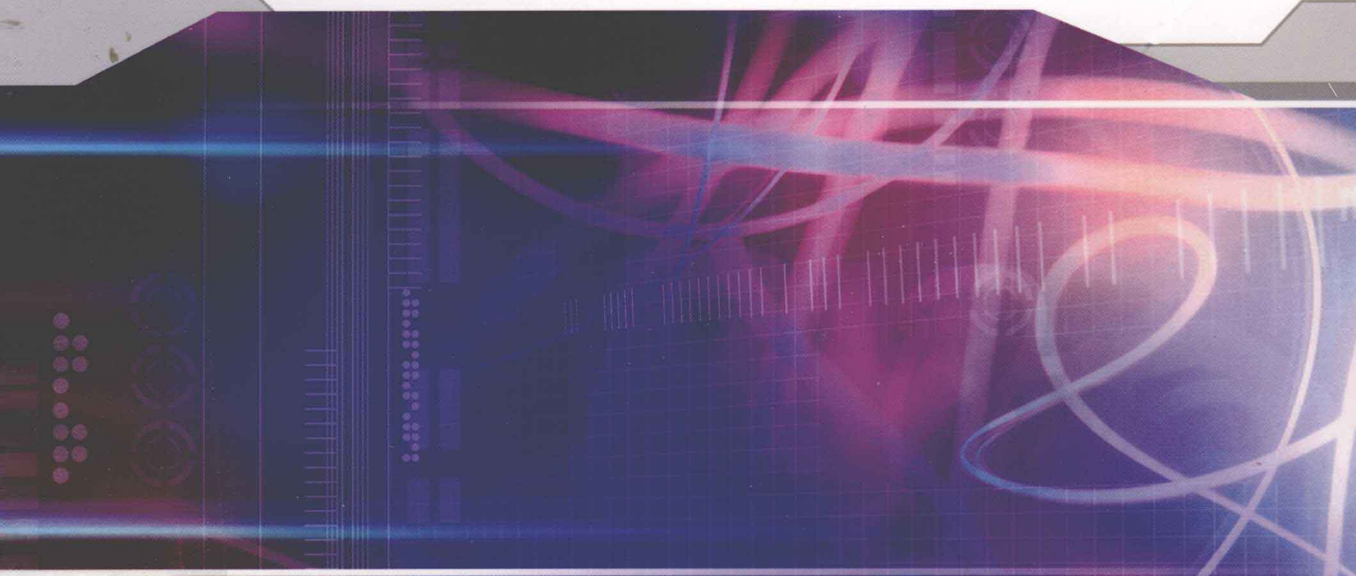
"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数

Linear Algebra



董晓波　曹伟平　李其琛　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数

主编 董晓波 曹伟平 李其琛
参编 孙翠娟 薄丽玲 倪凤莲 孙 岚
黄苏海 杜董生 舒 伟 隋福利
刘才贵 姜 乐 於 遒

机械工业出版社

本书是应用型本科线性代数课程教材. 本书针对应用型高校人才培养的特点以及当前应用型本科线性代数的实际教学情况，围绕“激发学生学习数学的兴趣，引领学生低起点切入，强化学生数学认知能力的培养，借助 MATLAB 软件提高学生解决复杂运算的能力，为后继专业课程的学习打下坚实的基础”这一教学改革思路，遵循“在满足教学基本要求的前提下，适当降低理论的推导，注重解决问题的矩阵方法”的主导思想，强调基本概念、基本方法和实际应用.

全书共分为 6 章，分别为矩阵、行列式与矩阵的秩、向量组与线性方程组、矩阵的特征值与二次型、线性空间与线性变换、线性代数实验. 在主要概念上力求引入自然，其中矩阵作为一个重要的研究对象和研究工具一直贯穿全书，并融入了线性代数发展简史、线性代数实验的内容. 本书除了按节选配了较为丰富的基本习题外，作为一章内容的总结，在每章后还精选了涉及各节相关内容的综合练习. 书后附有习题答案与提示，可供教师和学生参考.

本书可作为高等学校理工类、经管类各专业的教材或教学参考书，也可供科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/董晓波，曹伟平，李其琛主编. —北京：机械工业出版社，2012. 8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-38640-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①董…②曹…③李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 162876 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 李 乐
责任校对：张 嫒 封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 240mm · 17. 75 印张 · 435 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-38640-7
定价：35. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http：//www. cmpedu. com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http：//www. cmpbook. com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http：//weibo. com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

线性代数是应用型高校学生的一门重要的基础课程，也是工程技术和经济管理等领域中应用广泛的数学工具．在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出，因此应用型高校对线性代数教学内容、知识结构和教学模式都提出了新的要求．

本书依据理工类、经管类各专业对线性代数课程的规范要求和应用型高校的教学特色，围绕“激发学生学习数学的兴趣，引领学生低起点切入，强化学生数学认知能力的培养，借助 MATLAB 软件提高学生解决复杂运算的能力，为后继专业课程的学习打下坚实的基础”这一教学改革思路，遵循“在满足教学基本要求的前提下，适当降低理论的推导，注重解决问题的矩阵方法”的主导思想，力求通俗易懂，简单易学，既把握本课程的基本教学要求，又重视在各学科中的衔接、转换与应用．本书主要体现了以下几方面的特点．

1. 结构体系完整．全书以行列式和矩阵为主要工具，以线性方程组为主线，阐明了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，对某些章节适当降低了理论深度，突出各章节知识点的实用化分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求解题技巧，并强化了对学生计算机应用能力的培养．

2. 内容简洁明了．为有利于学生的自学，考虑到线性代数基本概念多、定理多、内容抽象、逻辑性强的特点，注意克服一般教材“精练有余而释义不足”的缺憾．教材注重深入浅出和语言的通俗易懂，以及具体和抽象的平稳过渡，使学生对基本概念的理解清晰准确；在理论教学上略去了一些烦琐的理论证明，代之以对理论的解释和直观形象的说明，强化了对理论的应用，引导学生掌握解决问题的方法和技巧．书中增加了注解，为学习不易理解、容易混淆的内容提供了帮助．

3. 每章都配有适量的习题和练习．为了巩固所学的基础知识，强化综合能力的培养，本书设置了章节习题和综合练习．通过精心筛选例题，使学生从总体上把握线性代数的基本思想与解决问题的基本方法．通过系统配制习题，逐步培养学生严密的逻辑思维能力．题型包括选择题、填空题、计算题、证明题．书后附有参考答案．针对应用型学生的具体情况适量选用“新颖的题型”是本教材的特色之一，以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力以及运用所学知识分析、解决问题的能力．书后附录为有关线性代数的发展简介，目的在于提高学生对数学的认识，以及培养学生学习数学的兴趣．

4. 引入数学软件、培养演练能力．本书第 6 章专门安排线性代数实验．简要介绍了 MATLAB7.0 的基本用法，按章节知识点顺序，精心编排了运算演示和上机练习，便于学生使用计算机体验数学知识．

本书具有逻辑清晰、注重应用、循序渐进、便于自学的特点，可作为高等学校理工类、经管类各专业的教材或教学参考书，也可供科技工作者参考．

具体的教学建议如下：

本书共为 6 章，分别为矩阵、行列式与矩阵的秩、向量组与线性方程组、矩阵的特征值与二次型、线性空间与线性变换、线性代数实验．本书第 1 ~ 4 章为基本教学内容，需 32 ~ 40 学时，另外需要 6 ~ 12 学时安排高级内容和实验环节；第 5 章线性空间与线性变换可供对线性代数有较高要求的读者选学，约需 6 学时；第 6 章线性代数实验既可以在各章中穿插演练，又可集中选学，约需 6 学时．

本书由淮海工学院董晓波、曹伟平、李其琛、孙翠娟、薄丽玲、倪凤莲、孙岚、黄苏海、杜董生、舒伟、隋福利、刘才贵、姜乐、於遒等老师共同编写，由董晓波教授最终统稿．

本书的编写，得到了淮海工学院副院长舒小平教授、教务处处长李纪明教授的大力支持，在此深表谢意．

由于编者水平有限，本书不足之处在所难免，衷心希望各位专家、同行和读者不吝赐教，以期不断完善．

编　者

目　　录

第 1 章

矩　阵

矩阵的本质是一张矩形的数表. 它是一种重要的数学工具，也是线性代数研究的主要对象之一，用途很广. 本章首先引入矩阵的概念，然后介绍矩阵的几种常见运算，讨论矩阵的初等变换以及初等矩阵，最后介绍矩阵的分块.

1.1 矩阵的概念

本节主要介绍矩阵的定义、几种特殊的矩阵以及矩阵相等的概念等内容.

1.1.1 矩阵的定义

首先看一个例子.

例 1 某厂家生产甲、乙、丙三种产品，其中一月份和二月份的产量(单位：万件)见表 1-1.

表 1-1

产量 \ 产品种类 \ 月份	甲	乙	丙
一月份	2	3	5
二月份	4	5	6

则表 1-1 可简列成 2 行 3 列的数表，记为 $\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix};$$

若这三种产品的单位成本和销售单价(单位：元)见表 1-2.

表 1-2

属性 产品种类	单位成本	销售单价
甲	1	3
乙	3	7
丙	4	9

则表 1-2 可列成 3 行 2 列的数表，记为 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\3&7\\4&9\end{pmatrix}.$$

在日常生活和社会生产活动中，经常使用各种各样的矩形数表，如学生的成绩单、工厂的生产进度表、销售统计表、股市的证券价目表等. 这些数表可以简洁地反映实际问题的有用信息，与所研究的问题密切相关，因此对实际问题的研究，常常转化为对这些数表的处理以及某些性质的研究. 这样的数表，称为矩阵. 下面给出严格的数学定义.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{matrix}$$

称为 **m 行 n 列矩阵**，简称 **$m\times n$ 矩阵**.

为了表示它是一个整体，在外面加上括号，并用大写英文粗体字母表示，记作

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

构成矩阵的数称为矩阵的**元素**，位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j)**元**，a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，第二个下标 j 称为

列标．矩阵 A 可简记作(a_{ij})，$(a_{ij})_{m\times n}$或$A_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**．本书中的矩阵均指实矩阵.

例 2　设有线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=1,\\3x_1-2x_2+5x_3-3x_4=2,\\2x_1+5x_2+2x_3-2x_4=6.\end{cases}$$

这个方程组未知数的系数，按其在方程组中的位置次序可列成一个数表 A，即

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&3&-4\\3&-2&5&-3\\2&5&2&-2\end{pmatrix},$$

A 称为线性方程组的**系数矩阵**．数表 A 补加一列(常数列)，又成一个数表$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-2&3&-4&1\\3&-2&5&-3&2\\2&5&2&-2&6\end{pmatrix},$$

$\overline{A}$称为这个线性方程组的**增广矩阵**．线性方程组与增广矩阵之间是一一对应的.

1.1.2　几种特殊的矩阵

1. 行矩阵和列矩阵

若矩阵 A 只有一行，即形如

$$A=(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$$

的矩阵称为**行矩阵**，又称为**行向量**．为清楚地表示行矩阵，各元素间可用逗号隔开，记作

$$A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n).$$

若矩阵 B 只有一列，即形如

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

的矩阵称为**列矩阵**，又称为**列向量**.

2. n 阶方阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相等，都等于 n，即形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶矩阵**，又称为 n **阶方阵**，可记作 $\boldsymbol{A}_n$. n 阶方阵从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**；另一条对角线称为**副对角线**，副对角线上的元素称为**副对角元**.

3. 三角矩阵

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0(i>j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即主对角线下方元素全为0，称形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵为 n **阶上三角矩阵**.

若 n 阶方阵中元素满足 $a_{ij}=0(i<j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即主对角线上方元素全为0，称形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵为 n **阶下三角矩阵**.

4. 对角矩阵

若 n 阶方阵中除主对角元外，其余元素均为0，即形如

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶对角矩阵**，又称为 n **阶对角阵**，常记为 $\boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ 为 λ 大写）. n 阶对角阵常记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

简记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n).$$

5. 数量矩阵

若 n 阶对角阵中的元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=k$，即形如

$$\begin{pmatrix}k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶数量矩阵**.

6. 单位阵

若 n 阶数量阵中的元素 $k=1$，即形如

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

的矩阵称为 n **阶单位阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$. 在不混淆的情况下，常省略下标 n，记作 $\boldsymbol{E}$.

例如，$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$是三阶单位阵.

注：阶数不同的单位阵不同.

7. 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

例如，$\boldsymbol{O}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O}_{2\times4}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$均为零矩阵.

注：行数不同或列数不同的两个零矩阵是不同的.

1.1.3 矩阵的相等

以下给出同型矩阵及矩阵相等的概念.

定义 2 若两个矩阵的行数相同，列数也相同，则称它们互为

同型矩阵. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，且它们对应位置的元素都相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：在同型矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 中，若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2-x & 3\\ 2 & 6 & 5z\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 6 & z-8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x，y，z.

解 由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases}2-x=x,\\ 2=y,\\ 5z=z-8,\end{cases}$$

可解得

$$x=1,\ y=2,\ z=-2.$$

习题 1.1

1. 某企业生产三种产品，每种产品各季度的产值(单位：万元)见表 1-3.

表 1-3

产值 产品 / 季度	第一种	第二种	第三种
第一季度	2	1	8
第二季度	3	1	9
第三季度	4	2	9
第四季度	3	2	8

试将每种产品各季度的产值写成矩阵形式.

2. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $\begin{cases}x_1-3x_3+x_4=-1,\\ 4x_1-x_2+3x_3-4x_4=0,\\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1+2x_2-x_3=0.\end{cases}$

3. 指出下列矩阵中哪些是方阵，哪些是对角阵，哪些是三角矩阵？

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4-y\\ x-2 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & y\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x，y.

1.2 矩阵的运算

本节主要介绍矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵的乘法、矩阵的逆以及矩阵的转置等运算.

1.2.1 矩阵的加法

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$均为 $m\times n$ 矩阵，其对应位置元素分别相加得到的 $m\times n$ 矩阵，称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注：从定义可以看出：

(1) 矩阵相加的前提为矩阵同型；

(2) 矩阵相加的方法是对应位置元素分别相加.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，不难验证，矩阵的加法运算满足：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，将 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素变号得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$.

由此，矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}),$$

亦即两个矩阵对应的元素相减.

注：矩阵的减法，可以看成加法运算.

矩阵加法和减法有下面的恒等式：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，

其中 $\boldsymbol{O}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵.

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素相乘所得到

的矩阵，称为**数 λ 与矩阵 A 的乘积**，记为 λA，$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$或

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{pmatrix}.$$

数与矩阵相乘简称为**数乘**.

规定 $\lambda A=A\lambda$，即数乘满足交换律.

由定义可以直接得到：$0A=O$，$1A=A$.

设 A，B 为同型矩阵，λ，μ 为数，不难验证，数乘运算满足：

(1) 结合律　$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法与数乘运算合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

例 4　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$，且 $A+2X=B$.

(1) 计算 $3A-2B$；

(2) 求矩阵 X.

解　(1) $3A-2B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 0 & 9 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ 10 & -6 & 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-3-8 & 6-6 & 9-4\\ 0-10 & 9+6 & -6-0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-11 & 0 & 5\\ -10 & 15 & -6\end{pmatrix};$$

(2) 由 $A+2X=B$，可推得 $A-A+2X=B-A$，即

$$2X=B-A,$$

从而有

$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 5 & -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

1.2.3　矩阵与矩阵相乘

在给出矩阵相乘的定义之前，先看一个实例.

例 5　引用例 1 的问题背景，分别求两个月的成本总额和销售总额.

解 一月份的成本总额为 $2\times1+3\times3+5\times4=31$(万元)，

一月份的销售总额为 $2\times3+3\times7+5\times9=72$(万元)，

二月份的成本总额为 $4\times1+5\times3+6\times4=43$(万元)，

二月份的销售总额为 $4\times3+5\times7+6\times9=101$(万元)，

于是得到了两个月的成本总额和销售总额的矩阵

$$C=\begin{pmatrix}31 & 72\\43 & 101\end{pmatrix}.$$

把矩阵 C 看成是矩阵 A 与矩阵 B 的乘积，C 的第一列元素分别表示两个月的成本总额，第二列元素分别表示两个月的销售总额.

1. 矩阵乘法的定义

定义 6 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$的列数与矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times n}$的行数相等，则由元素

$$\begin{aligned}c_{ij}&=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\\&=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

构成的 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$称为**矩阵 A 与矩阵 B 的乘积**，记为 $C=AB$.

注：(1) 两个矩阵相乘的条件是左矩阵的列数等于右矩阵的行数；

(2) 乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，列数等于右矩阵的列数；

(3) 乘积矩阵的第 i 行第 j 列的元素等于左矩阵第 i 行与右矩阵第 j 列对应元素的乘积之和.

例 6 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 0 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 5\\0 & 3\end{pmatrix}$的乘积.

解 因为 A 的列数与 B 的行数相等，所以 A 与 B 可以相乘，其乘积 AB 是一个 3×2 的矩阵，由定义 6，有

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 0 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 5\\0 & 3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\times2+1\times1+(-1)\times0 & 3\times3+1\times5+(-1)\times3\\2\times2+0\times1+4\times0 & 2\times3+0\times5+4\times3\\1\times2+(-1)\times1+2\times0 & 1\times3+(-1)\times5+2\times3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7 & 11\\4 & 18\\1 & 4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 7 (线性方程组的矩阵表示)设含有 n 个未知数、m 个方程的线