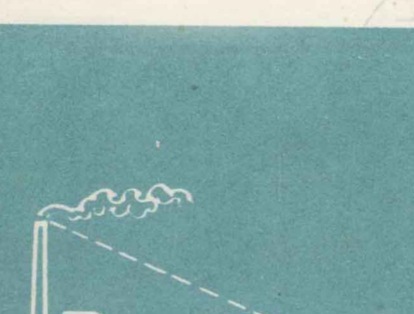
吉林省中学试用课本

数　学

第七册



目　　录

毛主席说：**“人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面”**。我们在几何的平面部分已经学过了平面图形的一些性质、画法、计算及其应用。但是生产和生活实际中物体的形状都是立体的，如机械、建筑、堤坝等等．这就需要我们进一步研究立体图形的一些性质、画法、计算及其应用，以便更好地解决三大革命运动中的一些问题。

第一章　直线和平面

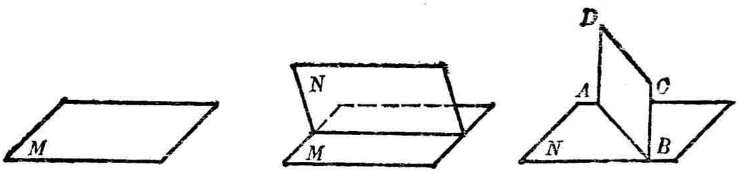
本章主要研究直线和平面的各种位置关系，特别是它们之间的平行和垂直关系。研究这些内容，不仅是为学习简单几何体的性质、面积、体积及识图知识作准备，而且还可以直接解决工农业生产中一些实际问题。

一 平　　面

1.1　平面的表示法

桌面、黑板面、划线平台的表面、以及平静的水面等都给人们以平面的形象．几何中所说的平面，是指在空间无限伸展着的．

我们从一定的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都象平行四边形，因此，通常用平行四边形表示平面（图1—1）．



甲　　　　乙　　　　丙

图 1—1

在画一个水平放置的平面时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，把横边画得等于它的邻边的两倍（图 1—1 甲）．如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应该把被遮住的线段画成虚线（图 1—1 乙）或不画（图 1—1 丙），这样看起来比较有真实感．

一个平面常用一个大写字母表示，如平面M（图 1—1 甲、乙），有时也用平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 1—1 丙）．

1.2　平面的基本性质

“认识从实践始”，人们通过长期的实践，总结出平面有下列一些基本性质：

1. 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1—2 甲）.

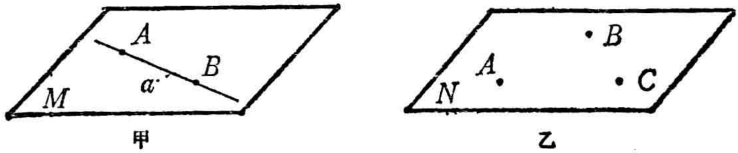


图 1—2

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在一个刨得非常光滑的板面（或玻璃面）上，可以看到直尺边缘上所有的点都落在这个平面内.

2. 两个平面相交，交线是一条直线（图 1—1 乙）.

例如，两个墙面的交线，折纸的折痕都是一条直线.

3. 不在一条直线上的三点确定一个平面（图 1—2 乙）.

例如，三脚凳的三个脚可以支住凳面；平板仪的架子是三只脚.

我们以后把这三个性质当作公理，可以用来作为推理论证的基础. 例如，根据性质 1 和性质 3 可以推出：

推论 1 一条直线和这条直线外的一点确定* 一个平面（图 1—3 甲）.

推论 2 两条相交直线确定一个平面（图 1—3 乙）.

推论 3 两条平行直线确定一个平面（图 1—3 丙）.

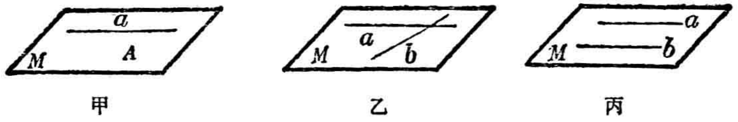


图 1—3

* 确定是指存在唯一一个平面.

这三个推论的正确性是很明显的，此处不再论证．例如，一扇门可以绕门轴转动，如果上了锁，门就固定了；木工师傅常用两条相交或平行的木条把几块木板拼在一起（图1—4）．

图1—4

习　题　一

1．平面有无界限？通常把它画成什么形状？画两个水平放置的平面 M 和 N．

2．画两个相交的平面，并在图中注上字母．

3．一条线段在一个平面内，为什么它的延长线也在这个平面内？

4．一个平面内的一点 A 和这个平面外的一点 B 连成一条直线．这条直线和这个平面为什么只有一个公共点 A？

5．独轮车后面的两个支架起什么作用？为什么？利用自行车的车梯子为什么可以把自行车放稳？

6．空间有四个点 A、B、C、D，它们中的任何三点都不在一条直线上，如果过其中任意三点确定一个平面，共可确定几个平面？

7．三角形、平行四边形是否一定是平面图形？为什么？

8．怎样用两条细绳检查桌子的四个脚的下端是否在同一个平面内？

9．要把一个圆木锯开成两半，并使锯面平整，应该如何画线？

二　直线和直线的位置关系

1.3　两条直线的相关位置

我们知道，在同一个平面内的两条不重合的直线的位置关系，只有相交和平行两种情况。在空间的两条不重合的直线的位置关系是否也是这样呢？

观察教室里下垂的电灯线和黑板的一条横边缘线；机器上蜗轮和蜗杆的轴线(图1—5)等。可以看出，它们都是不在同一平面内的两条直线。

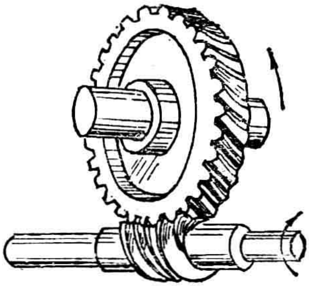


图 1—5

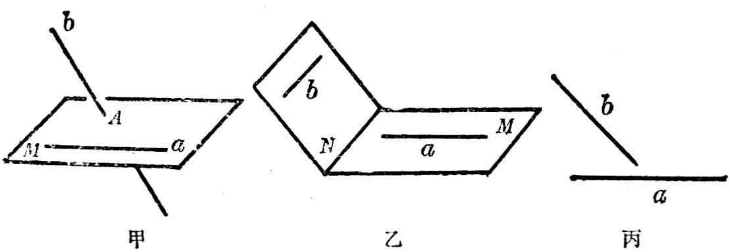
不在同一个平面内的两条直线叫做异面直线。

因此，空间的两条不重合的直线的位置关系有以下三种：

(1) 相交直线——只有一个公共点，}在同一个平面内，
(2) 平行直线——没有公共点，

(3) 异面直线——没有公共点，不在同一个平面内。

画两条异面直线时，一般地要显示出它们不在同一个平面内的特点。图1—6中甲、乙的画法比较明显，丙的画法就



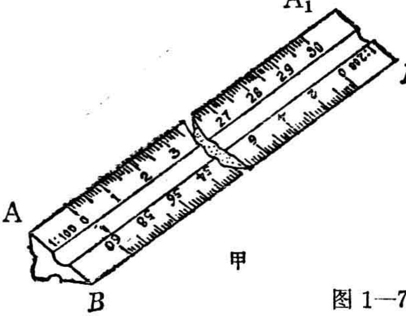
甲　　　乙　　　丙

图 1－6

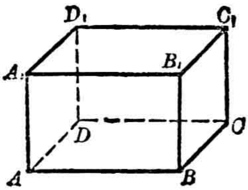
不明显.

1.4 对应边平行的两角

我们知道，在同一个平面内，平行于同一条直线的两条直线互相平行. 现在研究空间的情况. 图 1—7 甲表示一个三棱尺，它的三条棱不在同一个平面内，棱 AA_1、BB_1 都和第三条棱 CC_1 平行，AA_1 和 BB_1 也互相平行. 图1—7乙表示一个长方体，AB、A_1B_1、D_1C_1 不都在同一个平面内，AB、D_1C_1 都和 A_1B_1 平行，AB 和 D_1C_1 也互相平行. 由这些事实可以得出：



甲



乙

图 1—7

定理 不在同一个平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也互相平行.

我们还知道，在同一个平面内，对应边平行并且方向相同的两个角相等，在空间也有相同的定理.

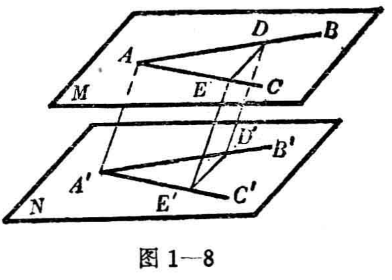


图 1—8

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知 如图 1—8，$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，

$AC \parallel A'C'$，并且方向相同。

求证　$\angle BAC=\angle B'A'C'$。

证明　在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别取 $AD=A'D'$、$AE=A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'。

$\because$　$AB \parallel A'B'$，$AD=A'D'$，

$\therefore$　$AA'D'D$ 是平行四边形。

$\therefore$　$AA' \parallel DD'$，$AA'=DD'$。

同理$AA' \parallel EE'$，$AA'=EE'$。

$\therefore$　$DD' \parallel EE'$，$DD'=EE'$，

$EE'D'D$ 是平行四边形。

$\therefore$　$ED=E'D'$。

$\therefore$　$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$。

$\therefore$　$\angle BAC=\angle B'A'C'$。

应该注意具体地分析具体的情况，在同一个平面内的图形有某些性质，在空间不一定也有同样的性质。例如，在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线互相平行；但是在空间垂直于同一条直线的两条直线就不一定平行，而可能是相交或成异面直线。

1.5　两条异面直线所成的角

图 1—9 甲中直线 a、b 是两条异面直线，直线 a、c 也是两

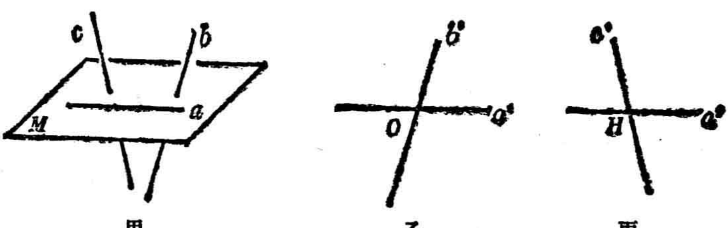


图 1—9

条异面直线。但是，很明显，直线 a、b 的相对位置和直线 a、c 的相对位置不完全相同。如何进一步地反映两条异面直线的位置关系呢？

如图 1—9 乙，我们在空间任意取一点 O，过点 O 作直线 a'、b' 分别平行于 a、b，a' 和 b' 相交所成的角叫做异面直线 a 和 b 所成的角。a' 和 b' 所成的角有四个，其中两两相等。通常，直线 a 和 b 所成的角是指 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）。同样，如图 1—9 丙，在空间任意取一点 H，过点 H 作直线 a'、c' 分别平行于 a、c，则 a' 和 c' 相交所成的角叫做异面直线 a 和 c 所成的角。

因为对应边平行并且方向相同的两个角相等，所以两条异面直线 a 和 b 所成的角的大小是由 a 和 b 的位置来决定的，和 O 点的位置无关。O 点可以取在 a 上或 b 上。如图 1—10，把 O 点取在 b 上，经过 O 作 $a' \parallel a$，那么，a' 和 b 所成的角就是异面直线 a 和 b 所成的角。

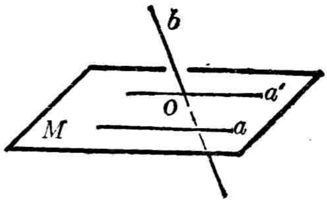


图 1—10

如果两条异面直线所成的角是直角，我们说这两条异面直线互相垂直。例如，蜗轮和蜗杆的轴线是互相垂直的两条异面直线，它说明了由蜗杆到蜗轮的传动方向转了 90° 的角。

在图 1—11 中，A_1A 和 B_1C_1 是两条异面直线，直线 A_1B_1 和它们都垂直相交。我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线。

在图 1—12 中，电线杆的横担 AB 和电线 DE 可看作是异面直线，绝缘子的轴线 BC 是 AB、DE 的公垂线。

两条异面直线的公垂线和这两条异面直线交点间的线段

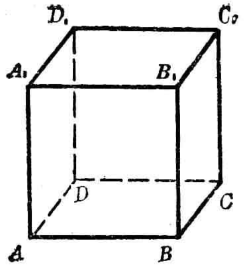


图 1—11

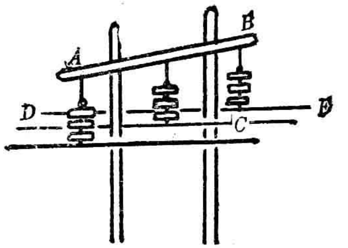


图 1—12

的长，叫做两条异面直线的距离。图 1—11 中线段 A_1B_1 的长就是异面直线 AA_1 和 B_1C_1 的距离。

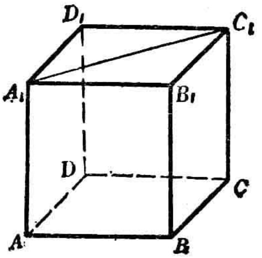


图 1—13

例 图 1—13 表示一个棱长是 a 的正方体。(1) A_1A 和 B_1C_1 成多大角？(2) A_1C_1 和 AD 成多大角？(3) AD、A_1B_1 的距离是多少？

解 (1) $\because$ $A_1D_1 \parallel B_1C_1$，$\angle D_1A_1A = 90°$，

$\therefore$ A_1A 和 B_1C_1 成 $90°$ 角。

(2) $\because$ $A_1D_1 \parallel AD$，$\angle D_1A_1C_1 = 45°$，

$\therefore$ A_1C_1 和 AD 成 $45°$ 角。

(3) $\because$ $AA_1 \perp AD$，$AA_1 \perp A_1B_1$，$AA_1 = a$。

$\therefore$ AD 和 A_1B_1 的距离是 a。

习 题 二

1. (1) 什么叫异面直线？试画出两条异面直线。

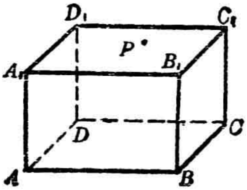
   (2) 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线吗？

2. 举出几个生产和生活中成异面直线的例子。

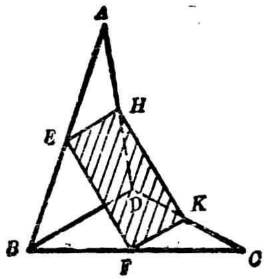
3. 两条直线没有公共点，这两条直线的位置怎样？

4. 分别在两个相交平面内画出两条平行直线、相交直线和异面直线。

5. 在一个长方体木块的 A_1C_1 面上有一点 P（如图），要经过点 P 和棱 BC 把木块锯开，怎样画线？



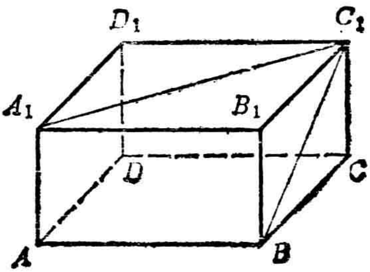
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知 E、F、K、H 分别是空间四边形（四个顶点不在同一个平面内的四边形）$ABCD$ 的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点．求证：(1) E、F、K、H 在同一个平面内；(2) $EF \parallel KH$，$EF=KH$。

7. 什么叫两条异面直线所成的角？两条异面直线在什么情况下叫做互相垂直？空间的两条互相垂直的直线一定相交吗？



（第 10 题）

8. 求证：如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直（不一定相交），那么也和另一条垂直。

9. 用木条或铁丝做两条异面直线公垂线的模型。

10. 如图，已知长方体的长和宽都是 $4cm$，高是 $2cm$。

(1) BC 和 A_1C_1 成多大角？(2) A_1A 和 BC_1 成多大角？(3) A_1B_1 和 D_1D、B_1C_1 和 DC 的距离各是多少？

三　直线和平面的位置关系

1.6　直线和平面的相关位置

恩格斯教导我们：**“形的概念也完全是从外部世界得来的”**。可以从桌面和放在桌面上的铅笔；电线杆或电线杆拉线和地面；电线和路面（图 1—14）等实际物体的位置关系中，得出直线和平面的位置关系。归纳起来，一条直线和一个平面的位置关系有三种情况：

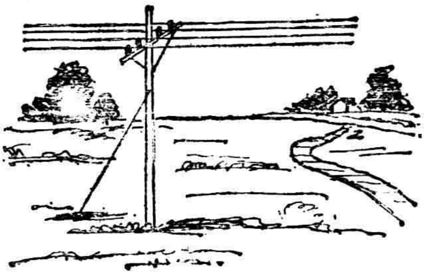
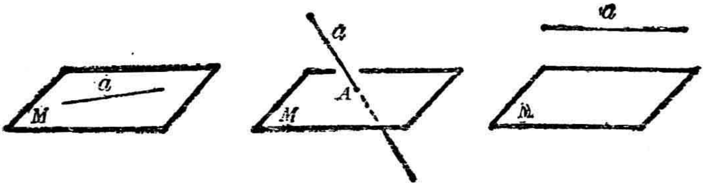


图 1—14



甲　　乙　　丙

图 1—15

(1) 直线在平面内（图 1—15 甲）——直线和平面有无数个公共点。

(2) 直线和平面相交（图 1—15 乙）——直线和平面只有一个公共点。

(3) 直线和平面平行（图 1—15 丙）——直线和平面没

有公共点。

直线 a 和平面 M 平行，写作 $a \parallel$ 平面 M，或者平面 $M \parallel a$。

1.7 直线和平面平行

建筑房屋时，必须使房梁和水平面平行；安装车床时，也必须使车床的导轨和水平面平行。那么怎样判定直线和平面是否平行呢？

木工师傅用木勒子在木板上划线时，只要划出的线（AB）和板面（M）上的一条线（CD）平行，就可以看出这条线和这个面平行（图 1—16）。

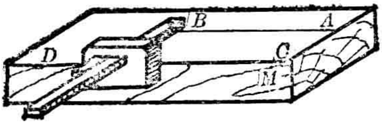


图 1—16

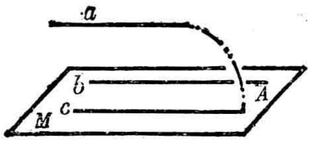


图 1—17

这些例子可以说明下面事实：

直线和平面平行判定定理 平面外的一条直线如果和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行。

已知 如图 1—17，直线 $a \parallel$ 直线 b，a 在平面 M 外，b 在平面 M 内。

求证 $a \parallel$ 平面 M。

证明 假设 a 不平行平面 M。因为 a 在平面 M 外，所以 a 和平面 M 相交，设交点为 A。

$\because$ $a \parallel b$，$\therefore$ 点 A 不在 b 上。

在平面 M 内经过点 A 画直线 c 和 b 平行。因为 a 也经过点 A 和 b 平行，这样经过点 A 就有两条直线和同一直线平行了，这和平行公理相矛盾。

∴ a 不能和平面 M 相交，因此，$a\parallel$ 平面 M。

现在回想一下，我们是怎样证明这个定理的，以便**“从其中引出规律，作为我们行动的向导”**。这种方法是，先作出和所要求证的结论相反的假设，然后从这个假设出发，推导出和定理中的已知条件或已讲过的定义、公理、定理相矛盾的结果，从而说明和结论相反的假设不能成立。因而断定原来的结论是正确的。

这种证明问题的方法叫做反证法。证明定理时，如果能够比较容易证明出定理结论的反面不成立，常用反证法。

例 如图1—18，已知直线 $a\parallel$ 平面 M。平面 N 经过 a 且和平面 M 相交于直线 b。试用反证法证明 $a\parallel b$。

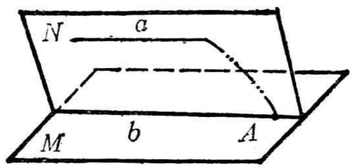


图1—18

证明 假设 a 不平行 b，则 a、b 相交，设交点为 A，点 A 在直线 b 上。

∵ b 在平面 M 内，

∴ 点 A 在平面 M 内，

又∵ 点 A 在直线 a 上，

∴ a 和平面 M 有公共点，这和已知条件中 $a\parallel$ 平面 M 相矛盾。

∴ a、b 不能相交，

因此，$a\parallel b$。

由此可以得出：

直线和平面平行性质定理 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的一个平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。