国家级示范性高等院校精品规划教材

医学高等数学

YI XUE GAO DENG SHU XUE

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/邓平基 刘涛

副主编/孟晓瑜 赵军 刘春景

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

医学高等数学

YIXUE GAODENG SHUXUE

国家级示范性高等院校精品规划教材

医学高等数学

主　编　邓平基　刘　涛
副主编　孟晓瑜　赵　军　刘春景

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书根据高等医药院校医学类专业高等数学课程的基本要求编写而成,涉及微积分、微分方程、概率论的部分基础知识,具体包括数学与医学、函数与极限、导数与微分、一元函数积分学、微分方程、多元函数微积分、概率论初步、临床决策分析等内容.本书是医学生学习高等数学的入门教材.

本书可供基础、临床、预防、口腔、影像、护理等医学类相关专业师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/邓平基,刘涛主编.—天津:天津大学出版社,2012.6

国家级示范性高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5618-4383-3

Ⅰ.①医… Ⅱ.①邓…②刘… Ⅲ.①医学数学-高等学校-教材 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 129290 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 13
字　　数 324 千
版　　次 2012 年 6 月第 1 版
印　　次 2012 年 6 月第 1 次
定　　价 38.00 元

前　　言

本书是在我们多年讲授医学高等数学课程的基础上整理编写的.为医学专业学生讲授一点微积分是一件愉快的事情,然而作为一门数学课,总会难免有些习惯于强调知识结构的完整性.对于医学专业学生是否一定要按照数学理论体系的框架讲解呢?时间不允许.保持微积分的体系完整,适当降低理论难度,增加一些医学应用,是编写此书的初衷.另一方面,作为一门基础课,还要照顾后续课程的需要.医学统计学是医学研究的重要工具,而微积分和概率论是学习统计学所必需的,为此,本书最后对概率论部分阐述得较多一些,希望为医学专业学生继续学习统计学奠定一些数学基础.书中的最后一章,在概率的基础上简单介绍了临床决策分析的一些模型,必然是挂一漏万,但主要目的是引起读者的兴趣.

本书的编著,得到天津大学出版社和有关专家的支持和帮助,并参考了大量的教材和文献,在此表示由衷的敬意和感谢.同时还要感谢湖北医药学院对本书出版工作的支持,感谢湖北省人文社科重点研究基地的资助.由于编者水平有限,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请各位专家、读者批评指正.

编者

2012 年 2 月

目　　录

绪论　数学与医学

所谓生命现象数量化的方法，就是以数量关系描述生命现象．生物内在的或外在的，个体的或群体的，器官的或细胞的，直到分子水平的各种表现性状，依据性状本身的生物学意义，可以用适当的数值予以描述．人们深信数学也将像显微镜一样帮助人们去揭示生命的奥秘，医学数学的研究是通过数学模型来实现的．

一、早期的医学数学模型

数学应用于生命科学研究的历史可追溯到17世纪．1615年英国医生哈维（Harvey W.）在研究心脏时应用流体力学知识和逻辑推理方法推断出血流循环系统的存在，18世纪欧拉（Euler）利用积分方法计算了血流量问题，这些都是历史上应用数学研究生命科学的突出事例．大范围地将数学应用于生命科学与医学研究则出现在20世纪中叶．1935年，Mottram对小白鼠皮肤癌的生长规律进行了研究，认为肿瘤细胞总数 N 随时间的变化速度与 N 成正比，并获得了瘤体在较短时间内符合指数生长规律的研究成果．1944年奥地利著名物理学家薛定谔（Schrödinger E.）出版了《生命是什么》（*What is life*）一书，应用量子力学和统计力学知识描述了生命物质的重要特征．在薛定谔的影响下，沃森（Watson J. D.）和克里克（Crick F. H. C.）利用当时对蛋白质和核酸所做的射线结晶学研究以及其他与DNA结构有关的研究，于1953年建立了DNA超螺旋结构分子模型，验证了薛定谔的设想．在书中，薛定谔还利用非平衡热力学从宏观的角度解释生命现象，认为生命的基本特征是从环境中取得"负熵"，以使生物系统内的熵始终处于低水平．20多年后，普律高津（Prigogine I.）等人提出耗散结构理论，将对生命系统的研究推广到薛定谔预言的领域，为此普律高津于1977年荣获了诺贝尔奖．英国生理学家、生物物理学家Hodgkin和Huxley建立了神经细胞膜产生动作电位时膜电位变化的模型，揭示了神经电生理的内在机制，因而于1963年共享诺贝尔奖．美国科学家Cormack A. M. 基于二维Radon变换创建CT成像理论，获得了1979年的诺贝尔奖．丹麦科学家Jerne N. K. 应用数学原理研究免疫网络理论，获得1984年的诺贝尔奖．

生命系统是一个动态系统，作为世界上最复杂的系统之一，它具有调节机制复杂、多输入、多输出等特点，而且由于很多变量或参数很难在人体内测量及控制，仅仅通过实验研究来揭示其间的复杂关系，会非常困难且不易得到一致的结论．建立生命系统的数学模型，有利于获得生命系统的动态与定量变化，帮助阐明生命医学中有关作用机制等基础性问题，同时通过模型及仿真实验不仅可以得到正常状态，还可以获得异常或极端异常状态下的生理变化预测，以及代替一些技术复杂、代价高昂或难以控制和重现的实验，为临床或特定条件下的方案设计提供预测及指导．此外，从伦理学的角度，人们也希望医学研究中能够减少实验动物的数量，减轻临床试验中人体试验对象不必要的痛苦，因此生理系统的仿真与建模在生物医学领域中的研究中日益受到重视．

二、医学数学的若干路径

数学不仅推动了人们探索生命世界的步伐,事实上两者结合已经产生了多个十分活跃的学科. 1901 年 Pearson 创建生物统计学后,概率论与数理统计方法在医学上得到了非常广泛的应用,如目前常用的显著性检验、回归分析、方差分析、最大似然模型、决策树概率分布、微生物检测等,都属于基于统计学原理的数学模型及分析. 1931 年, Volterra 在研究食物链的基础上,应用微分方程组研究生物动态平衡,完成了《生态竞争的数学原理》,开创了生物数学(biomathematics)这一新的分支. 近年来,可视人及虚拟人的研究、计算医学(computational medicine/biology)、生物信息学(bioinformatics)、生理组学(Physiome)等新的学科及领域的出现,使数学这一工具在生物医学研究中的作用日益突出.

20 世纪 60 年代末,法国数学家托姆从拓扑学中提出一种几何模型,能够描绘多维不连续现象,他的理论称为突变理论. 生物学中许多处于飞跃的、临界状态的不连续现象,都能找到相应的跃变类型给予定性的解释. 跃变论弥补了连续数学方法的不足之处,现在已成功地应用于生理学、生态学、心理学和组织胚胎学. 对神经心理学的研究甚至已经指导医生应用于某些疾病的临床治疗.

继托姆之后,跃变论不断地发展. 例如塞曼又提出初级波和二级波的新理论. 跃变理论的新发展对生物群落的分布、传染疾病的蔓延、胚胎的发育等生物学问题赋予新的解释.

传统的集合概念认为一个元素属于某集合,非此即彼、界限分明. 可是生物界存在着大量界限不明确的模糊现象,而集合概念的明确性不能贴切地描述这些模糊现象,给生命现象的数量化带来困难. 1965 年扎德提出模糊集合概念,模糊集合适合于描述生物学中许多模糊现象,为生命现象的数量化提供了新的数学工具.

1987 年,美国开始了人类基因组研究计划,有两个任务:第一个是“读出”,即研究出人类基因组的全部核苷酸的顺序;第二个是“读懂”,即找出全部基因在染色体上的位置,了解它们的功能. 用数学的语言来说,人类基因组计划的最基本、最直接的结果是得到一个由 4 个字母(A,G,C,T)可重复排列而组成的长度为 3×10^9 的一维链. 解读后,人们不仅可以获得静态的结构信息,而且还能得到动态的四维(时空)调控信息. 整个基因组测序完成后的数据可以构成一本 100 万页的书,其上只有 4 个字母的反复出现. 如何处理、存储和分析这些海量数据? 由此产生一门新的交叉学科——生物信息学.

三、药代动力学模型实例

药代动力学(pharmacokinetics)是定量研究药物在生物体内吸收、分布、排泄和代谢等过程的动态变化规律的一门学科. 于 1937 年由 Teorell 开创,主要内容是应用动力学原理、体外实验数据以及人体生理学知识,结合数学模型,定量研究药物在体内的运转规律,为药物的筛选提供指导.

新药研发过程费用昂贵、时间冗长、淘汰率高,大约有 90% 的候选药物在临床期间被淘汰,主要原因有口服吸收性差、生物利用度低、半衰期过短等等. 为提高新药研究的效率和安全性、降低药物研发成本,药代动力学模型已为全球各大制药公司应用. 传统的新药研发流程中,药代动力学的应用主要在药物研发的中后期,近年来,人们开始在药物研发的早期对其药代动力学特性进行模拟研究,以尽早淘汰药代动力学参数不理想的候选药物,提高研发

效率、降低成本. 比如药物虚拟筛选(virtual screening)就是指在化合物合成前,先通过计算机模拟预测其药动学相关特性,进行初步筛选. 此外,药代动力学模型在研究药物处置及作用机制、治疗药物监测及个体化用药、新药开发等方面也发挥着重要作用.

药代动力学中静脉恒速注射的一个模型:

把剂量为 D_0 的丹参注射液在 T 时间内以恒速(速度 $k_0=\frac{D_0}{T}$)滴入人体,人体内药物量用 x 表示,表现分布容积记为 V,显然当 $t=0$ 时 $x=0$,求体内血药浓度 C 随时间 t 的变化规律.

分析　注射过程中除了有药物输入速度外,同时还有一个代谢速度记为 kx,这样体内药物量 x 变化的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx+k_0.$$

其中 k 为代谢速度常数. 由方程和初始条件可求得体内药量 x 随时间 t 的变化规律,详细过程将在第 4 章中给出.

表现分布容积即理论上药物均匀分布所占有的体液容积,$x(t)$ 除以 V. 就得到体内血药浓度 $C(t)$,即

$$C(t)=\frac{k_0}{kV}(1-\mathrm{e}^{-kt}).$$

第1章　函数与极限

当代数学的一个最主要的起源地是希腊. 在希腊文明的古典时期(即公元前6世纪至公元前3世纪),数学与哲学的关系密不可分,希腊人对许多数学问题的处理带有浓厚的思辨色彩. 函数概念的出现并不是思辨的需要,而是更实际的经济利益的驱动. 例如三角学,自古希腊就有系统的研究,这是为了研究天体的运行,也是为了航海的需要,所以当时不只是有平面三角学还有球面三角学. 随着资本主义时代的来临,人类活动的广度与深度大为增加,例如对数的出现就是为了简化航海中的计算.

粗略地讲,初等数学是常量的数学,高等数学是变量的数学. 而描述变量间相互关系的是函数,我们将要学习的微积分,其主要的研究对象就是函数. 函数产生于人类的活动,有一个不断改进和抽象的过程.

在微积分发展的早期,微积分的创始人(牛顿、莱布尼茨)都只是讨论具体的函数,如幂函数、指数与对数函数、三角函数和一些很特殊的与物理问题相关的曲线,如旋轮线、悬链线等等. 他们研究的对象基本上就是这些. 大约到18世纪,才开始有了一般的函数概念. 例如欧拉就给出了两种"说法",其一见于他的《无穷小分析引论》(1748),他指出函数即变量和常数组合而成的表达式,其中他概括了某些代数函数和某些超越函数,并且看出了它们的区别. 欧拉的第二种说法是:$y=f(x)$即在xy平面上"随手画出的曲线". 欧拉的第二种说法的来源显然受到当时关于弦振动问题研究的影响,因为一根弦的形状是可以随手画出来的. 在随后函数概念进一步的发展中,傅里叶的研究起了极大的作用,下面我们将从集合论的角度给出函数的定义.

1.1　函　数

一、常量与变量

在日常生活或生产实践中,经常会遇到各种不同的量. 例如:时间、速度、质量、温度、成本和利润等. 这些量一般可分为两类. 一类在所研究的过程中保持不变,这样的量称为常量,而另一类在所研究的过程中是变化的,这样的量称为变量.

在同一过程中,往往会有几个变量同时变化,但是它们的变化不是孤立的,而是按照一定的规律相互联系着,也就是说它们之间存在着相互依赖关系.

例1-1　自由落体的运动规律为

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中h表示下降的距离,t表示下落的时间,g表示重力加速度(视为常量).

这个公式给出了在物体自由下落的过程中,距离h与时间t之间的依赖关系. 而这种变量之间的相互依赖关系,用数学的语言描述出来就得到了函数的定义.

二、函数的概念

定义 1-1　设 x,y 是两个变量,D 为非空数集. 如果按照某种对应法则(或关系)f,对于任意的 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中,x 称为自变量,其变化范围 D 称为函数的定义域,通常记作 $D(f)$. y 称为因变量,当自变量 x 取遍 D 上每一个值时,相应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数的值域,通常记作 $R(f)$.

如果 x_0 是一个确定的数,则 $f(x_0)$ 表示自变量 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$.

例 1-2　判断 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数.

解　$y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因此,虽然这两个函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内相同的 x 值所对应的函数值相同,但由于它们的定义域不同,因而它们不是同一函数.

例 1-3　求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\ln(x-1)}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

解　(1)要使函数 y 有意义,当且仅当 $\ln(x-1)\geqslant 0$,要使 $\ln(x-1)\geqslant 0$,当且仅当 $x-1\geqslant 1$,所以函数的定义域是 $[2,+\infty)$,也可以用集合的一般形式表示为 $D=\{x\,|\,x\geqslant 2\}$.

(2)要使函数 y 有意义,必须同时满足分母不为零且偶次根式的被开方式非负,反正弦函数符号内的式子绝对值小于或等于 1. 即

$$\begin{cases}3-x^2>0,\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ 0\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

故不等式组的解为 $0\leqslant x<\sqrt{3}$. 因此,该函数的定义域为 $[0,\sqrt{3})$. 也可以表示为

$$D=\{x\,|\,0\leqslant x<\sqrt{3}\}.$$

例 1-4　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[2,5]$,求 $f(2x+1)$ 的定义域.

解　要使函数 $f(2x+1)$ 有意义,当且仅当 $2\leqslant 2x+1\leqslant 5$,即 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$,所以 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

由函数的定义可知,对应法则和定义域是函数的两个要素,在描述任何一个函数时,必须同时说明这两个要素. 只有两个函数的对应法则和定义域都相同时,才能说这两个函数是相同的函数.

函数的定义域,是使得函数有意义的自变量的取值范围,求函数的定义域时应注意以下

常用规划：

1）代数式中分母不能为零；

2）偶次根式内被开方数非负；

3）对数中真数表达式大于零；

4）反三角函数还要看值域，例如 $y=\arcsin x$，要满足 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant\frac{\pi}{2}$；

5）多个函数代数和的定义域，应是各函数定义域的公共部分；

6）对于表示实际问题的解析式，还应该保证符合实际意义.

函数有以下几种表示方法.

（1）解析法（公式法）

解析法就是把两个变量之间的关系直接用数学式子表示出来，必要的时候还可以注明函数的定义域、值域，这种表示函数的方法称之为解析法. 是高等数学中最常见的函数表示法，它便于我们进行理论研究. 如，①$y=\sqrt{\ln(x-1)}$；② $y=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$等.

（2）表格法

表格法就是把自变量和因变量的对应值用表格形式列出. 这种表示法有较强的实用价值，比如三角函数表、常用对数表等等.

（3）图示法

图示法就是用某坐标系下的一条曲线反映自变量与因变量的对应关系的方法. 例如，气象台自动温度计记录了某地区的一昼夜气温的变化情况，这条曲线在直角坐标系下反映出来的就是一个函数关系. 这种方法，几何直观性强，函数的基本性态一目了然，但它不利于理论研究.

三、函数的性质

1. 有界性

定义 1-2 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或者称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是有界函数，但是函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数. 因此，有界性是针对于某一区间而言的.

2. 单调性

定义 1-3 设 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数，如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上为单调增加函数；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上为单调减少函数.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 如果 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数，则把区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 例如，函数 $y=x^2$ 的单调增加区间是 $[0,+\infty)$，其单调减少区间是 $(-\infty,0)$.

单调函数的图像特征：单调增加函数其图像表现为自左至右是单调上升的曲线； 单调

减少函数其图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

3. 奇偶性

定义 1－4　设 $f(x)$ 是定义在集合 D（D 是关于原点对称的非空集合）上的函数. 如果对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数.

通常见到的偶函数和奇函数它们的定义域是关于原点对称的区间.

例如，$y=\sin x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$y=\cos x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称（如图 1－1 所示）.

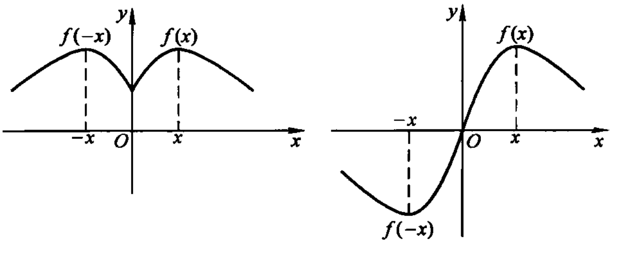

图　1－1

例 1－5　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$；　　(2) $f(x)=x\sin x$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(4) $f(x)=4x+\cos x$.

解　(1) 因为

$$f(-x)=\frac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\ &=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &=\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\\ &=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(4) 因为

$$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x,$$

从而

$$f(-x)\neq f(x)\quad 且\quad f(-x)\neq -f(x),$$

所以函数$f(x)=4x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

4. 周期性

定义 1-5 设函数$f(x)$的定义域是D,如果存在一个常数$T\neq 0$,使得对于任意的$x\in D$,都有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是以T为周期的周期函数.当$f(x)$以T为周期时,对于任意的整数m,mT都是$f(x)$的一个周期.而我们所说的周期一般是指最小正周期.

例如,$\sin x$、$\cos x$的最小正周期都是2π,$\tan x$、$\cot x$的最小正周期都是π.

关于函数的以上四个性质,需要说明的是:函数的有界性和单调性是函数在某个区间上的性质,而函数的奇偶性和周期性则是函数在整个定义域上的性质.

四、初等函数

1. 基本初等函数

在函数关系中,有几种函数是最常见的最基本的,它们是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数.这几类函数称为基本初等函数.

(1)常数函数$y=c$.

常数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论x取何值,都有$y=c$.所以,它的图像是过点$(0,c)$平行于x轴的一条直线,它是偶函数.

(2)幂函数$y=x^a$(a为常数).

幂函数的情况比较复杂,我们分$a>0$和$a<0$来讨论.当a取不同值时,幂函数的定义域不同,为了便于比较,我们只讨论$x\geqslant 0$的情形,而$x<0$时的图像可以根据函数的奇偶性确定.

当$a>0$时,函数的图像过原点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界,如图1-2所示.

当$a<0$时,图像不过原点,但仍过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调减少且无界,曲线以x轴和y轴为渐近线,如图1-3所示.

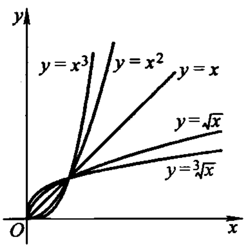

图 1-2

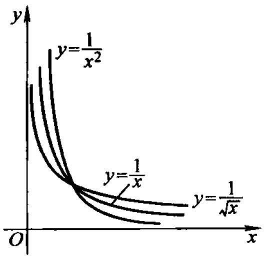

图 1-3

(3)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$.

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$.由于无论x取何值,总有$a^x>0$,且$a^0=1$,所以它的图像全部在x轴上方,且通过点$(0,1)$.也就是说,它的值域是$(0,+\infty)$.

当$a>1$时,函数单调增加且无界,曲线以x轴的负半轴为渐近线;

当$0<a<1$时,函数单调减少且无界,曲线以x轴的正半轴为渐近线.如图1-4所示.

(4) 对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$.

它的定义域是$(0,+\infty)$，图像全部在 y 轴右方，值域是$(-\infty,+\infty)$. 无论 a 取何值，曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线. 如图 1－5 所示.

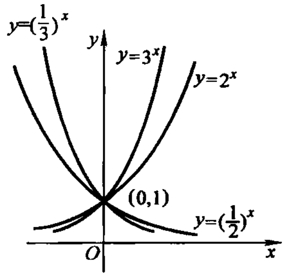

图　1－4

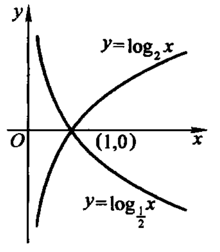

图　1－5

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

以无理数 e＝2.718 281 8…为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数，简记作：$y=\ln x$，是微积分中常用的函数.

(5) 三角函数.

三角函数包括下面 6 个函数：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界，如图 1－6 所示.

函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界，如图 1－7 所示.

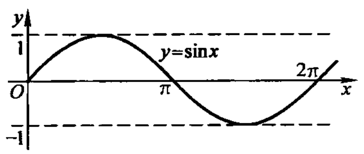

图　1－6

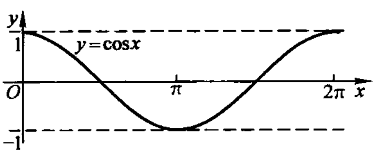

图　1－7

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个周期内单调增加，以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1－8 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个周期内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1－9 所示.

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论，只需知道它们分别为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 即可.

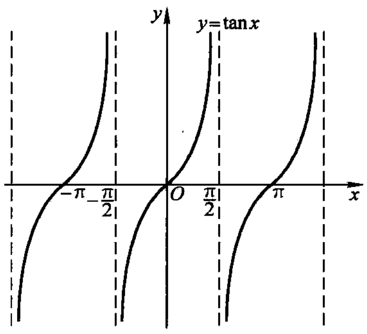

图 1-8

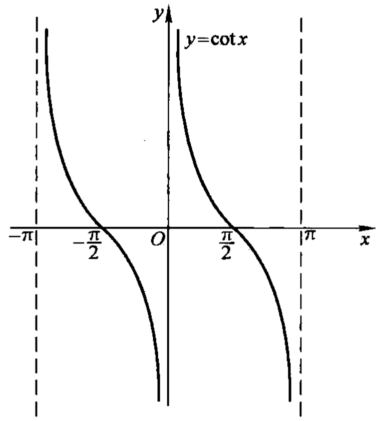

图 1-9

(6)反三角函数.

常用的反三角函数有4个:反正弦函数 $y=\arcsin x$;反余弦函数 $y=\arccos x$;反正切函数 $y=\arctan x$;反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 它们是相应三角函数的反函数.

函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,是单调增加的奇函数,有界,如图1-10所示.

函数 $y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$,是单调减少的函数,有界,如图1-11所示.

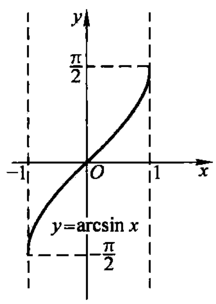

图 1-10

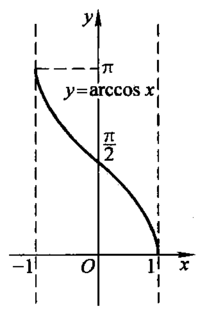

图 1-11

函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,它是单调增加的奇函数,在定义域上有界,如图1-12所示.

函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,\pi)$,它是单调减少的函数,在定义域上有界,如图1-13所示.

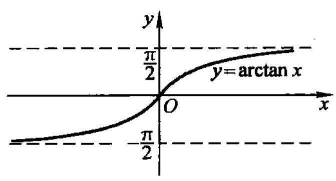

图 1-12

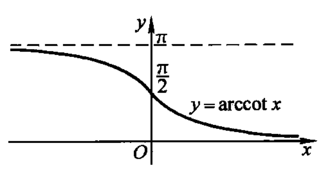

图 1-13