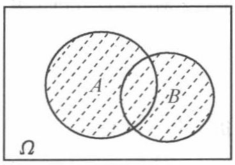


图 1-1

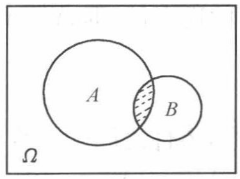


图 1-2

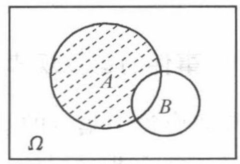


图 1-3

1.2.2　事件的关系

1. 包含

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 A **包含于** B 或 B **包含** A，记作$A\subset B$ 或$B\supset A$ (图 1-4). $A\subset B$ 意味着 A 所包含的样本点都属于 B.

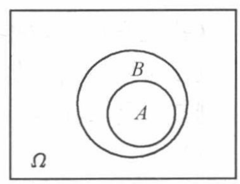


图 1-4

对任一事件 A，必有 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.

2. 相等

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

相等意味着 A 和 B 是同一个事件，它们包含的样本点完全相同.

3. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，两事件没有公共的样本点，则称 A 与 B 是**互不相容**或**互斥事件**(图 1-5). 例如，掷骰子试验中，“出现偶数点”与“出现奇数点”是两个互不相容事件.

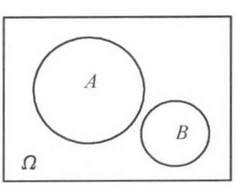


图 1-5

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件互不相容，即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称这 n 个事件互不相容，可见 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，一定是两两互不相容的事件. 例如，样本空间 Ω 中的各个样本点就是互不相容的事件.

4. 互逆

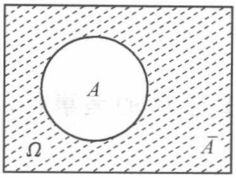


图 1-6

对于事件 A,"事件 A 不发生"也是一个事件,称为 A 的**逆事件**或**对立事件**,记作 $\overline{A}$,它是由 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的事件(图 1-6). 显然 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$.

由定义不难看出,$\overline{A}=\Omega-A$,并且逆事件是相互的,A 也是 $\overline{A}$ 的逆事件,即 $\overline{\overline{A}}=A$. 特别地,$\Omega$ 和 $\varnothing$ 互为逆事件.

1.2.3 事件的运算规律

与集合论中集合的运算一样,事件之间的运算满足下面的运算律.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律:$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$ABC=(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup(B\cap C)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) 德摩根律:$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

这些运算律可以推广到任意多个事件上去,利用运算律及事件间的相互关系,一个较复杂的事件能够表示成相对简单的形式,方便后面的概率计算.

例 3 设 A,B,C 是某试验中的 3 个事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;

(2) 事件"A,B,C 中至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$;

(3) 事件"A,B,C 中恰好发生两个"可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(4) 事件"A,B,C 中有不多于一个发生"可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

例 4 设 A 和 B 是任意两个事件,则事件 $(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示的含义是什么?

解 由题可知,$\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega-AB$,如图 1-2 所示的非阴影部分. 于是,

$$\begin{aligned}(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})&=(A\cup B)(\Omega-AB)=[A(\Omega-AB)]\cup[B(\Omega-AB)]\\&=[A\Omega-A\cap(AB)]\cup[B\Omega-B\cap(AB)]\\&=(A-AB)\cup(B-AB)=(A\cup B)-AB,\end{aligned}$$

这说明 $(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示 A 与 B 恰有一个发生.

1.3 随机事件的概率

对于随机现象,若只讨论它可能出现什么结果,意义不大,更有价值的是指出各种结果,即各种随机事件出现的可能性大小,只有这样,才能对随机现象做定量研究.

对一个随机事件 A,为了度量它在一次试验中发生的可能性大小,引入记号

$P(A)$，称为事件 A 的**概率**. 显然，除了必然事件和不可能事件外，任一事件在一次试验中可能发生、也可能不发生. 我们常常需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性大小，但是反映事件发生可能性大小的概率又如何度量计算呢？我们只能从试验中看到 A 的发生或不发生，发生的"可能性"却是无法观测的. 但是，直观看来，若 $P(A)$ 较大，即 A 在一次试验中发生的可能性较大，则在相同条件下进行多次试验，A 出现次数应该较多，即 A 发生的频率较大；反之，若 $P(A)$ 较小，A 的发生频率应较小. 所谓频率，指如下定义.

定义 1 设事件 A 在 N 次重复试验中出现了 n 次，则比值 $\frac{n}{N}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_N(A)$，即 $f_N(A)=\frac{n}{N}$.

显然，频率有如下性质：

$$0 \leqslant f_N(A) \leqslant 1, \quad f_N(\Omega)=1, \quad f_N(\varnothing)=0.$$

此外，当事件 A 与 B 互斥时，$f_N(A \cup B)=f_N(A)+f_N(B)$.

我们想得到概率，但概率无法观测；注意到上述概率与频率的直观联系，一个自然的想法就是从频率猜测概率，或者说，用频率作为概率的估计值. 但是，对同一个事件 A，当试验次数 N 不一样时，得到的 $f_N(A)$ 常常不同，用哪一个作为 $P(A)$ 的估计？

例 1 在掷硬币试验中，记录"正面朝上"这一事件出现的次数. 表 1-1 是试验结果.

表 1-1

试验序号	$N=50$		$N=500$	
	n	n/N	n	n/N
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	25	0.50	253	0.506
5	24	0.48	251	0.502
6	21	0.42	246	0.492
7	18	0.36	244	0.488
8	24	0.48	258	0.516
9	27	0.54	262	0.524
10	31	0.62	247	0.494

由表 1-1 可以看到，各轮试验中"正面朝上"事件出现的频率不完全相同，有一定波动性；但是，随着试验次数 N 的增大，它们总是围绕 0.5 上下波动，且逐渐稳定于 0.5. 这表明频率具有一定的**稳定性**.