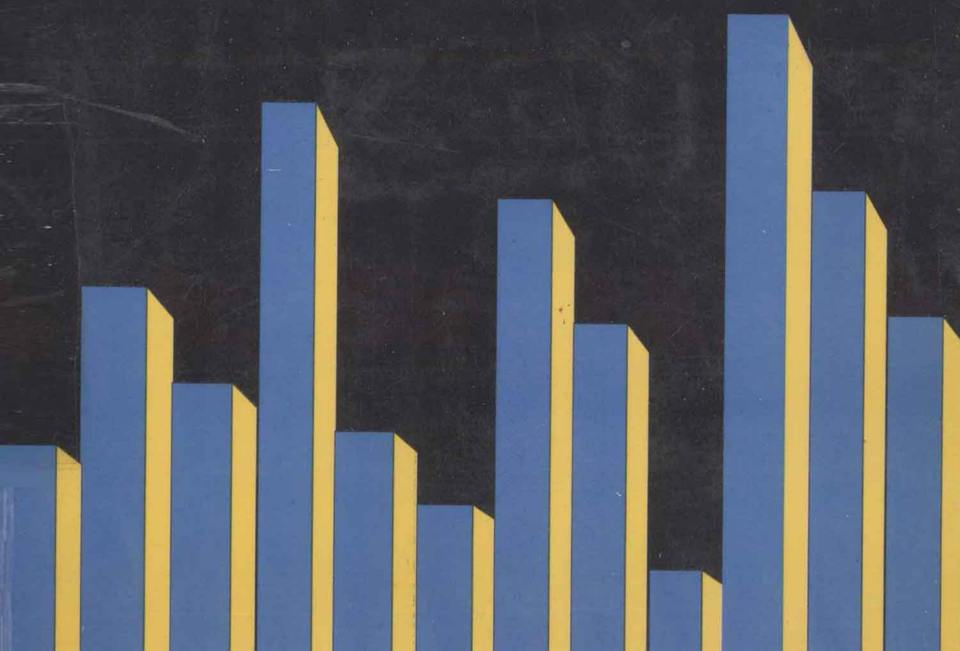
应用概率统计

郑章元／编

南京师范大学出版社

下



应用概率统计

下

郑章元 编

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/郑章元编 .—南京:南京师范大学出版社,1999
ISBN 7-81047-296-8/O·6

Ⅰ.应… Ⅱ.郑… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021
中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09471 号

郑章元 编

*

南京师范大学出版社出版发行
(江苏省南京市宁海路 122 号 邮编 210097)
江苏省新华书店经销 句容市印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 21.5 字数 534 千
1999 年 4 月第 1 版 1999 年 4 月第 1 次印刷
印数 1-4000
ISBN 7-81047-296-8/O·6
定价:30.00 元(上、下册)

下

（辅导材料）

目　录

下

事件与概率习题解答

1.1　一个工人生产了 n 个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品($1 \leqslant i \leqslant n$),试用 A_i 表示下列事件:

(1) 没有一个零件是不合格品

(2) 至少有一个零件是不合格品

(3) 仅仅只有一个零件是不合格品

(4) 至少有两个零件不是不合格品

(5) 至少有 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个零件是合格品

(6) 恰有 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个零件是合格品

解: (1) $\bigcap\limits_{1}^{n} A_i$　　　(2) $\bigcup\limits_{1}^{n} \overline{A_i}$

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_1 \cdots A_{i-1} \overline{A_i} A_{i+1} \cdots A_n$

(4) $\bigcup\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} A_i A_j$

(5) $\bigcup\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$

(6) $\bigcup\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} A_{i_1} \cdots A_{i_k} \overline{A}_{i_{k+1}} \cdots \overline{A}_{i_n}$

这儿$\{i_{k+1}, \cdots, i_n\} = \{1,2,\cdots,n\} - \{i_1, \cdots, i_k\}$

1.2　假设 A_1, A_2, A_3 是同一随机试验的三个事件,试通过它们表示下列各事件:

(1) 只有 A_1 出现;(2) 只有 A_1 和 A_2 出现;(3)A_1, A_2, A_3 中恰有一个出现;(4)A_1, A_2, A_3 中至少有一个出现;(5)A_1, A_2, A_3 中至少有两个出现;(6)A_1, A_2, A_3 都不出现。

解: (1)$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$　　　(2)$A_1 A_2 \overline{A}_3$

(3)$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$　　(4)$A_1 \cup A_2 \cup A_3$

(5)$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$　　(6)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

1.3　已知 $AB=\varnothing$**,试求:**$\overline{A}\cup\overline{B}$**,**$A\cup B\cup\overline{A}\overline{B}$**,**$\overline{A}\overline{B}-(A\cup B)$.

解: $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}=\overline{\phi}=\Omega$

$A\cup B\cup\overline{A}\overline{B}=A\cup B\cup(\overline{A\cup B})=\Omega$

$\overline{A}\overline{B}-(A\cup B)=\overline{A}\overline{B}(\overline{A\cup B})=\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$

1.4　某厂在职工中选一名厂长,设 $A=$**{被选者是大学生},**$B=$**{被选者是党员},**$C=$**{被选者是女职工},**$D=$**{被选者会用电脑},请用上述事件符号表示出下列各事件:**

(1) 所选的厂长是党员女大学生,但不会用电脑;

(2) 所选的厂长是男大学生,不是党员,也不会用电脑;

(3) 所选的厂长是会用电脑的女大学生,但不是党员。

解: (1)$ABC\overline{D}$　　(2)$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$　　(3)$A\,\overline{B}\,C\,D$

1.5　设 A_1,A_2 **为两个随机事件,证明:**

(1)$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A}_1)-P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

(2)$1-P(\overline{A}_1)-P(\overline{A}_2)\leqslant P(A_1A_2)\leqslant P(A_1\cup A_2)\leqslant P(A_1)+P(A_2)$

证: (1)$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})$

$=1-P(\overline{A}_1)-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

(2) 由(1)知 $1-P(\overline{A}_1)-P(\overline{A}_2)=P(A_1A_2)-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$\leqslant P(A_1A_2)\leqslant P(A_1\cup A_2)\leqslant P(A_1)+P(A_2)$

1.6　对任意随机事件 A,B,C**,证明**

$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$

证: $P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

$=P(A(B\cup C))\leqslant P(A)$

1.7　已知 $P(A)=p$**,**$P(B)=q$**,**$P(AB)=r$**,试分别求事件** $\overline{A}\cup\overline{B}$**,**$\overline{A}\overline{B}$**,**$\overline{A\cup B}$**,**$\overline{AB}$ **和** $\overline{A}(A\cup B)$ **的概率。**

解：$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(AB) = 1 - r$

$P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - p - q + r$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - p - q + r$

$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - r$

$P(\overline{A}(A \cup B)) = P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = q - r$

1.8　设 $Ax^2 + Bx + 1 = 0$ 中 A,B 分别为第 1,第 2 颗骰子掷得的点数,试求该方程有实数解的概率。

解：基本事件总数为 6×6。

有利于事件发生个数应满足:$\Delta = B^2 - 4A \geqslant 0$

即 $B^2 \geqslant 4A$,当 $A = 1$ 时,B 可取 2,3,4,5,6。

当 $A = 2$ 时,B 可取 3,4,5,6;当 $A = 3$ 时,B 可取 4,5,6。

当 $A = 4$ 时,B 可取 4,5,6;当 $A = 5$ 时,B 可取 5,6。

当 $A = 6$ 时,B 可取 5,6。

通过计数可得有利事件发生的频数为

$5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$

$\therefore \quad p = \dfrac{19}{36}$

1.9　在分别写有 2,4,6,7,8,11,12,13 的八张卡片中任取两张,把卡片上的两个数字组成一个分数,求所得分数为既约分数的概率。

解：均以真分数来计算基本事件总数为 $C_8^2 = 28$,而有利事件的数目为 $5 \times 3 + C_3^2 = 18$。

$\therefore p = \dfrac{18}{28} = \dfrac{9}{14}$

1.10　有五条线段,长度分别为 1,3,5,7,9,从这五条线段中任取三条,求所取三条线段能构成一个三角形的概率。

解：基本事件总数为 $C_5^3 = 10$。

其中有利事件个数应满足两边之和大于第三边即两个较小数之和应大于最大数,只有{357,379,579} 这三个。

$\therefore p = \dfrac{3}{10}$

1.11　**一幢 10 层楼的楼房中的一架电梯，在底层登上 7 位乘客，电梯在每一层都停，且假定每人均等可能地从各层离开，试求没有两位及两位以上乘客在同一层离开的概率。**

解：$p = \dfrac{P_9^7}{9^7} = 0.0379$

1.12　**把一红色立方体分成 1000 个同样大小的小立方体，并且从中随意取出一个，试求恰好取到有两个侧面涂有红色的小立方体的概率。**

解：每边 10 块中有 8 块小立方体涂有两个侧面为红色，共有 12 条边，∴ 有利事件的个数为 $8 \times 12 = 96$。

$\therefore P = \dfrac{96}{1000} = 0.096$

1.13　**某幼儿园有 m 个儿童，试求至少有两个儿童的生日相同的概率。**

解：$p = 1 - \dfrac{P_{365}^m}{365^m}$　（当 $m \leqslant 365$），$p = 1$　（当 $m > 365$ 时）

1.14　**从 0 − 9 这十个数字中随意选取 5 个（允许重复），试求下列事件的概率：**

A = {**取到的数字中不含** 0}，B = {**取到的数字中不含** 0 **和** 9}，C = {**取到的数字中不含** 0 **或** 9}，D = {**取到的数字中含** 0 **而不含** 9}，E = {5 **个数字之和为** 13}，F = {**这** 5 **个数字中最大者为** 8}。

解：$P(A) = \dfrac{9^5}{10^5} = 0.5905$　　$P(B) = \dfrac{8^5}{10^5} = 0.3277$

$$P(C) = P(A \cup A_1) = P(A) + P(A_1) - P(AA_1)$$
$$= \frac{2 \times 9^5 - 8^5}{10^5} = 0.8533$$

$P(D) = P\{不含 9 - 不含 0\} = P\{不含 9\} - P(B)$

$$= \frac{9^5 - 8^5}{10^5} = 0.2628$$

先求有利于 E 发生个数,它等价于$(1 + X + \cdots + X^9)^5$ 中 X^{13} 的系数而

$$(1 + X + \cdots + X^9)^5 = \left(\frac{1 - X^{10}}{1 - X}\right)^5 = (1 - X^{10})^5(1 - X)^{-5}$$
$$= (1 - C_5^1 X^{10} + \cdots)(1 + C_{-5}^1(-X)^1 + C_{-5}^2(-X)^2 + \cdots)$$

X^{13} 系数为:$C_{-5}^{13}(-1)^{13} - C_5^1 \times C_{-5}^3(-1)^3$

$$\text{而 } C_{-5}^{13} = \frac{(-5)(-6)\cdots(-17)}{13!} = (-1)^{13}C_{17}^{13}$$
$$= -C_{17}^4 = -\frac{17 \times 16 \times 15 \times 14}{4!} = -2380$$

$$C_{-5}^3 = -C_7^3 = -35$$

$$\therefore -C_{-5}^{13} + C_5^1 \times C_{-5}^3 = 2380 - 5 \times 35 = 2205$$

$$\therefore P(E) = \frac{2205}{10^5} = 0.0221$$

$$P(F) = \frac{9^5 - 8^5}{10^5} = 0.2628$$

1.15 **某公共汽车线路共有11个停车站,从始发站开车时共有8名乘客,假设这8名乘客在各站下车的概率相同(始发站除外),试求下列事件的概率:$A = \{8$人在不同站下车$\}$,$B = \{8$人在同一站下车$\}$,$C = \{8$人都在终点站下车$\}$,$D = \{8$人中恰有三人在终点站下车$\}$。**

解: $P(A) = \frac{P_{10}^8}{10^8} = 0.0181 \qquad P(B) = \frac{10}{10^8} = \frac{1}{10^7}$

$$P(C) = \frac{1}{10^8} \qquad P(D) = \frac{C_8^3 9^5}{10^8} = \frac{56 \times 9^5}{10^8} = 0.0331$$

1.16 **假设 $1 < k < n - 1$,$n > 3$,现从 $1,2,\cdots n$ 中随机选取三个数(不允许重复) 试求下列事件的概率:$A = \{$三个数字中**

一个小于 k，两个大于 k}，$B=$ {三个数分别小于、等于和大于 k}。

解：$P(A)=\dfrac{C_{k-1}^{1}\cdot C_{n-k}^{2}}{C_{n}^{3}}$

$$P(B)=\frac{C_{k-1}^{1}\cdot C_{n-k}^{1}}{C_{n}^{3}}=\frac{(k-1)(n-k)}{C_{n}^{3}}$$

1.17　有奖储蓄共发行了 n 张彩票，其中有 m 张中彩，试求购买了 r 张彩票，至少有一张中彩的概率。

解：$P=1-\dfrac{C_{n-m}^{r}}{C_{n}^{r}}$

1.18　假设盒中装有形状相同的 $N+M$ 个球，其中 N 个为黑色球，M 个为红色球，现随机抽取 n 次，每次一球($n\leqslant\min(N,M)$)，A 表示"第 k 次恰好抽到黑球"事件，B 表示"第 k 次恰好首次抽到黑球"，C 表示"n 次中恰好抽到 k 个黑球"事件。

若试验为无放回抽取，则 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$ 为何？

若试验为有放回抽取，则 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$ 又为何？

解：试验为无放回抽取时：

$$P(A)=\frac{N}{N+M},P(B)=\frac{P_{M}^{k-1}\cdot N}{P_{N+M}^{k}},P(C)=\frac{C_{N}^{k}\cdot C_{M}^{n-k}}{C_{N+M}^{n}}$$

若试验改为有放回抽取：

$$P(A)=\frac{N}{N+M},P(B)=\frac{M^{k-1}\cdot N}{(N+M)^{k}},P(C)=\frac{C_{n}^{k}N^{k}M^{n-k}}{(N+M)^{n}}$$

1.19　从 $1,2,\cdots N$ 中有放回地抽取三次，记数码之和为 X，试求事件"$X\leqslant N$"的概率。

解：先求有利于事件"$X=k$"发生的频数($3\leqslant k\leqslant N$)它等价于 $(x^{1}+x^{2}+x^{N})^{3}$ 中 x^{k} 项的系数。

而$(x+x^{2}+\cdots+x^{N})^{3}=x^{3}(\dfrac{1-x^{N}}{1-x})^{3}=x^{3}(1-x^{N})^{3}(1-x)^{-3}=x^{3}(1-3x^{N}+3x^{2N}-x^{3N})(\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{-3}^{k}(-x)^{k})$

可见对 $3 \leqslant k \leqslant N$ 时，x^k 系数为：$C_{-3}^{k-3}(-1)^{k-3} = \frac{(-3)(-4)\cdots(-k+1)}{(k-3)!}(-1)^{k-3} = C_{k-1}^{k-3} = C_{k-1}^{2}$

$\therefore$ 有利于“$X \leqslant N$”事件发生的频数为：$\sum_{k=3}^{N} C_{k-1}^{2} = C_N^3$

$\therefore P(X \leqslant N) = \frac{C_N^3}{N^3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{3!N^3} = \frac{1}{6}(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})$

1.20 **把 n 个完全相同的球（即假定球不可辨，且每盒允许落球个数不限），随机放入 N 个盒子中，如果每一种放法都是等可能的，试求下列事件的概率：**

$A = \{$某一个指定的盒子中恰好有 k 个球$\}$，

$B = \{$恰好有 m 个空盒$\}$，$C = \{$指定的 m 个盒中正好有 j 个球$\}$。

解：$P(A) = \frac{C_{n-k+N-2}^{n-k}}{C_{n+N-1}^{n}} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$

$P(B) = \frac{C_N^m \cdot C_{n-1}^{N-m-1}}{C_{n+N-1}^{n}} \qquad (N-n \leqslant m \leqslant N-1)$

$P(C) = \frac{C_{j+m-1}^{j} \cdot C_{n-j+N-m-1}^{n-j}}{C_{n+N-1}^{n}} \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant m \leqslant N \\ 0 \leqslant j \leqslant N \end{pmatrix}$

1.21 **假设匣中有3个红球，5个黑球和2个白球，现在甲、乙两人轮流从匣中取球，甲先取后乙取，每人每次取一球，并且取后不再放回，按规定先取到红球者获胜，而若出现白球，则认为平局。分别求甲获胜，乙获胜和平局的概率 p_1，p_2 和 p_3。**

解：$p_1 = \frac{3}{10} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{83}{210} = 0.3952$

$p_2 = \frac{5 \cdot 3}{10 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$

$= \frac{43}{210} = 0.2048$

$$p_3 = \frac{2}{10} + \frac{5 \cdot 2}{10 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

1.22 **(几何概型)向区域 Ω 随机投点,假设落在某子域 A 中的概率仅与 A 的"面积"成正比,而与位置形状无关,则称为几何概型。**

此时 $P(A) = \dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$ (注 A 的"面积"$L(A)$ 一般指它的勒贝格测度)

历史上比较有名的例子有:

(1)(会面问题)甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面,并约定先到者应等侯另一个人一刻钟,这时即可离去,求两人能会面的概率($p = \dfrac{7}{16}$)。

(2)蒲丰(Buffon)投针问题,平面上画有等距的平行线,平行线间的距离为 $a(a > 0)$,向平面任意投掷一枚长为 $l(l < a)$ 的针,试求针与平行线相交的概率($p = \dfrac{2l}{\pi a}$)。

有兴趣的读者可自行求出上述的概率。

解:(1) 设 x, y 分别表示甲,乙两人所到时刻,$0 \leqslant x, y \leqslant 60$,$A$ 表示甲,乙两人能会面事件,则 $A = \{(x,y): |x - y| \leqslant 15\}$,所以 $P(A) = \dfrac{60^2 - 45^2}{60^2} = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$。

(2) 设 X 表示针中点与最近一根平行线的距离,ϕ 表示针与平行线间的夹角,则 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2}$,$0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ 针与这组平行线的相对关系可由(x, ϕ)来确定,此时针与平行线相交的充要条件是 $x \leqslant \dfrac{l}{2}\sin\phi$。

$$\therefore P(\text{相交}) = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\phi \mathrm{d}\phi}{\frac{a}{2} \times \pi} = \frac{2l}{\pi a}$$

1.23　设 M 件产品中有 m 件是不合格品，从中任取两件。

(1) 在所取产品中有一件是不合格品的条件下，求另一件也是不合格品的概率。

(2) 在所取产品中有一件是合格品的条件下，求另一件是不合格品的概率。

解：(1) 设 A 表示两件中至少有一件是不合格品、B 表示两件均不合格，则

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_m^2}{C_m^1 \cdot C_{M-m}^1 + C_m^2}$$

$$= \frac{m-1}{2M-m-1}$$

(2) 设 A 表示两件中至少有一件为合格品，B 表示一件合格，一件不合格，则

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_m^1 \cdot C_{M-m}^1}{C_m^1 C_{M-m}^1 + C_{M-m}^2}$$

$$= \frac{2m}{M+m-1}$$

1.24　某射击小组共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 8 人，三级射手 7 人，四级射手 1 人。一、二、三、四级射手能通过选拔进入决赛的概率分别是 0.9，0.7，0.5，0.2，求在小组内任选一名射手，该射手能通过选拔进入决赛的概率。

解：设 A_i 表示选到的是 i 级射手，$i = 1,2,3,4$；B 表示能通过选拔进入决赛。则 $P(B) = \sum_1^4 P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = \frac{4}{20} \times 0.9 + \frac{8}{20} \times 0.7 + \frac{7}{20} \times 0.5 + \frac{1}{20} \times 0.2 = 0.645$

1.25 某工厂共有四种机床，其中车床，钻床，磨床，刨床的台数之比为 9 : 3 : 2 : 1，一定时间内需要修理的概率之比为 1 : 2 : 3 : 1，当有一台机床需要修理时，问这台机床是车床的概率是多少？

解：设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示该机床为车床，钻床，磨床，刨床。

B 表示该机床需修理，则

$$P(B)=\sum_1^4 P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)$$

$$=\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}+\frac{3}{15}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{7}$$

$$=\frac{22}{15\times 7}$$

而 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}}{22/15\times 7}=\dfrac{9}{22}$

1.26 有朋友自远方来，他乘火车，轮船，汽车，飞机来的概率分别是 0.3，0.2，0.1，0.4，如果他乘火车，轮船，汽车来的话，迟到的概率分别是 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，而乘飞机不会迟到，结果他是迟到了，试问他是乘火车来的概率是多少？

解：设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示他乘火车，轮船，汽车，飞机事件，

B 表示他迟到，由贝叶斯公式

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)}{\sum_1^4 P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}$$

$$=\frac{0.3\times 1/4}{0.3\times 1/4+0.2\times 1/3+0.1\times 1/12+0.4\times 0}$$

$$=0.5$$

1.27 通讯信道分别以概率 p_1,p_2 和 $p_3(\sum_1^3 p_i=1)$ 传递 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 三种信号，假设每个字母被正确接收到的概