



面向21世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 结构力学 II

——专题教程

第3版

龙驭球 包世华 袁 驷 主编

龙驭球 包世华 匡文起 袁 驷 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪 课程 教材  
Textbook Series for 21st Century

# 结构力学 II

J I E G O U L I X U E

## ——专题教程

ZHU AN TI J I A O C H E N G

### 第 3 版

龙驭球 包世华 袁 驷 主编

龙驭球 包世华 匡文起 袁 驷 编著



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是在第1版(面向21世纪课程教材,2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖)和第2版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材,2007年度普通高等教育精品教材)的基础上修订而成的;以本教材为基础的教学实践获2001年国家级教学成果一等奖,清华大学“结构力学”课程被评为2003年度国家精品课程。

本次修订字斟句酌,力求准确,并增写新章(第14章),反映学科新发展。修订内容共18章,仍编为《结构力学I——基本教程》和《结构力学II——专题教程》。基本教程着眼于为课程打好基础,落实课程的基本要求;专题教程着眼于扩大和提高,各校可根据实际情况选择其中不同层次的增选和专题内容,不拘一格地提升教学水平。全书采用四色印刷,书后配有最新版的《结构力学求解器》。

本书为《结构力学II——专题教程》(第3版),共8章,主要内容包括静定结构总论、超静定结构总论、能量原理、结构矩阵分析续论、结构动力计算续论、结构的稳定计算、结构的极限荷载、结构力学与方法论等。

卷I后附有光盘1张,内容包括结构力学求解器、刚架计算框图和源程序等。另外,与本书配套的还有《结构力学学习指导》、《结构力学网络课程》和《结构力学电子教案》。配套的教学软件充分发挥多媒体先进的表现手段,营造一种良好的学习环境,既可作为工科学生在网络环境下自主、完整、系统地学习结构力学的课程,也可作为从事土建、水利等领域工程技术人员知识更新的自学环境。

本书可作为高等学校土建、水利、力学等专业结构力学课程的教材,也可供有关工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

结构力学.2,专题教程/龙驭球,包世华,袁驷主编;龙驭球等编著.--3版.--北京:高等教育出版社,2012.8

ISBN 978-7-04-034822-4

I. ①结… II. ①龙… ②包… ③袁… III. ①结构力学-高等学校-教材 IV. ①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第140963号

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.landraco.com">http://www.landraco.com</a>
印 刷	山东鸿杰印务集团有限公司		<a href="http://www.landraco.com.cn">http://www.landraco.com.cn</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16	版 次	2001年1月第1版
印 张	21.5		2012年8月第3版
字 数	520千字	印 次	2012年9月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	49.80元
咨询电话	400-810-0598		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 34822-00

## 第 3 版序

本书第 1 版是面向 21 世纪课程教材。本版属第 3 版,是根据“结构力学课程教学基本要求”(教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制订),在第 2 版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)的基础上修订而成。值得一提的是以下几点(两老三新):

1. “卷 I 保底,卷 II 开花”,沿用第 2 版老格局。
2. 字斟句酌,力求准确,保持过去老作风。
3. 增写新章(第 14 章),反映学科新发展。
4. 《结构力学求解器》升级,增加包络图新内容。
5. 采用四色印刷,让新书换上新衣裳。

书稿得到东南大学单建教授的审阅和指点,谨致谢意,并无端想起东坡诗句:人间有味是清欢。

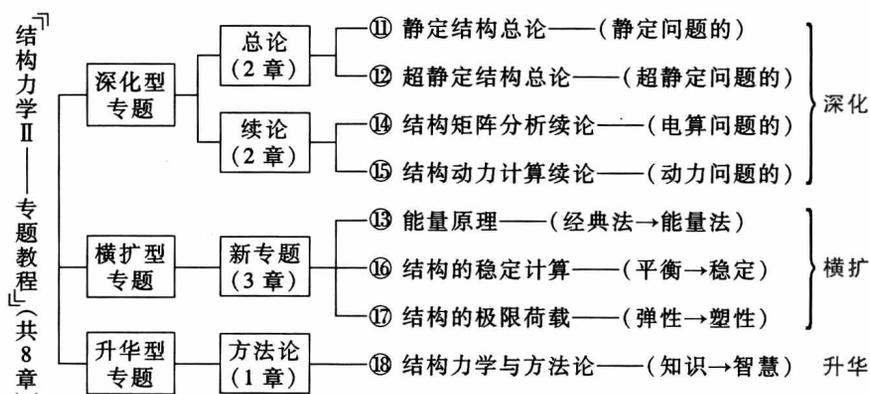
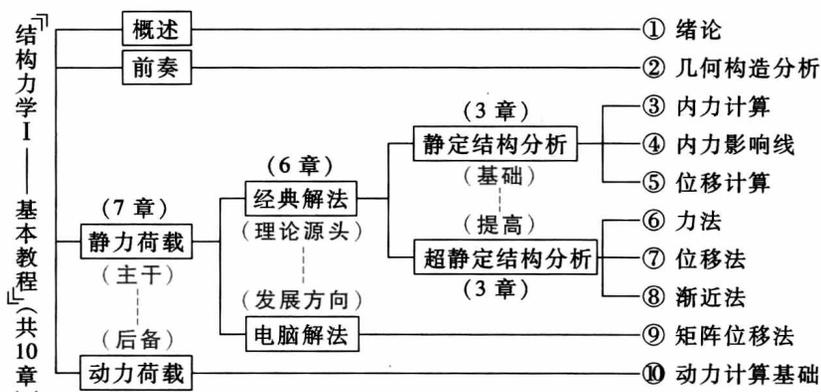
以书会友,倾听老师和同学们的批评、议论和争鸣,这是作者的真情。

阅读也是悦读,学习更需游赏。下面绘出两帧《结构力学 I——基本教程》、《结构力学 II——专题教程》游赏图,与读者一同游赏。边游边赏,边赏边游。

作 者

2012 年春于清华园

《结构力学 I —— 基本教程》、《结构力学 II —— 专题教程》游赏图



## 第 2 版序

本书第 2 版是第 1 版的传承和发展。具有以下特点：

### 一、传承原有编写风格

继续保持“打好基础，脉络清晰，理论联系实际，符合认识规律”的编写方针。继续发扬纸质教材与电子教材的互补作用，以《结构力学求解器》为工具，提高学生利用计算机分析结构的能力。继续加强能量原理与方法论等方面的教学内容，提高学生的理论水平和科学素质。

### 二、采用新的编排方针

第 2 版采用新的编排方针：首先把全书内容明确地分为基本内容与增选、专题内容两部分，然后将基本内容编成结构力学 I——基本教程；将增选、专题内容编成结构力学 II——专题教程。

在第 2 版里，卷 I 与卷 II 的分工是非常明确的。卷 I 只包括课程教学的基本要求。对全国各校来说，课程教学的基本要求应当是统一的，是“死”的。其目的是保证课程的基本教学质量，或者说是“保底”。卷 II 包含一些各具特色的增选、专题内容，在“保底”的基础上，各校可根据各自情况自行选用。对全国高校来说，这些增选、专题内容应当是不拘一格的，是“活”的。这种在“保底”基础上不拘一格地增选和提升，可以比喻为“开花”。概括地说，“卷 I 保底，卷 II 开花”，这就是新版采用的新的编排方针。

要“开花”，必先“保底”。“保底”是硬任务，“开花”是活功夫。一硬一活，才会形成既有扎实功底而又充满活力的学习景象。我们希望，体现“保底—开花”精神的第 2 版教材将会更好地适应我国技术基础课程教学发展的需求，适应不同高校对教材类型的多样性需求。

继第 1 版之后，第 2 版书稿又得到西安建筑科技大学刘铮教授的审阅和指点，谨致谢意。

欣逢青藏铁路全线通车，特以拉萨河特大铁路桥的倩影作为封面，以誌喜庆。

本书封面照片由拉萨指挥部宣传部干章林先生提供，在此表示感谢。

恳请批评和指正。

作 者

2006 年夏于清华园

# 第 1 版序

教材建设是一项需要长期积累而又不断翻新的工作,既要锲而不舍、精益求精,又要善于探索、有所创新。本书是在清华大学四十多年结构力学教材建设和近几年教学改革实践的基础上编写的,主要想在以下几个方面作些新的尝试和安排:

一、由一本书扩充为三书鼎立。由于结构力学计算机化的进程日新月异,以及在计算机化的形势下结构定性分析的能力培养日益显得更为重要,因此除编写一本《结构力学教程》侧重于经典结构力学的基本理论和基本方法外,还拟编写两本配套教材,即《程序结构力学》及《定性结构力学》,分别侧重于计算机方法和定性分析方法。三书鼎立,相互呼应,以期适应新世纪、新形势的新要求。

二、为计算机化提供新的基础知识和新工具。在为矩阵位移法配置的计算机程序方面,有 FORTRAN 77 程序, Fortran 90 程序。此外,还引入作者教学和科研成果《结构力学求解器》作为新工具,提高解算大型结构、复杂结构的例题、习题的能力,开拓教学内容的广度和深度,利用动画显示,提高对结构性能的感性认识。

三、将虚功-能量方法贯通全书,提高理论水平。以前的结构力学教材也讲一点虚功-能量方法,但讲得太晚,太集中,学与用离得太远。针对这种情况,本书改为“提前讲、分段讲、就近用”的作法,以便收到“由浅入深、分散难点、学了就用、便于生根”的效果,从而进一步提高理论水平。计算机化不仅不排斥力学理论,而且更加需要力学理论的指导,呼唤力学理论的深化。

四、注意培养思维能力和科学素质。为了把力学方法上升到方法论的高度,在书中专门写了四节:

- 方法论(1)——学习方法(第 1 章)。
- 方法论(2)——静定结构部分(第 6 章)。
- 方法论(3)——超静定结构部分(第 12 章)。
- 方法论(4)——结构力学之道(最后一章)。

为了指导学习和启发思考,专门写了两章“总论”,分别对静定结构和超静定结构两大部分内容进行融会贯通的梳理和开阔视野的指点;几乎每一章都专门写了“小结”和“思考与讨论”两节,引导读者跨进更广的思考空间。

五、适当更新内容。除了删去和压缩比较陈旧的内容外,还注意扩大专业覆盖面,新加悬索、空间结构等内容,适当介绍一些科研成果,包括作者新近的部分学术成果。

总的来说,“守本翻新”是本书的编写方针。守本,是指继续保持“打好基础,脉络清晰,理论联系实际,符合认识规律”的编写风格。翻新,是指进行一些经过初步实践的新尝试,包括上面提到的五点。

本书内容各校可根据具体教学要求选用,带\*号者为选学、提高内容。

本书稿请西安建筑科技大学刘铮教授和东南大学单建教授审阅,在审阅中提了不少宝贵意见。清华大学雷钟和教授提供了本书部分思考题及习题,张玉良副教授提供了 FORTRAN 77 程序的初稿。作者谨向他们表示衷心的感谢。

欢迎批评,恳请指正。

作 者

1999 年冬于清华园

## 主要符号表说明

在实施国家标准《量和单位》(GB 3100 ~ 3102—93)的过程中,为保证国家标准和现有惯例的衔接,本书作如下说明,请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量、名称和符号,按国家标准使用,注重量的物理属性。如,以前称剪应力 $\tau$ 、剪应变(剪切角) $\gamma$ ,现改称切应力 $\tau$ 、切应变 $\gamma$ ;又如,各种力(包括荷载、反力和内力)都用 $F$ 作为主符号,而将其特性以下标(上标)表示;等等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移),为了体现其广义性(有时还有未知性),考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整,本书仍沿用 $X$ (多余力未知力)、 $\Delta$ 和 $\delta$ (位移)、 $c$ (支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位,则视具体问题而定。

3. 在结构力学中经常应用“单位量”的概念,如单位力 $X=1$ ,单位荷载 $F_p=1$ ,单位位移 $\Delta=1$ 等。现以单位力 $X=1$ 为例加以说明。单位力 $X=1$ 是一种简称,详细地说,是指数值为1而其量纲指数都为零(量纲并不为零,量纲为一)的特定广义力 $\bar{X}=1$ (这里, $\bar{X}$ 与 $X$ 在数值上相等,但量纲不同。 $\bar{X}$ 是一个量纲一的量,以前称为无量纲量)。单位量的概念主要用于求比例系数(或称影响系数)。仍以力 $X$ 引起某量 $M$ 的情况为例,二者的比例系数为 $\bar{M}=\frac{M}{X}$ 。在线性问题中,比例系数是一个重要的概念。

4. 本教材中某些符号及有关公式运算中的单位表示,考虑以往教材的习惯和结合工程实际运算的方便,作了必要的处理。具体情况在本教材的相应处已有说明。

## 主要符号表

$A$	面积
$a$	振幅
$c$	支座广义位移、粘滞阻尼系数
$C$	弯矩传递系数
$c_{cr}$	临界阻尼系数
$d$	结间距离
$E$	弹性模量
$E_p$	势能
$E_c$	余能
$f$	拱高、矢高、工程频率
$F_p$	集中荷载
$\mathbf{F}_p$	荷载向量
$F_H$	水平推力
$F_x, F_y$	水平( $x$ )、竖向( $y$ )的分力
$F_N$	轴力
$F_{N_x}, F_{N_y}$	轴力在水平( $x$ )、竖向( $y$ )的分力
$F_Q$	剪力
$F_Q^L, F_Q^R$	截面左、右的剪力
$F_Q^F$	固端剪力
$F_{pe}$	欧拉临界荷载
$F_{per}$	临界荷载
$F_{pu}$	极限荷载
$F_p^+$	可破坏荷载
$F_p^-$	可接受荷载
$F_e$	弹性力
$F_l$	惯性力
$F_c$	阻尼力
$F_R$	广义反力、反力合力
$\bar{\mathbf{F}}^e$	局部坐标系下单元杆端力向量
$\mathbf{F}^e$	整体坐标系下单元杆端力向量
$\bar{\mathbf{F}}^{Fe}$	局部坐标系下单元固端力向量

$F^{Fe}$	整体坐标系下单元固端力向量
$G$	切变模量
$i$	线刚度
$I$	惯性矩
$I$	单位矩阵
$k$	刚度系数、切应力分布不均匀系数
$\bar{k}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
$k^e$	整体坐标系下单元刚度矩阵
$K$	结构刚度矩阵
$m$	质量、分布弯矩
$\bar{m}$	线分布质量
$M$	质量矩阵
$M$	力矩、力偶矩、弯矩
$M^f$	固端弯矩
$M_u$	极限弯矩
$M_e$	弹性极限弯矩
$N$	形函数矩阵
$p$	均布荷载集度
$P$	广义荷载、广义力
$P^e$	单元结点荷载向量
$P$	结构结点荷载向量
$q$	均布荷载集度
$R$	半径
$r$	半径、反力影响系数
$S$	转动刚度
$t$	时间
$T$	周期、动能
$T$	坐标转换矩阵
$V_\varepsilon$	应变能
$V_P$	荷载势能
$u$	水平位移
$v$	竖向位移、挠度、速度
$v_\varepsilon$	应变能密度
$v_c$	应变余能密度
$V_c$	应变余能
$W$	功、计算自由度、弯曲截面系数
$X$	广义未知力、广义多余未知力
$Y$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵

$y$	位移
$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$	速度
$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$	加速度
$Z$	影响线量值
$\alpha$	线膨胀系数、初相角
$\beta$	动力系数
$\Delta$	广义未知位移
$\Delta$	位移向量
$\Delta^e$	单元杆端位移向量
$\delta$	柔度系数、位移影响系数
$\varepsilon$	线应变
$\mu$	力矩分配系数
$\kappa$	曲率
$\varphi$	弦转角
$\gamma_0$	平均切应变
$\theta$	截面的转角、干扰力频率
$\xi$	阻尼比
$\sigma_b$	强度极限
$\sigma_s$	屈服应力
$\sigma_u$	极限应力
$\omega$	圆频率



面向21世纪课程教材



普通高等教育“十一五”  
国家级规划教材



普通高等教育“十五”  
国家级规划教材

# 目 录

第 11 章	静定结构总论	1
§ 11-1	几何构造分析与受力分析之间的对偶关系	1
§ 11-2	零载法	4
§ 11-3	空间杆件体系的几何构造分析	7
§ 11-4	静定空间刚架	9
§ 11-5	静定空间桁架	14
§ 11-6	悬索结构	20
§ 11-7	静定结构的受力特性	23
§ 11-8	各种结构形式的受力特点	26
§ 11-9	简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩	28
§ 11-10	位移影响线	31
§ 11-11	用求解器计算结构的内力包络图	32
§ 11-12	小结	32
§ 11-13	思考与讨论	33
习题		34

第 12 章	超静定结构总论	37
§ 12-1	广义基本结构、广义单元和子结构的应用	37
§ 12-2	分区混合法	43
§ 12-3	超静定结构的受力特性	48
§ 12-4	结构计算简图续论	51
§ 12-5	支座简图与弹性支承概念	64
§ 12-6	结点简图与次内力概念	66
§ 12-7	剪切变形对超静定结构的影响	69
§ 12-8	连续梁的最不利荷载分布及内力包络图	72
§ 12-9	小结	75
§ 12-10	思考与讨论	78

习题		79
----	--	----

第 13 章	能量原理	85
§ 13-1	可能内力与可能位移	85
§ 13-2	应变能与应变余能	91
§ 13-3	势能驻值原理	97
§ 13-4	势能法与位移法之间的对偶关系	99
§ 13-5	由势能原理推导矩阵位移法基本方程	105
§ 13-6	余能驻值原理	110
§ 13-7	余能法与力法之间的对偶关系	113
§ 13-8	分区混合能量驻值原理	118
§ 13-9	卡氏第一与第二定理和克罗蒂-恩格塞定理	121
§ 13-10	势能和余能偏导数定理——卡氏定理的推广	125
§ 13-11	分区混合能量偏导数定理	129
§ 13-12	小结	131
§ 13-13	思考与讨论	135
习题		136

第 14 章	结构矩阵分析续论	140
§ 14-1	概述	140
§ 14-2	单元平衡矩阵及其两种方案(局部坐标系)	140
§ 14-3	单元几何矩阵及其两种方案(局部坐标系)	144
§ 14-4	“平衡-几何”互伴定理	147
§ 14-5	整体坐标系中的单元平衡矩阵与单元几何矩阵	149
§ 14-6	整体平衡矩阵与整体几何矩阵	152
§ 14-7	本构矩阵	154

§ 14-8	刚度矩阵的新算式 .....	156	响的二阶分析 .....	251	
§ 14-9	矩阵内力法及其两种应用 方案 .....	158	§ 16-11	用求解器求临界荷载和失 稳形态 .....	258
§ 14-10	超静定结构的矩阵冗力法 .....	160	§ 16-12	小结 .....	258
§ 14-11	思考与讨论 .....	161	§ 16-13	思考与讨论 .....	259
习题	.....	165	习题	.....	261
<b>第 15 章</b>	<b>结构动力计算续论 .....</b>	<b>166</b>	<b>第 17 章</b>	<b>结构的极限荷载 .....</b>	<b>266</b>
§ 15-1	多自由度体系的自由振动 .....	166	§ 17-1	概述 .....	266
§ 15-2	多自由度体系主振型的正交 性和主振型矩阵 .....	173	§ 17-2	极限弯矩、塑性铰和极限状态 .....	267
§ 15-3	多自由度体系的强迫振动 .....	178	§ 17-3	超静定梁的极限荷载 .....	269
§ 15-4	无限自由度体系的自由振动 .....	183	§ 17-4	比例加载时判定极限荷载的 一般定理 .....	273
§ 15-5	无限自由度体系自由振动的 常微分方程求解器解法 .....	185	§ 17-5	刚架的极限荷载——增量变 刚度法 .....	276
§ 15-6	近似法求自振频率 .....	190	§ 17-6	用求解器求极限荷载 .....	284
§ 15-7	有限元法求刚架的自振频率 .....	197	§ 17-7	小结 .....	284
§ 15-8	用求解器求解自振频率与 振型 .....	201	§ 17-8	思考与讨论 .....	284
§ 15-9	小结 .....	201	习题	.....	285
§ 15-10	思考与讨论 .....	201	<b>第 18 章</b>	<b>结构力学与方法论 .....</b>	<b>288</b>
习题	.....	206	§ 18-1	静定结构算法中蕴含的方 法论 .....	288
<b>第 16 章</b>	<b>结构的稳定计算 .....</b>	<b>209</b>	§ 18-2	超静定结构算法中蕴含的 方法论 .....	290
§ 16-1	两类稳定问题概述 .....	209	§ 18-3	力学方法论的常用三法 .....	293
§ 16-2	两类稳定问题计算简例 .....	212	§ 18-4	分合法 .....	294
§ 16-3	有限自由度体系的稳定—— 静力法和能量法 .....	215	§ 18-5	对比法 .....	297
§ 16-4	无限自由度体系的稳定—— 静力法 .....	221	§ 18-6	过渡法 .....	300
§ 16-5	无限自由度体系的稳定—— 能量法 .....	225	§ 18-7	结构力学之道 .....	301
§ 16-6	无限自由度体系稳定的常微 分方程求解器法 .....	231	附录	习题答案 .....	303
§ 16-7	刚架的稳定——有限元法 .....	233	索引	.....	310
§ 16-8	组合杆的稳定 .....	239	参考文献	.....	314
§ 16-9	拱的稳定 .....	244	Synopsis	.....	315
§ 16-10	考虑纵向力对横向荷载影 响的二阶分析 .....	251	Contents	.....	316
			编著者简介	.....	319

# 第 11 章

## 静定结构总论

本书卷 I 是基本教程,着眼于为课程打好基础,落实课程的基本要求。卷 II 是专题教程,包含一些专题和提高内容,以供各校增选。提高是在已有基础上的延伸和开拓。学习专题内容时,既要充分联系已有的基础知识,又要注意其中的新问题和新概念。

在基本教程中曾经对静定结构问题作过系统的讨论。在此基础上,本章再作一些补充和延伸,从广度和深度上提升认识水平。

### § 11-1 几何构造分析与受力分析之间的对偶关系

几何构造分析与受力分析之间存在对偶关系。本书卷 I § 3-7 中把二者的关系比喻为“搭”和“拆”的关系,这就是一种对偶关系。

对偶关系还表现在其他方面,现作进一步的讨论。

#### 1. 从计算自由度 $W$ 的力学含义和几何含义看对偶关系

在第 2 章中指出,计算自由度  $W$  等于“各部件的自由度总数”与“全部约束数”的差值。这就是  $W$  的几何含义。

在受力分析中,取各部件作为隔离体,把各部件的约束切断,用其约束力来代替,然后利用隔离体的平衡方程来求未知的约束力。对部件的每一个自由度可写出一个相应的平衡方程,又每一个约束可对应于一个未知的约束力。因此,从静力分析的角度看,参数  $W$  又具有如下的力学含义: $W$  等于“各部件的平衡方程总数”与“未知力总数”的差值。

由此可见,参数  $W$  不仅具有几何含义,而且也具有对应的力学含义。根据  $W$  的数值,可对体系的静力特性得出如下结论:

(1) 若  $W > 0$ , 则平衡方程个数大于未知力个数。

由这组平衡方程求解未知力时,在一般情况下,方程组是矛盾的,没有解答。也就是说,在任意荷载作用下,体系不是都能维持平衡的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系为几何可变。)

(2) 若  $W < 0$ , 则平衡方程个数小于未知力个数。

如果此方程组有解,则解答必定有无穷多种。也就是说,体系如能维持平衡,则必定是超静定的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系有多余约束。)

(3) 若  $W = 0$ , 则平衡方程个数等于未知力个数。

此平衡方程组解答的性质要根据方程组的系数行列式  $D$  是否为零而定:

① 如果  $D \neq 0$ , 则平衡方程组有解,且必是唯一解。(从几何构造分析来看,如果  $D \neq 0$ , 则体系是几何不变的,且无多余约束。)

② 如果  $D=0$ , 则平衡方程在一般荷载作用下无解, 在特殊荷载作用下有无穷多组解。(从几何构造分析来看, 如果  $D=0$ , 则体系是几何可变, 且有多余约束。)

可以看出, 由  $W$  引出的静力特性与 § 2-3 中由  $W$  引出的几何特性之间具有对偶关系: 在一般荷载作用下平衡方程组有解对应于体系几何不变, 无解则对应于几何可变。平衡方程组只有唯一解对应于体系无多余约束, 有无穷多种解答则对应于有多余约束。

## 2. 从 $W=0$ 的一个简例看对偶关系

图 11-1a 所示为一个  $W=0$  的简单对称体系, 其中  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 即  $\alpha$  角在  $0$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间取值。对此体系分别进行几何构造分析和受力分析, 并从中看出二者之间的对偶关系。

首先, 从几何构造分析(图 11-1a)中得出两点结论:

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  (链杆 1 和 2 不共线) 时, 体系为几何不变, 且无多余约束。
- (2) 当  $\alpha = 0$  (链杆 1 和 2 为共线) 时, 体系为几何可变(瞬变), 且有多余约束。

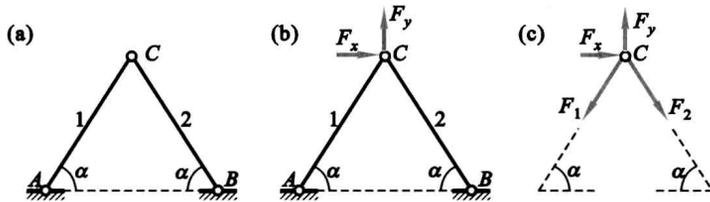


图 11-1

其次, 进行受力分析(图 11-1b)。为了求链杆 1 和 2 中的未知轴力  $F_1$  和  $F_2$ , 取结点  $C$  为隔离体(图 11-1c), 可写出两个投影平衡方程:

$$\begin{aligned} F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha &= F_x \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha &= F_y \end{aligned} \quad (11-1)$$

这时, 平衡方程个数与未知力个数正好相等, 但方程组是否可解, 或者是否有唯一解, 还需根据方程组的系数行列式  $D$  是否为零才能得出结论。由式(11-1)得

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \quad (11-2)$$

其中

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (a)$$

下面分为两种情况讨论:

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  时(两根链杆 1 和 2 不共线)

此时  $\alpha$  的取值范围为  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 由式(11-2)得知

$$D \neq 0$$

因此, 方程组(11-1)有解, 且为唯一解。解的一般形式可写成

$$F_1 = \frac{D_1}{D}, \quad F_2 = \frac{D_2}{D} \quad (11-3)$$